Pure Mathematics **理论数学, 2022, 12(5), 723-738**
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.125083

Hans汉斯

行列式计算的若干方法

李婉菁，陈敏风*

广东外语外贸大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2022年4月12日；录用日期：2022年5月13日；发布日期：2022年5月20日

摘　要

行列式是高等代数课程中的一个基本概念，是探讨线性方程组的重要工具之一。行列式计算方法灵活多样，其计算要依据行列式的特点选取恰当的方法。本文通过对行列式的定义及性质的研究，探讨了具体型行列式及抽象型行列式的若干计算方法，如加边法、拆项法、析因子法，并通过具体例题分析这些方法的应用，为后续的学习提供更加全面的指引与参考。

关键词

行列式，具体型行列式，抽象型行列式，计算方法

Some Methods of Calculating the Determinant

Wanjing Li, Mingfeng Chen*

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: Apr. 12th, 2022; accepted: May 13th, 2022; published: May 20th, 2022

Abstract

Determinant is a basic concept in advanced algebra course and one of the important tools to explore linear equations. The determinant calculation method is flexible and diverse, and the calculation should choose the appropriate method according to the characteristics of the determinant. Through the study of the definition and nature of determinant, this paper discusses some calculation methods of concrete determinant and abstract determinant, such as edge addition method, dissolving method, factor analysis method, and analyzes the application of these methods through specific examples, so as to provide more comprehensive guidance and reference for the follow-up study.

*通讯作者。

文章引用: 李婉菁, 陈敏风. 行列式计算的若干方法[J]. 理论数学, 2022, 12(5): 723-738.
DOI: 10.12677/pm.2022.125083

Keywords

Determinant, Specific Determinant, Abstract Determinant, Calculation Method

1. 引言

行列式是高等代数课程中的一个基本概念，其计算是高等代数学习中的重要内容。行列式也是一个重要的数学工具，在线性代数、多项式理论以及微积分学中有着重要的应用。它可以用于判断空间几何中的两直线关系，也可以判断方程组解。行列式的计算在不同学科领域也有重要应用，学习行列式的计算，有助于构建数学知识体系。根据行列式元素的特点，可以将行列式划分成具体型行列式和抽象型行列式。具体型行列式的计算方法灵活多变，在《高等代数》[1]中就介绍了定义法、化三角法、范德蒙德行列式法等方法。在吕淑君[2]的研究中，根据行列式行列的特点，总结了滚动消去法及逐项相加减法。此外，张莹[3]还总结了拉普拉斯定理法及特征根法。在行列式计算过程中需要根据不同行列式的特点选择适当的方法，这对解题技巧有较高要求。抽象型行列式的计算需要结合方阵、伴随矩阵等相关知识，对公式的灵活运用有较高要求，在王建红[4]的研究中就对抽象行列式的计算技巧进行了归纳总结。本文基于行列式的定义及性质，对行列式的计算进行更深入的探讨，以便读者更好地掌握其计算方法与技巧，为后续的学习提供更加全面的指引与参考。

2. 具体型行列式的计算方法

2.1. 定义法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

由定义可知，行列式的展开是 $n!$ 项的代数和。因此，由定义法计算高阶的行列式是非常麻烦的。定义法适用于计算低阶行列式 $(n \le 3)$ 或零元素较多的行列式。

例 2.1 计算行列式[1]：

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解析：这是一个 n 阶行列式，虽然行列式阶数高，但观察可知，此行列式的零元素非常多，非零元素为 n 个。因此，各项乘积为非零项的只有一项 $a_{1n}a_{21}a_{32}\cdots a_{n,n-1}$。

而

$$\tau\left(n\times 1\times\cdots\times(n-1)\right)=n+1.$$

故

$$D_n=(-1)^{n+1}\times n\times 1\times\cdots\times(n-1)=(-1)^{n+1}\times n!.$$

注意：定义法是《高等代数》[1]中最基本的方法，对于高阶行列式而言，其展开式所含项太多，当高阶行列式中的元素大多数为零元素或者是低阶行列式$(n\le 3)$，才考虑使用定义法。

