Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(4), 610-615
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.124069

Hans汉斯

引力作用下旋转玻色爱因斯坦凝聚的基态

张　萌

上海理工大学，理学院，上海

收稿日期：2022年3月14日；录用日期：2022年4月15日；发布日期：2022年4月22日

摘　要

本文主要讨论二维吸引力作用下带有旋转速度的玻色爱因斯坦凝聚的基态。我们主要利用极大极小方法、Gagliardo-Nirenberg不等式、反磁不等式研究了Gross-Pitaevskii方程在限定条件下基态解的存在性情况。得到了当$-\frac{(a_*)^\sigma}{2}<a<0$方程的基态解是存在的，当$a\le -\frac{(a_*)^\sigma}{2}$时，方程的基态解是不存在的。

关键词

GP方程，Bose-Einstein凝聚，吸引力

Ground State of Rotating Bose Einstein Condensates under Attractive Force

Meng Zhang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 14th, 2022; accepted: Apr. 15th, 2022; published: Apr. 22nd, 2022

Abstract

This paper mainly discusses the ground state of Bose-Einstein condensate with rotational velocity under the action of two-dimensional attraction. We mainly use the minimax method, Gagliardo-Nirenberg inequality and diamagnetic inequality to study the existence of the ground state solution of the Gross-Pitaevskii equation under limited conditions. It is obtained that the ground state solution of the equation exists when $-\frac{(a_*)^\sigma}{2}<a<0$, and the ground state solution of the equation does not exist when $a\le -\frac{(a_*)^\sigma}{2}$.

文章引用: 张萌. 引力作用下旋转玻色爱因斯坦凝聚的基态[J]. 理论数学, 2022, 12(4): 610-615.
DOI: 10.12677/pm.2022.124069

Keywords

GP Equation, Bose-Einstein Condensates, Attractive Force

1. 引言

玻色子具有整体特性，在低温时聚集到能量最低的同一量子态即基态，玻色爱因斯坦凝聚实验说明当温度低于一个临界温度时(这个临界温度通常很接近绝对零度)一堆没有相互作用的玻色子就会慢慢地占据相同的“轨道”，形成一种“凝聚”[1] [2] [3]。通过推导可以得到玻色爱因斯坦凝聚的数学模型，到目前为止比较流行的模型是 Gross-Pitaevskii 方程，对于这个模型可以做“无量纲化”，用合适的空间尺度、时间尺度作单位，得到无量纲化的 Gross-Pitaevskii 方程，它是一个非线性的薛定谔方程[3] [4] [5]。

旋转玻色爱因斯坦凝聚是量子物理中一个很经典的现象。具有引力作用的旋转玻色－爱因斯坦凝聚可以转化为 Gross-Pitaevskii 能量泛函，我们可以类比没有旋转速度时的能量泛函来研究极小值的存在情况。这就将自然现象与泛函分析紧密联系在了一起。泛函分析在解释各种自然现象以及含有微分方程的实际问题中发挥着重要作用[6] [7]。至今为止，有很多研究者对旋转玻色爱因斯坦凝聚做了研究，尤其是引力作用下的玻色爱因斯坦凝聚引起了越来越多人的兴趣。对玻色爱因斯坦凝聚的研究是物理界和数学界的焦点。

本文主要给出了带有旋转速度的 Gross-Pitaevskii 方程在二维引力作用下基态解的存在情况。文章首先给出玻色爱因斯坦凝聚的研究现状及已有的结论，在此基础上给出了本文的主要研究内容，最后针对本文的结果给出了一些展望。

2. 研究现状及已有结论

对于下述方程

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \psi}{\partial t}=-\dfrac{1}{2}\Delta\psi+V(x)\psi+a|\psi|^{2\sigma}\psi-(\Omega\cdot L)\psi, x\in\mathbb{R}^d, t\in\mathbb{R}, \\ \psi(x,0)=\psi_0(x), \end{cases}$$

