Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(4), 572-579
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.124064

Hans汉斯

完全二部图$K_{11,n}\left(89 \le n \le 212\right)$的点可区别E-全染色

汉大玮

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年3月10日；录用日期：2022年4月14日；发布日期：2022年4月21日

摘　要

图G的一个E-全染色f是指让相邻两个顶点之间染不同的颜色，并且让每条关联边与它的端点染不同颜色的全染色。如果对图G中任意两个不同的顶点u和v，点u和点v的色集合不相同，则称f为图G的VDET染色，即图G的点可区别E-全染色。在本篇论文中我们利用反证法以及分析法，讨论完全二部图$K_{11,n}\left(89 \le n \le 212\right)$的VDET染色问题，并利用构造染色法给出$K_{11,n}\left(89 \le n \le 212\right)$的最优VDET染色的染色方案。

关键词

完全二部图，E-全染色，VDET染色，VDET染色数

Vertex-Distinguishing E-Total Coloring of Complete Bipartite Graph $K_{11,n}\left(89 \le n \le 212\right)$

Dawei Han

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 10th, 2022; accepted: Apr. 14th, 2022; published: Apr. 21st, 2022

Abstract

Let G be a simple graph. The total coloring f of G is called an E-total coloring if two adjacent vertices have different colors, and dot each associated edge a different color from its end. For an VDET coloring f of graph G, if $C(u) \ne C(v)$ for any two distinct vertices u and v of $V(G)$, then f is called VDET; we shall abbreviate the vertex-distinguishing E-total coloring of G. This paper uses the con-

文章引用: 汉大玮. 完全二部图$K_{11,n}\left(89 \le n \le 212\right)$的点可区别E-全染色[J]. 理论数学, 2022, 12(4): 572-579.
DOI: 10.12677/pm.2022.124064

tradiction and analysis method. We discussed the VDET coloring problem of complete bipartite graph $K_{11,n}(89 \le n \le 212)$. The structure staining method was used to give the best staining scheme of optimal VDET coloring of complete bipartite graph $K_{11,n}(89 \le n \le 212)$.

Keywords

Complete Bipartite Graph, E-Total Coloring, VDET Coloring, VDET Coloring Number

1. 引言

在图论研究中，图的染色问题非常有趣且具有极其重要的研究意义和应用价值，近年来，随着图的染色问题在现实生活中的广泛应用，它逐渐成为被许多学者研究的重要领域之一，点可区别的正常边染色或一般边染色、点可区别的正常全染色或一般全染色以及点可区别的未必正常全染色等一系列问题到现在依然是图论研究者追求且有趣的难题。

设图 G 是一个简单图。图 G 的一个一般全染色是指用不同的颜色对图 G 的所有顶点和 G 的边进行染色。设图 G 的一个全染色 f (正常或未必正常)和图 G 的任意一个顶点 X，用 $C(X)$表示顶点 X 的色集合，它是指顶点 X 所染颜色及与这个顶点关联边所染颜色组成的集合。在这篇文章中讨论的是图的点可区别的一类未必正常全染色。如果让相邻两个顶点之间染不同的颜色，并且让每条关联边与它的端点染不同颜色则称为图 G 的一个 E-全染色。设 f 为 G 的一个 E-全染色，若满足对 $\forall u,v \in V(G)$，$u \ne v$，有 $C(u) \ne C(v)$，则称 f 为 G 的 VDET 染色，也就是点可区别 E-全染色。图 G 的 VDET 色数 $\chi_{vt}^{e}(G) = \min\{k \mid G\text{存在}k\text{-VDET染色}\}$。

文献[1] [2]主要提出了图的点可区别等概念，文献[3] [4] [5] [6]陈祥恩等人讨论了完全二部图 $K_{2,n}$、星、扇、轮、路和圈的点可区别 E-全染色；文献[7] [8]讨论了完全二部图 $K_{10,n}$ 的点可区别 E-全染色。[9] [10] [11] [12]中讨论了完全二部图 $K_{2,n}$，$K_{3,n}$，$K_{6,n}$，$K_{7,n}$ 的点可区别 E-全染色，文献[13]杨芳等人讨论了完全图和合成图的点可区别正常边染色，文献[14] [15]中得出了 mC_4 和 mC_3 的一般点可区别全染色。本文主要通过讨论 $K_{11,n}(89 \le n \le 212)$ 的 VDET 染色并且得到 $K_{11,n}$ 的 VDET 色数。