2.2. 化三角法

2.2.1. 主对角线行列式(上(下)三角形行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

2.2.2. 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

化三角法是行列式计算的基本方法之一，利用化三角法计算行列式时，行列式本身不一定满足对角线形式，通常需要结合行列式的性质及行列式的特征，对行列式进行适当变换，化为主(副)对角线形式。通常根据行列式元素排列及行列的规律，将首行首列元素化为 1，以首行首列元素为基准，通过对其它行(列)做“倍乘”、“倍加”等变换，最后化为主(副)对角线形式。使用化三角法的目的是将行列式转化为对角线形式的计算，从而达到简化计算的效果。

例 2.2 计算 n 阶行列式[1]：

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解析：首先观察该行列式的元素排列规律：每一行(列)都由两个元素 a,b 组成，且每行(列)之和都相等。因为 a,b 可能为零，所以不能直接化首行首列元素为 1。因为每行之和相等，因此，可以将第 $2,3,\cdots,n$ 列元素都加到第 1 列，然后通过提取公因子，将第一行(列)的所有元素化为 1，再进一步通过变换，将行列式化为三角形行列式。

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

提取公因式后，行列式第一行为特殊行，其它行与第一行有$(n-1)$个相同元素。因此，其它各行与第一行相减，将每行化简为只含一个非零元素，可得

$$D_n=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

注意：化三角形行列式时，若各行(列)之间存在特殊关系，如比例关系，则可将各行(列)与特殊行(列)做变换化为三角形行列式。若无特殊行(列)，各行(列)之间无特殊关系，则观察是否具有行(列)之和相等的性质，若具有该性质，则可将所有元素都加到某一行(列)，再提出公因子，使该行(列)元素全化为 1，从而再进一步对行列式变换化为三角形行列式。

2.3. 降阶法

降阶法是指通过行列式的变换，降低行列式阶数，将高阶行列式降为低阶行列式再计算。降阶法的思路是通过对行列式的某行(列)作变换，使该行(列)的大多数非零元素化为零元素，再根据行列式的展开定理，将该行(列)展开，使行列式降阶。行列式每展开一次，行列式的阶数便降低一阶，直至行列式化简为能直接计算出来为止。当行列式的某行(列)的零元素较多时，考虑将该行(列)展开。除此之外，也可以将矩阵分块，利用拉普拉斯展开式计算。

2.3.1. 行列式展开定理

按行展开：$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n)$.

按列展开：$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,\cdots,n)$.

例 2.3 计算 n 阶行列式[1]

$$D_n=\begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}.$$

解析：该行列式的特点是：每行(列)只有两个非零元素，其余都为零元素，因此考虑行列式按某一行(列)展开。

按第一列展开，得

$$D_n=a\begin{vmatrix}a & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & b\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b & 0\\ 0 & 0 & \cdots & a & b\end{vmatrix}_{n-1}.$$

行列式按第一列展开后，可得两个上、下三角行列式，因此：

$$D_n=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

2.3.2. 拉普拉斯定理

拉普拉斯定理的基本思路是将高阶矩阵分块，利用行列式的性质，将行列式转换为适用拉普拉斯定理的形式，再用拉普拉斯展开公式计算行列式。

1) 设 A 为 m 阶矩阵，B 为 n 阶矩阵，则

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B| .$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B| .$$

2) 设 A 为 n 阶方阵，D 为 m 阶方阵，则

当 A 可逆时，有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\left|D - CA^{-1}B\right| .$$

当 D 可逆时，有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D|\left|A - BD^{-1}C\right| .$$

例 2.4 计算行列式[5]