Arbunich，Nenciu 和 Sparber 在[8]中证明了在次临界条件下，当势函数是调和的，上述方程存在一个唯一的时间相关解。

2014 年 Guo, Y.J.和 Seiringer 在[9]中研究了旋转速度为 0 时具有吸引力作用的玻色爱因斯坦凝聚的能量估计和质量集中。

2014 年 Guo, Y.J.和 Seiringer 在[9]中研究了旋转速度为 0 时具有吸引力作用的玻色爱因斯坦凝聚极值的存在情况。

2020 年 Guo, Y.J., Luo, Y., Yang W.在[10]中研究了二维引力作用下有旋转速度时基态解的存在情况并进一步分析了基态解的渐近行为，同时证明了达到恒定的相位时，所有的极小值点都是实值的，唯一的。

2006 年 Carr, L.D., Clark, C.W.说明了具有吸引力的原子相互作用的玻色-爱因斯坦凝聚物中量子涡旋

的形式和稳定性。在受限几何形状中可以实现稳定和不稳定的状态，从而表明可以在二维吸引凝聚体的实验中观察到涡旋及其径向激发态。

2011 年 Bao, W.Z., Cai, Y.Y.证明了用于描述具有内部原子的玻色-爱因斯坦凝聚体的耦合 Gross-Pitaevskii 方程的基态的存在性和唯一性结果，并获得了具有参数的基态的极限行为。

3. 引力作用下基态解的存在性

本文主要基于物理背景，在此基础上研究数学模型，主要目的是从数学上研究旋转阱中二维吸引力作用下的玻色爱因斯坦凝聚的基态。众所周知，BECs 可以由凝聚态中 Gross-Pitaevskii (GP)方程描述。我们考虑下面带有旋转速度的 Gross-Pitaevskii (GP)方程

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}\Delta \psi + V(x)\psi + a|\psi|^{2\sigma}\psi + i\Omega\left(x^{\perp}\cdot\nabla\psi\right), x\in\mathbb{R}^2, t\in\mathbb{R}, \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

这里 $a\in\mathbb{R}$，$\sigma>0$。$x^{\perp}=(-x_2,x_1)$，另外定义 $(iu,\nabla u)=i(u\nabla\bar{u}-\bar{u}\nabla u)/2$，该问题对应的欧拉拉格朗日方程为

$$\mu u = -\frac{1}{2}\Delta u + V(x)u + i\Omega\left(x^{\perp}\cdot\nabla u\right) + a|u|^{2\sigma}u, x\in\mathbb{R}^2. \tag{2}$$

方程(2)的基态解可以由下列问题描述[8] [11]

$$e_F(a) := \inf_{\left\{\|u\|_2^2=1, u\in\mathcal{H}\right\}} E_a(u), \tag{3}$$

该问题对应的泛函 $E_a(u)$ 被定义为

$$E_a(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2 + \frac{a}{\sigma+1}|u|^{2\sigma+2} - \Omega x^{\perp}\cdot(iu,\nabla u)\mathrm{d}x, \forall u\in\mathcal{H}$$

另外我们定义如下工作空间：

$$\mathcal{H} = \left\{u\in H^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}\right): \int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u|^2\,\mathrm{d}x < \infty\right\},$$

假设 $V(x)$ 满足 $0\le V(x)\in L^2_{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)$ 和

$$\varliminf_{|x|\to\infty}\frac{V(x)}{|x|^2} > 0, \tag{4}$$

另一方面，定义

$$V_\Omega(x) := V(x) - \frac{\Omega^2}{2}|x|^2. \tag{5}$$

且满足下列条件：

(V)：$V_\Omega(x)\ge 0, V_\Omega(x)\le c|x|^q$，当 $|x|\to\infty, q\ge 2$，

在此，我们对临界旋转速度给出限制：

$$\Omega^* := \sup\left\{\Omega>0 : V(x) - \frac{\Omega^2}{2}|x|^2 \to \infty, \text{当}|x|\to\infty\right\}. \tag{6}$$