令 $V(K_{11,n}) = X \cup Y$，$E(K_{11,n}) = \{u_i v_j : 1 \le i \le 11, 1 \le j \le n\}$，其中，$X = \{u_1, u_2, \cdots, u_{11}\}$，$Y = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$。设 $C(X) = \{C(u_1), C(u_2), \cdots, C(u_{11})\}$，$C(Y) = \{C(v_1), C(v_2), \cdots, C(v_j)\}$。

2. 引理

引理 1 当 $11 \le n \le 28$ 时，有 $\chi_{vt}^{e}(K_{11,n}) = 6$。

引理 2 当 $29 \le n \le 88$ 时，有 $\chi_{vt}^{e}(K_{11,n}) = 7$。

3. 主要结果及证明

定理 1 当 $89 \le n \le 212$ 时，有 $\chi_{vt}^{e}(K_{11,n}) = 8$。

证明：用反证法。首先，假设 $K_{11,n}$ 存在 7-VDET 染色，利用分析法可以推出矛盾，然后利用构造染色法给出 $K_{11,n}$ 的一个 8-VDET 染色。

假设 $K_{11,n}$ 存在一个 7-VDET 染色 f，用颜色 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 去染色，则我们只需要考虑以下六种情形。

情形 1：$u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 的 11 个顶点中颜色互不相同的仅有一种。不妨设 $f(u_i)=1\,(i=1,2,\cdots,11)$，那么每个 $C(v_j)$ 都不能用 1 去染色。因此{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}中可作为 $C(Y)$的子集数目为 $\binom{7-1}{2}+\binom{7-1}{3}+\binom{7-1}{4}+\binom{7-1}{5}+\binom{7-1}{6}=57$。57 个集合不能够区别出 Y 中的 n 个顶点，矛盾。

情形 2：$u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 的 11 个顶点中颜色互不相同的仅有两种。不妨设 $f(u_i)=\{1,2\}\,(i=1,2,\cdots,11)$，则每个 $C(v_j)$ 是 2-子集时不能用颜色 1 或 2 去染色。因此 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 中可作为 $C(Y)$的子集数目为 $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}-11=109$。其中，当 $110\le n\le 212$ 时，109 个集合不能够区别开 Y 中的 n 个顶点，矛盾。下面我们只需考虑当 $89\le n\le 109$ 时的情形。令 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\cup\mathfrak{B}_2\cup\mathfrak{B}_3$，其中：

$$\mathfrak{B}_1=\{\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{3,7\},\{4,5\},\{4,6\},\{4,7\},\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\}\};$$

$$\mathfrak{B}_2=\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,2,7\}\};$$

$\mathfrak{B}_3$ 为{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}的所有 4、5、6、7-子集和除去 $\mathfrak{B}_2$ 中的 3-子集所构成的集合，共 94 个集合。

观察到在 $\mathfrak{B}$ 中包含 i 的集合有 57 个 $(i=1,2)$。在 $\mathfrak{B}$ 中包含 j 的集合有 61 个 $(j=3,4,5,6,7)$。因此，每个 $C(u_i)$ 至少包含 3 种颜色，故 $C(X)\subseteq\mathfrak{B}_2\cup\mathfrak{B}_3$，$C(X)\cup C(Y)\subseteq\mathfrak{B}$，有 $11+n\le 109$，可得 $n\le 98$。所以当 $99\le n\le 212$ 时，$\mathfrak{B}$ 中的集合不能够区别出 X 和 Y 中的 $(11+n)$ 个顶点，矛盾。以下就只需要考虑当 $89\le n\le 98$ 时的情形。

情形 2.1：$\mathfrak{B}_2\cap C(Y)\ne\varnothing$，则 $1,2\in C(u_i)\,(i=1,2,\cdots,11)$