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} .$$

解析：该行列式零元素与非零元素个数相同，且零元素与非零元素位置排列呈现规律性。故，可以结合行列式的性质，变换行列式元素排列形式，再利用拉普拉斯展开式计算。

首先将第二、四列互换，再将第二、四行互换，可得：

$$D_4 = (-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\times(-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} .$$

此时行列式可以利用拉普拉斯展开式计算：

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3) = a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4 - a_1a_4b_2b_3 - b_1b_4a_2a_3 .$$

注意：降阶法也是行列式计算的基本方法之一，当计算过程中行列式某行(列)的零元素较多，就可以考虑采用降阶法。该方法的应用通常结合行列式的其它计算方法，如**拆分法**、**加边法**等。

2.4. 加边法

加边法是指在不改变行列式的值的前提下，为行列式增加一特殊行(列)，再计算行列式的方法。对于一些不适合作“倍乘”、“倍加”、“倍减”运算的行列式，考虑使用加边法。在贾凌云[6]、于雪和张秋生[7]的研究中，总结了四类适用加边法的行列式的特点：主对角线的元素相同，其它元素也相同；主对角线的元素各不相同，其它行(列)的元素都相同；主对角线的元素各不相同，其它同行(列)元素相同；主对角线上元素各不相同，其它同行(列)元素不相同但是有公因子。

添加行(列)的方式可分为首行首列、首行末列、末行首列、末行末列。通常是添加首行首列，新增的行和列，需要首行首列元素为 1，添加的行(列)的其它元素，根据原行列式元素的规律性，选择合适的元素填入，通常是填入每行(列)相同的元素，添加的列(行)的其他元素全为零。

例 2.5 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x_n \end{vmatrix}.$$

其中 $x_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$ 。

解析：该行列式的特点是主对角线上元素两两不相同，每行对应位置元素相同。因此可以考虑增加一行一列，将行列式中许多元素化为零，转换为熟悉的行列式形式进行计算。

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x_n \end{vmatrix}_{n+1}.$$

该行列式第一行为特殊行，与其余各行有 $(n-2)$ 个相同元素。因此，其余各行与第一行作差，可得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}_{n+1}.$$

因 $x_i\neq 0\,(i=1,2,\cdots,n)$，通过加边法，行列式增加了一个特殊列，所以将行列式的第二列的 $\frac{1}{x_1}$ 加到第一列，第三列的 $\frac{1}{x_2}$ 加到第一列…第 $n+1$ 列的 $\frac{1}{x_n}$ 加到第一列，可将行列式化简为上三角行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i}\right)x_1x_2\cdots x_n.$$

注意：加边法的目的是在不改变行列式的值的前提下，给行列式增加特殊行(列)，这样可以将行列式中大多数元素化为零元素，使行列式计算更加简单。

2.5. 拆分法

若行列式的某行(列)元素等价于两个及以上的数求和，则可以用多位数相加的形式表示原元素，再利用行列式的性质，将原行列式拆分为多个行列式相加。若行列式某些元素不具备这种形式，也可以将其拆成两项之和，其中一项为零元素即可。拆分法可以分为大拆分法和小拆分法。大拆分法即每行(列)元素都拆成两项或多项之和，小拆分法只拆分行列式的某一行(列)。

例 2.6 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

方法一：大拆分法

解析：该行列式每一元素都可以由两个数之和表示，因此，将行列式所有元素都拆成两项之和，并使拆分后的两项元素与原行列式元素相关。可得

$$D_n=\begin{vmatrix} b+(a-b) & b+0 & b+0 & \cdots & b+0 \\ b+0 & b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0 \\ b+0 & b+0 & b+(a-b) & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b+0 & b+0 & b+0 & \cdots & b+(a-b) \end{vmatrix}.$$