此外，我们要用到下列 Gagliardo-Nirenberg 不等式：

$$\int_{\mathbb{R}^2}|u(x)|^{2\sigma+2}\,\mathrm{d}x\le\frac{\sigma+1}{(a_*)^{\sigma}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\sigma}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

这里 $0<\sigma<1$。进一步，我们得到 $a_*=\|w\|_2^2$，这里 $w\in H^1(\mathbb{R}^2)$，是下列方程的唯一正解

$$\sigma\Delta w-w+w^{2\sigma+1}=0, \tag{8}$$

进一步研究表明，w 是径向对称的。我们可以记之为 $w=w(|x|)>0$，由[5]的推导，可得 $w=w(|x|)>0$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^2}w^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{\sigma+1}|w|^{2\sigma+2}\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

由[12]，给出本文所需的变形的反磁不等式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\nabla u|^2-\Omega x^{\perp}\cdot(iu,\nabla u)&=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(\nabla-i\mathcal{A})u\right|^2-\frac{\Omega^2}{2}|x|^2|u|^2\\&\ge\frac{1}{2}\left|\nabla|u|^2\right|-\frac{\Omega^2}{2}|x|^2|u|^2,u\in H^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}).\end{aligned} \tag{10}$$

这里 $\mathcal{A}=\Omega x^{\perp}$。

在给出我们的主要结果之前，先给出下列引理：

引理 2.1 [9]：如果 $V(x)\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ 且 $\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x)=\infty$，这里 $2\le q<\infty$，则嵌入 $\mathcal{H}\rightarrowtail L^q(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ 是紧的。

下面给出本文的主要结果：

定理 2.2：假设 $V(x)\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ 满足(4)，且 $0<\sigma<1$，那么我们可以得到

1) 如果 $-\dfrac{(a_*)^{\sigma}}{2}<a<0$，则(3)至少存在一个极小值点，因此问题(2)至少有一个基态解。

2) 如果 $a\le-\dfrac{(a_*)^{\sigma}}{2}$，则(3)不存在极小值点，那么问题(2)就没有基态解。

注意：这里我们只研究旋转速度小于(6)所定义的临界的速度时基态的情况。

证明：1) 首先，我们利用极小极大方法来证明(2)存在基态解。我们通过选取 $u\in\mathcal{H}$ 满足 $\|u\|_2^2=1$，可以得到

$$\begin{aligned}E_a(u)&=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2}|\nabla u|^2+V(x)|u|^2+\frac{a}{\sigma+1}|u|^{2\sigma+2}-\Omega x^{\perp}\cdot(iu,\nabla u)\mathrm{d}x\\&\ge\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2}|\nabla u|^2+V(x)|u|^2+\frac{a}{\sigma+1}|u|^{2\sigma+2}-\frac{\Omega^2}{2}|x|^2|u|^2\,\mathrm{d}x\\&\ge\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2}|\nabla u|^2+V_{\Omega}(x)|u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{a}{(a_*)^{\sigma}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\sigma}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,\mathrm{d}x\\&\ge\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{(a_*)^{\sigma}}\right)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}V_{\Omega}(x)|u|^2\,\mathrm{d}x,\quad u\in\mathcal{H},\end{aligned} \tag{11}$$

这就证明 $E_a(u)$ 是下有界的。这里我们用到了(7)和对 $V(x)$ 的假设。接下来我们需要利用引理 2.1。通过选择最小化序列 $\{u_n\}\subset\mathcal{H}$，使之满足 $\lim\limits_{n\to\infty}E_a(u_n)=e_F(a)$ 和 $\|u_n\|_2^2=1$，从(11)可以看出，因为

$\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{\mathbb{R}^2}V_\Omega(x)|u_n|^2\,\mathrm{d}x$ 关于 n 是一致有界的，进一步可以得到 $\{u_n\}$ 在 $\mathcal{H}$ 中是有界的。因此，我们可以选取一个子列仍记为 $\{u_n\}$，使之在 $\mathcal{H}$ 中 $u_n \rightharpoonup u$，根据引理 2.1，嵌入 $\mathcal{H}\rightarrowtail L^q(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ 是紧的，我们就可以得到在 $L^q(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ 中 $u_n\to u$，对于某些 $u\in\mathcal{H}$。这里 $2\le q<\infty$，进一步得到 $\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,\mathrm{d}x=1$。另一方面，由弱下半连续，我们有 $E_a(u)=e_F(a)$。这表明对于任何 $-\frac{(a_*)^\sigma}{2}<a<0$ 基态解是存在的。