情形 2.1.1：$\mathfrak{B}_1\cap C(Y)\ne\varnothing$，(否则，若 $\mathfrak{B}_1\cap C(Y)=\varnothing$，则 $11+n\le 109-10$，$n\le 88$，矛盾。)，则每个 $C(u_i)$ 恰好同时包含 3, 4, 5, 6, 7 中的任意 1 种色，不妨设 $3\in C(u_i)\,(i=1,2,\cdots,11)$ 则 $\{4,5\},\{4,6\},\{4,7\},\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\}\notin C(Y)$，从而 $11+n\le 109-6$，可得 $n\le 92$，当 $93\le n\le 98$ 时，92 个集合不能够区别出 Y 中的 n 个顶点，矛盾。下面仅考虑 $89\le n\le 92$ 时的情形。此时{1, 4, 5}, {1, 4, 6}, {1, 4, 7}, {1, 5, 6}, {1, 5, 7}, {1, 6, 7}中至多有 3 集合不属于 $C(Y)$，因此每个顶点为 1 的色集合至少同时包含 4, 5, 6, 7 中的任意两种色，不妨设 $4,5\in C(u_i)$，$f(u_i)=1$，$(i=1,2,\cdots,11)$；同理{2, 4, 5}, {2, 4, 6}, {2, 4, 7}, {2, 5, 6}, {2, 5, 7}, {2, 6, 7}中至多有 3 个集合不属于 $C(Y)$，因此每个顶点为 2 的色集合至少同时包含 4, 5, 6, 7 中的任意两种色，不妨设 $f(u_i)=2$ 时，$a,b\in C(u_i),(i=1,2,\cdots,11)$，其中 $4\le a<b\le 7$，此时 $\{4,5\}\cap\{a,b\}=\varnothing$ 即 $\{a,b\}=\{6,7\}$。从而每个 $C(u_i)$ 只能是下面集合中的某一个：{1, 2, 3, 4, 5}, {1, 2, 3, 6, 7}, {1, 2, 3, 4, 5, 6}, {1, 2, 3, 4, 5, 7}, {1, 2, 3, 4, 6, 7}, {1, 2, 3, 5, 6, 7}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}，7 个集合不能够区别开 X 中的 11 个顶点，矛盾。

情形 2.1.2：如果 $\mathfrak{B}_2\cap C(X)=\varnothing$，则 $C(Y)\subseteq\mathfrak{B}_2$，那么每个 $C(u_i)$ 要至少同时包含 3, 4, 5, 6, 7 中的任意 2 种色，不妨设 $3,4\in C(u_i)\,(i=1,2,\cdots,11)$，从而每个 $C(u_i)$ 只能是下面的集合中的任意一个：{1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4, 5}, {1, 2, 3, 4, 6}, {1, 2, 3, 4, 7}, {1, 2, 3, 4, 5, 6}, {1, 2, 3, 4, 5, 7}, {1, 2, 3, 4, 6, 7}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}，矛盾。

情形 2.2：$\mathfrak{B}_2\cap C(Y)=\varnothing$。

情形 2.2.1：$\mathfrak{B}_2\cap C(X)\ne\varnothing$，则 3, 4, 5, 6, 7 的颜色中至少有一种颜色同时包含在每个 $C(u_i)$ 中，不妨设 $3\in C(u_i)\,(i=1,2,\cdots,11)$，则

$C(Y)\subsetneq\{\{4,5\},\{4,6\},\{4,7\},\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,4,7\},\{1,5,6\},\{1,5,7\},\{1,6,7\}\}$，则有 $n\le 109-16-10$，$n\le 83$，矛盾。

情形 2.2.2：$\mathfrak{B}_2 \cap C(X)=\varnothing$ 此时，$C(X)\cup C(Y)\subseteq \mathfrak{B}_2\cup\mathfrak{B}_3$，有 $11+n\le 10+94$，即 $n\le 93$，因此当 $94\le n\le 98$ 时，矛盾。以下仅考虑 $89\le n\le 93$ 时的情形，此时 $\mathfrak{B}_1$ 中至少有 6 个集合属于 $C(Y)$。

1) $\mathfrak{B}_1$ 中恰有 6 个或 7 个元素属于 $C(Y)$，这时 3, 4, 5, 6, 7 中至少有两种色会同时包含在每个 $C(u_i)$ 中，不妨设 $3,4\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$，则 $C(Y)\subsetneq\{\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\}\}$，即 $11+n\le 109-5-3$，$n\le 90$，因此当 $91\le n\le 98$ 时，矛盾。以下仅考虑 $89\le n\le 90$ 时的情形。