n阶行列式拆开后可得 2^n 个行列式，其中，第 i 行元素要么为 $(b,b,\cdots,b)$，要么为 $(0,\cdots,0,a-b,0,\cdots,0)$。由行列式的性质可知，若有两行元素都是 $(b,b,\cdots,b)$，该行列式值为零。所以，虽然原行列式拆开可得 2^n 个行列式，但不为零的行列式只有两类：一类是每一行都取 $(0,\cdots,0,a-b,0,\cdots,0)$，即为

$$\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=(a-b)^n.$$

另一类是只有一行取 $(b,b,\cdots,b)$，其它行全取 $(0,\cdots,0,a-b,0,\cdots,0)$，这样的行列式有 n 个，且每个行列式的值都相同，即

$$\begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=b(a-b)^{n-1}.$$

所以

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=nb(a-b)^{n-1}+(a-b)^n=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

注意：用两个元素相加表示原元素的方式很多，关键是需要根据行列式的特征选择恰当的拆分方式。此题元素 a 也可以拆分为 $a+0$，元素 b 拆为 $a+(b-a)$。但因元素 a 的位置排列有规律性，按照题中拆分的方式计算会更便捷。

方法二：小拆分法

对 D_n 的第一行使用拆分法，可得：

$$D_n=\begin{vmatrix} b+(a-b) & b+0 & b+0 & \cdots & b+0 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

拆分后可得两个常见行列式，对行列式的特殊行展开并运算，可得：

$$D_n=(a-b)D_{n-1}+\begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=(a-b)D_{n-1}+b(a-b)^{n-1}.$$

当 $a\neq b$ 时，有

$$\frac{D_n}{(a-b)^n}=\frac{D_{n-1}}{(a-b)^{n-1}}+\frac{b}{a-b}.$$

说明 $\left\{\frac{D_n}{(a-b)^n}\right\}$ 是一个等差数列，$D_1=a-b$，所以

$$\frac{D_n}{(a-b)^n}=\frac{D_1}{a-b}+\frac{(n-1)b}{a-b}=\frac{a+(n-1)b}{a-b}.$$

即有

$$D_n=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

上式对 $a=b$ 也成立。

注意：无论是大拆分法还是小拆分法，拆出的两项元素要么与行列式元素相关，要么为零元素。虽然大拆分法拆开得到 2^n 个行列式，看似运算量增大，但结合行列式的性质，最后只会保留不为零的行列式。使用拆分法的目的是把特殊型行列式转化为熟悉的行列式，通常转化为三角形行列式或行列具有特殊规律的行列式，如行、列和相等的行列式，有时也会结合**递推法**。当行列式的某行(列)元素能明显地表示为两项元素相加时，优先考虑拆分法。

2.6. 递推法

递推法即利用行列式的性质，通过降阶，找出 D_n 与 $D_{n-1},D_{n-2},\cdots$ 之间的关系，再利用递推关系式求出行列式的值。其中，D_n 与 D_{n-1} 要有完全相同的元素分布规律。

例 2.7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解析：该行列式的特点是：第一列元素按次序排列，行列式第一列外的每行(列)元素呈循环性排列，D_n 与 D_{n-1} 有完全相同的元素分布规律，考虑递推法。

按第 n 行展开，得

$$D_n=a_n\times(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}_{n-1}+x(-1)^{n+n}D_{n-1}=a_n(-1)^{n+1}\times 1^{n-1}+xD_{n-1}=-a_n+xD_{n-1}.$$

按递推关系式 $D_n=-a_n+xD_{n-1}$，有

$$\begin{aligned}D_n&=-a_n+xD_{n-1}\\&=-a_n+x\left(-a_{n-1}+xD_{n-2}\right)\\&=a_n-a_{n-1}x+x^2\left(-a_{n-2}+xD_{n-3}\right)\\&=\cdots\\&=a_n-a_{n-1}x-a_{n-2}x^2+\cdots+x^{n-2}\left(-a_2+xD_1\right)\\&=a_n-a_{n-1}x-a_{n-2}x^2-\cdots-a_1x^{n-1}.\end{aligned}$$