2) 为了证明当 $a\le-\frac{(a_*)^\sigma}{2}$ 时，问题(2)基态解的不存在性，需要选取一个非负的函数 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$，满足 $\varphi(x)=1$ 对于 $|x|\le1$，并分析下列函数

$$w_\tau(x)=A_\tau\frac{\tau^{\frac{1}{\sigma}}}{\|w\|_2}\varphi(x-x_0)w(\tau(x-x_0))\mathrm{e}^{i\Omega S(x)}, \tag{12}$$

这里 $x_0\in\mathbb{R}^d$ 是一个适当的点，$S(x)=\frac{1}{2}x\cdot x_0^\perp$，这里 $A_\tau>0$ 是适当选择的常数，为了满足 $\int_{\mathbb{R}^2}|w_\tau|^2\,\mathrm{d}x=1$。为了方便，我们可以将泛函 $E_a(u)$ 写为下述形式

$$E_a(u):=C_\tau(u)+\int_{\mathbb{R}^2}V_\Omega(x)|u|^2\,\mathrm{d}x,$$

其中

$$C_\tau(u):=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2}|\nabla u|^2-\Omega x^\perp\cdot(iu,\nabla u)+\frac{\Omega^2}{2}|x|^2|u|^2+\frac{a}{\sigma+1}|u|^{2\sigma+2}\,\mathrm{d}x.$$

利用假设(V)，我们选择 $p>0$ 和一个充分小的数 $\mathcal{R}>0$，使得当 $|x|\le\mathcal{R}$ 时，$V_\Omega(x)\le c_0|x|^p$。这里 $V_\Omega(x)$ 由(7)定义。由 $V_\Omega(x)$ 的定义和式(12)，可以得出当 $\tau\to\infty$ 时

$$\int_{\mathbb{R}^2}V_\Omega(x)|w_\tau(x)|^2\,\mathrm{d}x\le\frac{c_0A_\tau^2}{\|w\|_2^2\,\tau^{p+2-\frac{2}{\sigma}}}\int_{\mathbb{R}^2}|x|^p\,w(x)^2\,\mathrm{d}x,$$

所以根据(12)，当 $\tau\to\infty$ 时，有下式成立

$$C_\tau(w_\tau):=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2}|\nabla w_\tau(x)|^2-\Omega x^\perp\cdot(iw_\tau,\nabla w_\tau)+\frac{\Omega^2}{2}|x|^2|w_\tau|^2+\frac{a}{\sigma+1}|w_\tau|^{2\sigma+2}\,\mathrm{d}x,$$

因此，综合上面的式子，我们得出当 $\tau\to\infty$ 时

$$e_F(a)\le\frac{\tau^{\frac{2}{\sigma}}}{(\sigma+1)\|w\|_2^{2\sigma+2}}\left(a+\frac{(a_*)^\sigma}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^2}|w|^{2\sigma+2}\,\mathrm{d}x+\frac{c_0}{\|w\|_2^2\,\tau^{p+2-\frac{2}{\sigma}}}\int_{\mathbb{R}^2}|x|^p\,w^2\mathrm{d}x+\frac{\Omega^2}{2\|w\|_2^2\,\tau^{4-\frac{2}{\sigma}}}\int_{\mathbb{R}^2}|x|^2\,w^2\mathrm{d}x. \tag{13}$$

