Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(5), 683-686
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.125078

非自治动力系统的多重传递集

周小凯

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2022年4月9日；录用日期：2022年5月10日；发布日期：2022年5月17日

摘　要

基于非自治离散动力系统之间的相互作用，本文主要研究了两个共轭的非自治动力系统$(X, f_{1,\infty})$和$(Y, g_{1,\infty})$之间的关系。本文首先介绍了非自治动力系统的一些基本概念，主要包括弱混合集、传递集和多重传递集。然后，我们证明了如果A是$(X, f_{1,\infty})$的多重传递集，则$h(A)$是$(Y, g_{1,\infty})$的多重传递集。我们把非自治动力系统$(X, f_{1,\infty})$的传递集推广到系统$(X, f_{1,\infty})$的多重传递集。

关键词

多重传递集，动力系统，弱混合集

Multi-Transitivity Set for Nonautonomous Dynamical Systems

Xiaokai Zhou

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 9th, 2022; accepted: May 10th, 2022; published: May 17th, 2022

Abstract

Based on the interaction between nonautonomous discrete dynamical systems, this paper mainly studies the relationship between two conjugated nonautonomous dynamical systems $(X, f_{1,\infty})$ and $(Y, g_{1,\infty})$. We firstly introduced some basic concepts of nonautonomous dynamical systems, mainly including weakly mixed sets, transitive sets, and multi-transitive sets. Then, we proved that if A is a multi-transitive set of $(X, f_{1,\infty})$, then $h(A)$ is a multi-transitive set of $(Y, g_{1,\infty})$. We

文章引用: 周小凯. 非自治动力系统的多重传递集[J]. 理论数学, 2022, 12(5): 683-686.
DOI: 10.12677/pm.2022.125078

generalized the transitive set of nonautonomous dynamical system $(X, f_{1,\infty})$ to the fact that system $(X, f_{1,\infty})$ is a multi-transitive set.

Keywords

Multi-Transitivity Set, Dynamical Systems, Weakly Mixing Set

1. 引言

设(X,d)是一个度量空间，连续自映射 $f_i : X \to X, i \in \mathbb{N}$，记序列$\{f_i\}_{i=1}^{\infty} = f_{1,\infty}$，对于任意的$x \in X$，点 x 的轨迹由序列 $x, f_1(x), f_1^2(x), \cdots, f_1^n(x), \cdots$ 表示，记作 tra(x)，其中：

$$f_1^n = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$$

并且对任意的 $f_i \in f_{1,\infty}$，当 $n = 0$ 时，$f_i^0 = id$，这是 $f_{1,\infty}$ 为 X 上的一个非自治系统，记作$(X, f_{1,\infty})$。记 tra(x)构成的集合为$orb(x)$，称为$(X, f_{1,\infty})$的轨道。对任意的 $f_i \in f_{1,\infty}$，任意的正整数 n，记

$$f_i^n = f_{i+n-1} \circ f_{i+n-2} \circ \cdots \circ f_{i+1} \circ f_i.$$

对于一个动力系统(X, f)，如果$U,V \subset X$，定义回复时间集为[1]

$$N_f(U,V) := \{n \in \mathbb{N} : U \cap f^{-n}(V) \neq \varnothing\}.$$

我们称系统(X, f)或f是传递的，如果对X的任意两个非空开子集U,V，回复时间集 $N_f(U,V)$ 非空；我们称系统(X, f)是弱混合的，如果乘积系统$(X \times X, f \times f)$是传递的；我们称系统(X, f)是强混合的，如果对 X 的任意两个非空开子集U,V，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得$\{N, N+1, \cdots\} \subset N_f(U,V)$。Furstenberg [2]证明了对每个正整数 n，系统(X, f)是弱混合的意味着 n 次乘积系统$(X^n, f^{(n)})$是传递的。即：设(X, f)是一个拓扑动力系统，若$(X \times X, f \times f)$是传递的当且仅当对每个$n \in \mathbb{N}$，乘积系统$(X^n, f^{(n)})$ (n 次)也是传递的，其中 $X^n := X \times \cdots \times X$ (n 次)，$f^{(n)} := f \times \cdots \times f$ (n 次)。