2.7. 数学归纳法

数学归纳法一般适用于结论已知的行列式的证明。在用数学归纳法计算或证明行列式的值时，首先要计算 $n=1$ 或 $n=2$ 的行列式，找出一般规律，归纳出行列式的结论，再假设 $n<k$ 或 $n=k$ 时行列式结论成立，最后利用假设的结论，证明 $n=k$ 或 $n=k+1$ 时结论也成立。

例 2.8 证明行列式[1]

$$D_n=\begin{vmatrix}\cos a&1&0&\cdots&0&0\\1&2\cos a&1&\cdots&0&0\\0&1&2\cos a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2\cos a&1\\0&0&0&\cdots&1&2\cos a\end{vmatrix}=\cos na.$$

解析：利用数学归纳法：$n=1$ 时，$D_1=\cos a$，显然成立。$n=2$ 时，

$D_2=\begin{vmatrix}\cos a&1\\1&2\cos a\end{vmatrix}=2\cos^2 a-1=\cos 2a$，命题成立。

假设 $n<k$ 时，命题成立。

考虑 $n=k$ 时，按 D_k 的最后一行展开，得

$$D_k=\begin{vmatrix}\cos a&1&0&\cdots&0&0\\1&2\cos a&1&\cdots&0&0\\0&1&2\cos a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2\cos a&1\\0&0&0&\cdots&1&2\cos a\end{vmatrix}=2\cos aD_{k-1}-D_{k-2}.$$

利用归纳假设可知，

$$D_{k-1}=\cos\left(k-1\right)a,\ D_{k-2}=\cos\left(k-2\right)a,$$

代入 D_k 便有

$$D_k=2\cos a\cos\left(k-1\right)a-\cos\left(k-2\right)a=\left[\cos ka+\cos\left(k-2\right)a\right]-\cos\left(n-2\right)a=\cos na.$$

因此，命题对任何正整数 n 均成立。

2.8. 范德蒙德行列式法

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}\left(x_j-x_j\right),n\ge 2.$$

例 2.9 已知 $n \geq 2$，计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a+x_1^2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+x_1^n & a+x_2^n & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}.$$

解析：该行列式元素不成比例，且行列式的每一项的次数不同，零元素较少，因此不考虑通过行列式展开“倍乘”、“倍加”等变换。如果行列式中所有项都不含元素 a，则可以利用范德蒙德行列式计算。考虑加边法，为行列式增加特殊行(列)。

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ 0 & a+x_1^2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a+x_1^n & a+x_2^n & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}_{n+1}.$$

第一行为新增得特殊行，其它各行减去第一行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ 0 & a+x_1^2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a+x_1^n & a+x_2^n & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

对行列式第一列使用拆分法，将首行首列的元素 1 拆为 $-a+(1+a)$，第一列其余元素−1 拆为 $-1+0$，得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a+(1+a) & a & a & \cdots & a \\ -1+0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1+0 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1+0 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -a & a & a & \cdots & a \\ -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ &= -a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + (1+a) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ &= -a\prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j) + (1+a)\prod_{k=1}^{n}x_k\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j) \\ &= \left[(1+a)\prod_{k=1}^{n}x_k - a\prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\right]\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j). \end{aligned}$$

注意：本题综合了加边法、拆分法及范德蒙行列式法。当行列式形似范德蒙行列式，但缺少某行或者某列时，可以通过**加边法**，将行列式构造为范德蒙行列式形式再计算。

2.9. 析因子法

如果行列式中的大部分元素是数字或字母，而某些元素是变量 x 的多项式，那么可以用多项式 $f(x)$ 表示该行列式。当变量 x 取某特定值时，$f(x)$ 等于零，则可以得到 $f(x)$ 的因式。结合多项式理论，将 $f(x)$ 表示为这些一次因式与未知常数的乘积，再利用待定系数法，求出未知常数的值。如果变量 x 所在的行(列)的其余元素与其它任一行(列)对应元素成比例或相等，则可考虑利用析因子法求解。