$C(X)\subsetneq\{\{1,5,6\},\{1,5,7\},\{1,6,7\},\{2,5,6\},\{2,5,7\},\{2,6,7\}\}$，且至多有一个不是 $C(Y)$ 的集合，$C(Y)\subseteq\{\{1,5,6\},\{1,5,7\},\{1,6,7\}\}$，则 X 中顶点为 1 的色集合中就至少会包含 5, 6, 7 中的任意两种颜色，不妨设 $f(u_i)=1$，$5,6\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$，由 $C(Y)\subseteq\{\{2,5,6\},\{2,5,7\},\{2,6,7\}\}$，可得颜色为 2 的 $C(X)$ 包含 5, 6, 7 中的最少两种相同的颜色，设对每个满足 $f(u_j)=2$ 的 u_j 都有 $a,b\in C(u_j)$，$5\le a<b\le 7$。由 $\{4,5\}\cap\{a,b\}\ne\varnothing$，则 $C(u_i)$ 至少同时包含 5, 6 中的任意一种色，不妨设 $5\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$ 因此，$C(X)\subseteq\{\{1,3,4,5,6\},\{1,3,4,5,6,7\},\{2,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,6,7\},\{1,2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$，矛盾。

2) $\mathfrak{B}_1$ 中恰有 8 个或 9 个元素属于 $C(Y)$，这时 $C(u_i)$ 中同时包含 3, 4, 5, 6, 7 至少有 3 种相同的色，不妨设 $3,4,5\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$，则 $\{6,7\}\notin C(Y)$，即 $11+n\le 109-5-1$，即 $n\le 92$，因此当 $93\le n\le 98$ 时，矛盾。以下仅考虑 $89\le n\le 92$ 时的情形。$C(X)\subsetneq\{\{1,6,7\},\{2,6,7\},\{1,2,6,7\}\}$ 且至少有 1 个属于 $C(Y)$，不妨设 Y 中某个顶点 v_{j0} 的色集合 $C(v_{j0})=\{1,2,6,7\}$，$f(v_{j0})=7$，则每个 $C(u_i)$ 包含{1, 2}, {1, 6}或{2, 6} $(i=1,2,\cdots,11)$，此，$C(X)\subseteq\left\{\begin{array}{l}\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,7\},\{1,2,3,4,5,6,7\},\\ \{1,3,4,5,6\},\{1,3,4,5,6,7\},\{2,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,6,7\}\end{array}\right\}$，矛盾。

3) $C(Y)\subseteq\mathfrak{B}_1$，这时 $C(u_i)$ 中至少同时包含 3, 4, 5, 6, 7 中的任意 4 种色，不妨设 $3,4,5,6\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$，从而满足 $C(X)\subseteq\{\{1,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,6\},\{1,3,4,5,6,7\},\{2,3,4,5,6,7\},\{1,2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$，矛盾。

情形 3：$u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 的 11 个顶点中颜色互不相同的仅有三种。不妨设 $f(u_i)=\{1,2,3\}(i=1,2,\cdots,11)$，则当 $C(v_j)$ 是 2-子集时，不能用颜色 1, 2 或 3 染色，且每个 $C(v_j)$ 都不是{1, 2, 3}。因此{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}可作为 $C(Y)$的子集数目为 $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}-16=104$。当 $105\le n\le 212$ 时，104 个集合不能够区分出 Y 中的 n 个顶点，矛盾。下面仅考虑当 $89\le n\le 104$ 时的情形。令 $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1\cup\mathfrak{C}_2\cup\mathfrak{C}_3$，其中：

$$\mathfrak{C}_1=\{\{4,5\},\{4,6\},\{4,7\},\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\}\};$$

$$\mathfrak{C}_2=\{\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,2,7\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,3,7\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,3,6\},\{2,3,7\}\};$$

$\mathfrak{C}_3$ 是{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}的子集中的 4-、5-、6-、7-子集和不在 $\mathfrak{C}_2\cup\{\{1,2,3\}\}$ 中的 3-子集，共有 86 个。