现在先考虑 $a<-\frac{(a_*)^\sigma}{2}$ 时的情况，(13)说明

$$e_F(a)\le\lim_{\tau\to\infty}E_a(u)=-\infty.$$

所以，由 $e_F(a)$ 的定义，这就证明了基态解是不存在的。

接下来就是要证明当 $a=-\frac{(a_*)^\sigma}{2}$ 时，(2)的基态解不存在。我们采用反证法，假设存在基态解 u，不

失一般性，可以假设 u 为非负的，我们可以得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_\Omega(x)|u|^2 \mathrm{d}x = \inf_{x\in\mathbb{R}^2} V_\Omega(x),$$

以及

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma+1}\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x.$$

这两个结果。从第一个式子，我们可以看出 u 必须具有紧支集。对于第二个式子，u 必须和 w 是等价的。显然，这是矛盾的。所以，我们可以得出，在 $a \le -\frac{(a_*)^\sigma}{2}$ 时问题(2)没有基态解。

至此定理 2.2 已经证明完成。

4. 结论

本文对二维引力作用下的玻色爱因斯坦凝聚做了研究，通过对比没有旋转速度时基态解的存在性情况，给出了次临界情况下有旋转速度时，基态解的存在情况。本文主要利用了 GN 不等式、反磁不等式，以及序列的弱紧性定理等。这些不等式在我们的证明过程中都发挥了重要的作用。我们希望这个结果能对求解多维引力作用下的玻色爱因斯坦凝聚基态解提供一个新的思路，在多维的情况下是否有类似的结论以及基态解具有哪些性质是下一步要研究的课题。

参考文献

[1] Abo-Shaeer, J.R., Raman, C., Vogels, J.M. and Ketterle, W. (2001) Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensate. *Science*, **292**, 476-479. https://doi.org/10.1126/science.1060182

[2] Bloch, I., Dalibard, J. and Zwerger, W. (2008) Many-Body Physics with Ultracold Gases. *Reviews of Modern Physics*, **80**, 885-964. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.885

[3] Fetter, A.L. (2009) Rotating Trapped Bose-Einstein Condensates. *Reviews of Modern Physics*, **81**, 647-691. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.647

[4] Bellazzini, J., Georgiev, V. and Visciglia, N. (2018) Long Time Dynamics for Semi-Relativistic NLS and Half Wave in Arbitrary Dimension. *Mathematische Annalen*, **2371**, 707-740. https://doi.org/10.1007/s00208-018-1666-z

[5] Cazenave, T. (2003) Semilinear Schrödinger Equations. American Mathematical Society, New York, 257-258. https://doi.org/10.1090/cln/010

[6] Correggi, M. and Rougerie, N. (2016) Boundary Behavior of the Ginzburg-Landau Order Parameter in the Surface Superconductivity Regime. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **219**, 553-606. https://doi.org/10.1007/s00205-015-0900-z

[7] Dalfovo, F., Giorgini, S., Pitaevskii, L.P. and Stringari, S. (1999) Theory of Bose-Einstein Condensation in Trapped Gases. *Reviews of Modern Physics*, **71**, 463-512. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.71.463

[8] Arbunich, J., Nenciu, I. and Sparber, C. (2019) Stability and Instability Properties of Rotating Bose-Einstein Condensates. *Letters in Mathematical Physics*, **109**, 1415-1432. https://doi.org/10.1007/s11005-018-01149-5

[9] Guo, Y.J. and Seiringer, R. (2014) On the Mass Concentration for Bose-Einstein Condensates with Attractive Interactions. *Letters in Mathematical Physics*, **104**, 141-156. https://doi.org/10.1007/s11005-013-0667-9

[10] Guo, Y.J., Luo, Y. and Yang, W. (2020) The Nonexistence of Votices for Rotating Bose-Einstein Condensates with Attractive Interactions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **238**, 1231-1246. https://doi.org/10.1007/s00205-020-01564-w

[11] Bao, W.Z. and Cai, Y.Y. (2011) Ground States of Two-Component Bose-Einstein Condensates with an Internal Atomic Josephson Junction. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, **1**, 49-81. https://doi.org/10.4208/eajam.190310.170510a

[12] Lieb, E.H. and Loss, M. (2001) Analysis. Second Edition, American Mathematical Society, New York, 175-177.