Liu 和 Sun [3]研究了非自治动力系统的弱混合集和传递集的基本性质，并证明如果 A 是$(X, f_{1,\infty})$的传递集，则 $h(A)$ 是$(Y, g_{1,\infty})$的传递集；如果 A 是$(X, f_{1,\infty})$的弱混合集，则 $h(A)$ 是$(Y, g_{1,\infty})$的弱混合集。其中 A 是 X 的非空闭子集，$h(A)$ 是 Y 的非空闭子集。Mohammad Salman 和 Ruchi Das [4]研究了非自治动力系统的多重传递性得到如下结论：如果$(X, f_{1,\infty})$是多重传递的，则$(Y, g_{1,\infty})$也是多重传递的。通过刘磊等人研究非自治动力系统的传递集的方法研究系统的多重传递集的性质，这值得我们思考。我们根据非自治动力系统的多重传递性，我们可以得到如果 A 是$(X, f_{1,\infty})$的多重传递集，则 $h(A)$ 是$(Y, g_{1,\infty})$的多重传递集。

目前，动力系统的研究非常活跃。Chen 等[5]研究关于向量的动力系统多重传递性。Francisco Balibrea 和 Piotr Oprochay 等[6]研究了非自治动力系统中的弱混合和混沌。Huang 等[7]给出动力系统局部 Δ-弱混合集的概念以及有关重要结论。

本文主要分为以下几个部分。第一部分介绍了国内外研究现状和本文的研究动机。第二部分介绍一些基本概念和主要结果。第三部分是主要定理的证明。

2. 预备知识

设(X,f)和(Y,g)为两个共轭系统，二者的乘积系统$(X\times Y,f\times g)$定义如下：

$$f\times g(x,y)=(f(x),g(y)),\quad \forall x\in X,y\in Y.$$

类似地，我们可以定义任何多重系统的乘积系统。对于有限的乘积系统，我们把 n 重的乘积系统$(X\times\cdots\times X,f\times\cdots\times f)$记作$(X^n,f^{(n)})$。设$(X,f)$和$(Y,g)$为两个系统，连续映射$\pi:X\to Y$称为同态或者因子映射，是指其为满射并且$\pi\circ f=g\circ\pi$。此时我们称$(X,f)$为$(Y,g)$的扩充，而称$(Y,g)$为$(X,f)$的因子。

定义 2.1 设$(X,f_{1,\infty})$是非自治离散动力系统，A是X的非空闭子集。我们称A是$(X,f_{1,\infty})$的传递集，是指对任意的A的非空开子集V^A，以及X的非空开集U，且$A\cap U\neq\varnothing$，存在$l\in\mathbb{N}$使得

$$f_1^l(V^A)\cap U\neq\varnothing.$$

定义 2.2 设$(X,f_{1,\infty})$是非自治离散动力系统，A是X的非空闭子集。我们称A是$(X,f_{1,\infty})$的弱混合集，是指对任意的A非空开集$V_1^A,\cdots,V_m^A$，以及X的非空开集$U_1,\cdots,U_m$且$A\cap U_j\neq\varnothing$，存在$l\in\mathbb{N}$使得对任意的$m\in\mathbb{N}$，以及每个$j\in\{1,\cdots,m\}$，有

$$f_1^l(V_j^A)\cap U_j\neq\varnothing.$$

定义 2.3 对于一个动力系统$(X,f_{1,\infty})$。我们称$(X,f_{1,\infty})$是多重传递的，是指对任意的$m\in\mathbb{N}$，$f_{1,\infty}\times f_{1,\infty}^{[2]}\times\cdots\times f_{1,\infty}^{[m]}:X^m\to X^m$是拓扑传递的。也就是说，对于$X$的非空开集$U_1,\cdots,U_m,V_1,\cdots,V_m$的集合，存在$l\in\mathbb{N}$使得对任意的$m\in\mathbb{N}$，以及每个$j\in\{1,\cdots,m\}$，有

$$f_1^{jl}(U_j)\cap V_j\neq\varnothing.$$

定义 2.4 设$(X,f_{1,\infty})$是非自治离散动力系统，A是X的非空闭子集。我们称A是$(X,f_{1,\infty})$的多重传递集，是指对任意的A非空开集$V_1^A,\cdots,V_m^A$，以及X的非空开集$U_1,\cdots,U_m$且$A\cap U_j\neq\varnothing$，存在$l\in\mathbb{N}$使得对任意的$m\in\mathbb{N}$，以及每个$j\in\{1,\cdots,m\}$，有

$$f_1^{jl}(V_j^A)\cap U_j\neq\varnothing.$$

我们由非自治离散动力系统的混合性和传递性的定义容易得到下述蕴含关系：

拓扑混合$\Rightarrow$多重传递的$\Rightarrow$完全传递的。

3. 主要定理的证明

定理 3.1 设$(X,f_{1,\infty})$和$(Y,g_{1,\infty})$是两个非自治离散动力系统。设$h:X\to Y$是半共轭映射，A是X的非空闭子集和$h(A)$是Y的非空闭子集。如果A是$(X,f_{1,\infty})$的多重传递集，则$h(A)$是$(Y,g_{1,\infty})$的多重传递集。