观察到 $\mathfrak{C}$ 中包含 57 个 i 集合 $(i=1,2,3)$，包含 60 个 j 集合 $(j=4,5,6,7)$，因此每个 $C(u_i)$ 至少包含任意 3 种色，故 $C(X)\subseteq\mathfrak{C}_2\cup\mathfrak{C}_3$，则 $C(X)\cup C(Y)\subseteq\{\{1,2,3\}\}\cup\mathfrak{C}$，有 $11+n\le 1+104$，可得 $n\le 94$，从而当 $95\le n\le 212$ 时，105 个集合不能够区别开 X 和 Y 中的 $(11+n)$ 个顶点，矛盾。下面仅考虑 $89\le n\le 104$ 时的情形。此时在 $\mathfrak{C}_1$ 中至少有 1 个集合属于 $C(Y)$，因此每个 $C(u_i)$ 中至少包含 4, 5, 6, 7 中的任意 1 种色，故 $\{1,2,3\}\notin C(X)$，$C(X)\cup C(Y)\subseteq\mathfrak{C}$，有 $11+n\le 104$，$n\le 93$。以下仅考虑 $89\le n\le 93$ 时的情形。此时 $\mathfrak{C}$ 中至多有四个集合不属于 $C(X)$和 $C(Y)$。

情形 3.1：$\mathfrak{C}_1$ 中恰有 3 个集合是属于 $C(X)$和 $C(Y)$的，则每个 $C(u_i)$ 刚好包含 4, 5, 6, 7 中的任意一种色，不妨设 $4\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$ 则 $C(Y)\subsetneq\{\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\}\}$，$C(X)\subsetneq\{\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,2,7\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,3,7\},\{2,3,5\},\{2,3,6\},\{2,3,7\}\}$，且至多有 2 个不属于

$C(Y)$，因此，$1,2,3\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$，从而 $C(X)\subseteq\left\{\begin{matrix}\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6,7\},\\ \{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,7\},\{1,2,3,4,5,7\},\{1,2,3,4,6,7\}\end{matrix}\right\}$，矛盾。

情形 3.2：$\mathfrak{C}_1$ 中的集合恰有 4 个或 5 个属于 $C(X)$和 $C(Y)$，则每个 $C(u_i)$ 恰好包含 4, 5, 6, 7 中的任意两种色，不妨设 $4,5\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$，则 $\{6,7\}\notin C(Y)$，$\mathfrak{C}_2\notin C(Y)$，因此有 $1,2,3\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$，从而 $C(X)\subseteq\{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,7\},\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$，矛盾。

情形 3.3：$\mathfrak{C}_1\cap C(X)\neq\varnothing$ 且 $\mathfrak{C}_1\cap C(Y)\neq\varnothing$，则每个 $C(u_i)$ 恰好包含 4,5,6,7 中的任意 3 种颜色，不妨设 $4,5,6\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$，则 $C(X)\subsetneq\mathfrak{C}_2$ 且 $\mathfrak{C}_2$ 中至多有四个集合不属于 $C(Y)$，因此 $1,2,3\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$，从而 $C(X)\subseteq\{\{1,2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$，矛盾。

情形 3.4：$\mathfrak{C}_1\cap C(X)=\varnothing$ 且 $\mathfrak{C}_1\cap C(Y)=\varnothing$，则 $C(X)\cup C(Y)\subseteq\mathfrak{C}_2\cup\mathfrak{C}_3$，则 $11+n\le 86+12$，$n\le 87$，矛盾。

情形 4：$u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 的 11 个顶点颜色中互不相同的仅有四种。设 $f(u_i)=\{1,2,3,4\}(i=1,2,\cdots,11)$，则当 $C(v_j)$ 是 2-子集时，不包含颜色 1, 2, 3 或 4，$C(Y)\subsetneq\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$，因此{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}可作为 $C(Y)$的成员数目为 $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}-18-5=97$。当 $98\le n\le 212$ 时，97 个集合不能区分 Y 中的 n 个顶点，矛盾。下面仅考虑 $89\le n\le 97$ 时的情形。令 $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1\cup\mathfrak{D}_2\cup\mathfrak{D}_3$，其中：$\mathfrak{D}_1=\{\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\}\}$；$\mathfrak{D}_2=\left\{\begin{matrix}\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,2,7\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,3,7\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,4,7\},\\ \{2,3,5\},\{2,3,6\},\{2,3,7\},\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{3,4,7\},\{2,4,5\},\{2,4,6\},\{2,4,7\}\end{matrix}\right\}$；

$\mathfrak{D}_3$ 是{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}中的 5-、6-、7-子集以及除去{1, 2, 3, 4}的 4-子集及不在 $\mathfrak{D}_2\cup\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ 中的 3-子集共 76 个。

观察到 $\mathfrak{D}$ 中包含 57 个 i 集合($i=1,2,3,4$)，包含 60 个 j 集合($j=5,6,7$)，因此每个至少包含三种色，$C(X)\cup C(Y)\subseteq D\cup\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$，有 $11+n\le 97+5$，即 $n\le 91$。从而当 $92\le n\le 212$ 时，102 个集合不能够区别开 X 和 Y 中的 $(11+n)$ 个顶点，矛盾。所以以下仅考虑当 $89\le n\le 91$ 时的情形，则 $\mathfrak{D}_1$ 中至多有 3 个集合不属于 $C(Y)$。

情形 4.1：$\mathfrak{D}_1$ 中至少有 1 个集合是属于 $C(Y)$的，则在 5, 6, 7 中至少有 1 种色同时包含在每个 $C(u_i)$ 中，不妨设 $5\in C(u_i)(i=1,2,\cdots,11)$。因此{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}均不属于 $C(X)$，故 $C(X)\cup C(Y)\subseteq\mathfrak{D}$，即 $11+n\le 97$，$n\le 86$，86 个集合不能够区别出 Y 中的 n 个顶点，矛盾。

情形 4.2：$C(Y)\subsetneq\mathfrak{D}_1$，则 $C(X)\subseteq\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$，不妨设 $C(u_{i0})=\{1,2,3\}$，$f(u_{i0})=1$，则每个 $C(v_j)$ 包含颜色 2 或 3，故

$$C(Y)\subsetneq\left\{\begin{matrix}\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,\ 4,7\},\{1,5,6\},\{1,5,7\},\{4,5,6\},\{4,5,7\},\{5,6,7\},\\ \{4,5,6,7\},\{1,4,5,6\},\{1,4,5,7\},\{1,5,6,7\},\{1,4,5,6,7\}\end{matrix}\right\},$$

故 $C(Y)\subseteq\mathfrak{D}_2\cup\mathfrak{D}_3\setminus\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{4,5,6,7\},\{1,4,5,6\},\{1,4,5,7\},\{1,5,6,7\},\{1,4,5,6,7\}$ 有 $n\le 15+79-13$，得 $n\le 81$，81 个集合不能够区别开 Y 中的 n 个顶点，矛盾。

情形 5：$u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 的 11 个顶点颜色中互不相同的仅有五种。不妨设 $f(u_i)=\{1,2,3,4,5\}(i=1,2,\cdots,11)$，当 $C(v_j)$ 是 2-子集时，不包含 1, 2, 3, 4 或 5 且每个 $C(v_j)$ 也都不是{1, 2, 3, 4, 5}的 3-子集、4-子集、5-子集，共有 $\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=16$ 个，因此{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}中可作为 $C(Y)$ 的子集数目为 $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}-16-20=84$，84 个集合不能够区别出 Y 中的 n 个顶点，矛盾。

情形 6：$u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 的 11 个顶点颜色中互不相同的仅六种。不妨设 $f(u_i)=\{1,2,3,4,5,6\}(i=1,2,\cdots,11)$，则每个 $C(v_j)$ 都不是 2-子集，且每个 $C(v_j)$ 也都不是{1, 2, 3, 4, 5, 6}的 3-子集、4-子集、5-子集、6-子集，共有 $\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=42$ 个，因此{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}可作为 $C(Y)$ 的子集数目为 $\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}-42=57$，57 个集合不能够区别出 Y 中的 n 个顶点，矛盾。

因此，7 种颜色不能够区别出 $K_{11,n}$，则当 $89\le n\le 212$ 时，$\chi_{vt}^{e}(K_{11,n})\ge 8$。下面利用构造染色法，给出 $K_{11,n}$ 的一个 8-VDET 染色。