证明定理 3.1：设$V_1^{h(A)},\cdots,V_m^{h(A)}$是$h(A)$的非空闭子集，$U_1,\cdots,U_m$是$Y$的非空闭子集且$h(A)\cap U_j\neq\varnothing,1\le j\le m$。由于$h(A)$是$Y$的子空间，存在$Y$的开集$V_1,\cdots,V_m$，使得$V_j^{h(A)}=V_j\cap h(A),1\le j\le m$。而且对于$1\le j\le m$，有

$$A\cap h^{-1}(V_j^{h(A)})=A\cap h^{-1}(V_j\cap h(A))=A\cap h^{-1}(V_j).$$

因此 $A\bigcap h^{-1}\left(V_j^{h(A)}\right)$ 是 A 的开子集。

对 $1\le j\le m$，由于 $h\left(A\bigcap h^{-1}\left(V_j^{h(A)}\right)\right)=h(A)\bigcap V_j^{h(A)}\ne\varnothing$，于是对 $1\le j\le m$，我们有

$$A\bigcap h^{-1}\left(V_j^{h(A)}\right)\ne\varnothing.$$

因此，对 $1\le j\le m$，有 $U_j\bigcap h(A)\ne\varnothing$，这表明对于 $1\le j\le m$，$h\left(U_j\right)\bigcap A\ne\varnothing$。

由于 h 是半共轭映射，即对每个 $n\in\mathbb{N}$，有 $h\circ f_n=g_n\circ h$。对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，我们有 $f_n\circ h^{-1}=h^{-1}\circ g_n$，我们可以得到

$$f_1^{jl}\left(h^{-1}\right)=f_{jl}\circ f_{jl-1}\circ f_1\circ h^{-1}=f_{jl}\circ f_{jl-1}\circ f_2\circ h^{-1}\circ g_1=\cdots=h^{-1}\circ g_{jl}\circ g_{jl-1}\circ g_1=h^{-1}\left(g_1^{jl}\right),$$

即 $h^{-1}\left(g_1^{jl}\right)^{-1}=\left(f_1^{jl}\right)^{-1}\left(h^{-1}\right)$。因此，对 $1\le j\le m$，我们有

$$h^{-1}\left(\left(g_1^{jl}\right)^{-1}\left(U_j\right)\right)\bigcap h^{-1}\left(V_j^{h(A)}\right)\ne\varnothing,$$

这表明 $h^{-1}\left(V_j^{h(A)}\bigcap\left(g_1^{jl}\right)^{-1}\left(U_j\right)\right)\ne\varnothing$ 当且仅当对 $1\le j\le m$，$V_j^{h(A)}\bigcap\left(g_1^{jl}\right)^{-1}\left(U_j\right)\ne\varnothing$。

这就证明了 $h(A)$ 是 $\left(Y,g_{1,\infty}\right)$ 的多重传递集。

参考文献

[1] 叶向东, 黄文, 邵松. 拓扑动力系统概论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[2] Furstenberg, H. (1967) Disjointness in Ergodic Theory, Minimal Sets, and a Problem in Diophantine Approximation. *Mathematical Systems Theory*, **1**, 1-49. https://doi.org/10.1007/BF01692494

[3] Liu, L. and Sun, Y. (2014) Weakly Mixing Sets and Transitive Sets for Non-Autonomous Discrete Systems. *Advances in Difference Equations*, **2014**, Article No. 217. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-217

[4] Salman, M. and Das, R. (2020) Multi-Transitivity in Non-Autonomous Discrete Systems. Topology and Its Applications, **278**, Article No. 107237. https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107237

[5] Chen, Z.J., Li, J. and Lü, J. (2014) On Multi-Transitivity with Respect to a Vector. *Science China Mathematics*, **57**, 1639-1648. https://doi.org/10.1007/s11425-014-4797-z

[6] Balibrea, F. and Oprocha, P. (2012) Weak Mixing and Chaos in Nonautonomous Discrete Systems. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 1135-1141. https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.02.021

[7] Huang, W., Li, J., Ye, X., *et al*. (2017) Positive Topological Entropy and Δ-Weakly Mixing Sets. *Advances in Mathematics*, **306**, 653-683. https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.10.029