首先，确定 f_{212}。X 中顶点 $u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 的色集合分别为：{1, 3, 4, 5, 7, 8}, {2, 3, 4, 5, 7, 8}, {1, 3, 4, 6, 7, 8}, {2, 3, 4, 6, 7, 8, {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, {1, 2, 3, 4, 7, 8}, {1, 3, 4, 7, 8}, {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8}, {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}。且给 X 中 $u_1,u_2,\cdots,u_{11}$ 11 个顶点所染的颜色分别为 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2。

让由 $X\cup\{v_1,v_2,\cdots,v_{212}\}$ 所导出的一个子图 $K_{11,88}$ 按照引理 2 给出的 7-VDET 染色 f_{88} 进行染色，然后给其它的顶点和关联边进行染色。将 $v_j(89\le j\le 104)$ 和它的关联边按照表 1 的方案进行染色(表 1 的第一行表示顶点 $u_i(1\le i\le 11)$ 的色集合不能染的颜色，第二行表示顶点 $u_i(1\le i\le 11)$ 所染的颜色，第三行的 38 (3)表示顶点 v_{89} 用 3 来染色，关联 $u_1v_{89},u_2v_{89},\cdots,u_{11}v_{89}$ 分别用 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8 来染色，并且顶点 $X(v_{89})=\{3,8\}$，并且以此类推下去)。

将顶点 $v_j(105\le j\le 212)$ 分别对应色集合{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}的全体含颜色 8 的 2-、3-、4-、5-、6-、7-集合，但不是{1, 2, 8}, {3, 8}，也不是表 1 中任意一个顶点的色集合去染色。顶点 $v_j(105\le j\le 212)$ 及其它的关联边 $u_1v_j,u_2v_j,\cdots,u_{11}v_j$ 的最优具体染色方案见表 2。当 $89\le j\le 212$ 时，$K_{11,212}$ 的 8-VDET 染色 f_{212} 在由 $X\cup\{v_1,v_2,\cdots,v_{88}\}$ 所导出的那个子图上的限制就是 $K_{11,j}$ 的 8-VDET 染色 f_j。

Table 1. The coloring method of vertex v_j and its incident edges of $K_{11,212}$ when $89\le j\le 104$

表 1. $K_{11,212}$ 顶点 $v_j(89\le j\le 104)$ 及其关联边的染色方案

		−26	−16	−25	−15	−2	−1	−56	−256	−6	−5	
		1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
v_{89}	38 (3)	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
v_{90}	48 (4)	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
v_{91}	58 (5)	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
v_{92}	68 (6)	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
v_{93}	78 (7)	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
v_{94}	13457 (7)	3	4	4	4	5	5	4	4	4	4	1
v_{95}	23457 (7)	3	3	4	4	5	5	2	4	4	4	2
v_{96}	13467 (7)	4	4	6	4	3	6	3	3	1	3	1
v_{97}	23467 (7)	3	4	3	6	3	6	3	3	4	3	2
v_{98}	134567 (7)	3	4	4	4	5	6	3	4	1	4	6
v_{99}	234567 (7)	5	4	4	4	3	6	4	4	5	4	2
v_{100}	12347 (7)	3	3	3	3	3	3	2	3	1	2	3

Continued

v_{101}	1347 (7)	3	3	3	3	4	4	4	3	1	4	3
v_{102}	123457 (7)	4	5	3	3	3	3	2	3	1	2	3
v_{103}	123467 (7)	4	4	3	6	4	4	2	4	4	2	1
v_{104}	1234567 (7)	5	5	3	4	6	6	2	3	1	2	3

Table 2. The coloring method of vertex v_j and its incident edges of $K_{11,212}$ when $105 \le j \le 212$

表 2. $K_{11,212}$ 顶点 $v_j\left(105 \le j \le 212\right)$ 及其关联边的染色方案

条件	顶点 v_j 的色集合	顶点 v_j 及其关联边的颜色
$3 \le a \le 7$	{1, *a*, 8}	*a*; 88888888181
$2 \le a < b \le 7$	{*a*, *b*, 8}	*b*; 8888888888*a*
$2 \le a < b \le 7$	{1, *a*, *b*, 8}	*b*; 8888888818*a*
$2 \le a < b < c \le 7$	{*a*, *b*, *c*, 8}	*c*; 88888*a*8888*b*
$2 \le a < b < c \le 7$	{1, *a*, *b*, *c*, 8}	*c*; 88888*a*8188*b*
$2 \le a < b < c < d \le 7$	{*a*, *b*, *c*, *d*, 8}	*d*; 888*ab*8888*ab*
$2 \le a < b < c < d \le 7$	{1, *a*, *b*, *c*, *d*, 8}	*d*; 8888*ab*881*ab*
$2 \le a < b < c < d < e \le 7$	{*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, 8}	*e*; 8*a*88*bc*8888*d*
$2 \le a < b < c < d < e \le 7$	{1, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, 8}	*e*; 8*abc*888881*d*

4. 结语

根据反证法和分析法可以得到，当 $89 \le n \le 212$ 时，用 7 种颜色不能对 $K_{11,212}$ 进行 VDET 染色。因此，当 $89 \le n \le 212$ 时，$\chi_{vt}^{e}\left(K_{11,n}\right) \ge 8$。然后利用构造染色法，说明用 8 种颜色可以对 $K_{11,n}$ 进行点可区别 E-全染色，从而可以得到 $K_{11,212}$ 的 VDET 色数是 8。当 $n \ge 213$ 时，会对 $K_{11,n}$ 的 VDET 色数将继续进行研究。在后续的研究中，可继续利用反证法、结构分析法以及构造染色法等，讨论并给出相应的 VDET 色数，由于这个证明过程较长，此证略。

参考文献

[1] Zhang, Z.F., Qiu, P.X., Li, J.W., *et al*. (2008) Vertex Distinguishing Total Colorings of Graphs. *Ars Combinatoria*, **87**, 33-45.

[2] Chen, X.E., Gao, Y.P. and Yao, B. (2014) Relations of Vertex Distinguishing Total Chromatic Numbers between a Subgraph and Its Supergraph. *Information Sciences*, **288**, 246-253. https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.08.016

[3] 辛小青, 王治文, 陈祥恩, 等. 点不交的 m 个 C_3 的并的点可区别全染色[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2012, 50(2): 251-257.

[4] 陈祥恩, 王治文, 马彦荣, 等. mK_4 的点可区别全染色[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2012, 50(4): 686-692.

[5] Chen, X.E., Zu, Y. and Zhang, Z.F. (2011) Vertex-Distinguishing E-Total Colorings of Graphs. *Arabian Journal for Science and Engineering*, **36**, 1485-1500. https://doi.org/10.1007/s13369-011-0099-8

[6] 包丽娅, 陈祥恩, 王治文. 完全二部图 $K_{10,n}$ $(10 \le n \le 90)$的点可区别 E-全染色[J]. 山东大学学报: 理学版, 2018, 53(12): 23-30.

[7] 陈祥恩, 包丽娅, 王治文. 完全二部图 $K_{10,n}$ $(91 \le n \le 214)$的点可区别 E-全染色[J]. 兰州大学学报: 理学版, 2019, 55(3): 410-414.

[8] 李世玲. 完全二部图的点可区别 E-全染色的若干结果[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2017.

[9] Chen, X.E. (2016) Vertex-Distinguishing E-Total Coloring of Complete Bipartite Graph $K_{7,n}$ When $7 \le n \le 95$. *Communications in Mathematical Research*, **32**, 359-374.

[10] 陈祥恩, 苏丽, 王治文. 完全二部图的一般点可区别全染色[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2016, 54(6): 1289-1293.

[11] 师志凤, 陈祥恩, 王治文. 完全二部图的点可区别 E-全染色[J]. 吉林大学学报: 理学版 2018, 56(4): 845-852.

[12] 陈祥恩, 高毓萍. 合成图的点可区别正常边色数[J]. 吉林大学学报(理学版), 2011, 49(2): 207-212.

[13] 杨芳, 王治文, 陈祥恩, 等. 完全图和星的合成的点可区别正常边染色[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2013, 50(4): 136-143.

[14] Chen, X.E. and Zu, Y. (2011) Vertex-Distinguishing E-Total Coloring of the Graphs mC3 and mC4. *Journal of Mathematical Research Exposition*, **31**, 45-58.

[15] 陈祥恩, 李婷, 王治文. 一类含有 4-圈的单圈图一般点可区别全染色[J]. 大连理工大学学报, 2017, 57(3): 316-320.