例 2.10 计算行列式[8]

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&14-x^2\end{vmatrix}.$$

解析：该行列式含有变量 x，且含有变量的行(列)的其它元素与其它行(列)对应的元素相等，因此，考虑用析因子法。

$$f(1)=f(-1)=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&1&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&14-x^2\end{vmatrix}=0,$$

$$f(3)=f(-3)=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&5\end{vmatrix}=0.$$

由上可知，$f(x)$ 有因式 $(x+1)$、$(x-1)$、$(x+3)$、$(x-3)$，且 $f(x)$ 最高次数为 4。因此，有 $f(x)=k(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)=k(x^2-1)(x^2-9)$。

由原行列式可知，含 x^4 的项为 $(2-x^2)(14-x^2)$ 及 $-4(2-x^2)(14-x^2)$。由待定系数法可得，$k=-3$。$f(x)=-3(x^2-1)(x^2-9)$。

3. 特殊类型行列式及计算

3.1. 循环行列式

循环行列式[9]的特点是行列式每行(列)的元素都相同，位置排列有次序。由于每行(列)元素呈规律性排列，因此结合行列式的性质，对行列式每行(列)元素作“倍乘”、“倍加”、“倍减”，将更多元素化为零元素，再结合降阶法或化三角形法，从而求行列式的值。

例 3.1 计算 n 阶行列式[1]

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&4&\cdots&1\\3&4&5&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n&1&2&\cdots&n-1\end{vmatrix}.$$

解析：该行列式每行(列)元素相同，相邻两行(列)对应元素之间差值为 1，因此，对相邻两行做减法。从最后一行开始，上一行的−1 倍依次加到下一行，可得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}.$$

此时，行列式第一列为特殊列，行列式中有大量元素 1。故，将第一列的−1 倍依次加到每一列，得到

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & n-2 & n-1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n\\ 1 & 0 & \cdots & -n & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & -n & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

除第一列以外，其它列只含两个非零元素，其中每列都含共同因子 $-n$。故，第 $2,3,\cdots,n$ 列的 $\frac{1}{n}$ 倍加到第一列，有

$$\begin{aligned}D_n&=\begin{vmatrix}1+\frac{1}{n}+\cdots\frac{n-1}{n} & 1 & \cdots & n-2 & n-1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n\\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}\\ &=\left[1+\frac{1}{2}(n-1)\right]\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & -n\\ 0 & \cdots & -n & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -n & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}\\ &=\frac{n+1}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-n)^{n-1}\\ &=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.\end{aligned}$$

3.2. 箭形行列式

箭形行列式的特点是除了第一列、第一行及主对角线元素外，其余元素均为零。计算此类行列式时，通常将其转化为三角形行列式。

例 3.2 计算 n 阶行列式[1]

$$D_n=\begin{vmatrix}a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}.$$

解析：根据行列式的特点，只要将第一列除 a_0 外的所有元素 1 化为零，行列式就转化为了上三角行列式。

从第二列至第 n 列分别乘以 $-\dfrac{1}{a_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 加到第一列，可得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0-\dfrac{1}{a_1}-\cdots-\dfrac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

注意：箭形行列式只需要将除主对角线外的非零行(列)元素全部化简为零元素，即可得到上(下)三角行列式进而运算。

3.3. 三对角线型行列式

三对角线型行列式的特征是主对角线和主对角线上下两条相邻的斜对角线共三条斜线的元素全部为非零元素，行列式的其余元素全为零元素。满足该特点的行列式一般都是利用递推法，有时候也会结合数学归纳法。

例 3.3 计算 n 阶行列式[1]

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

解析：因为 D_n 与 D_{n-1} 有相同的元素分布规律，因此利用递推法。

D_n 按第一行展开，得

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta\begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-1}.$$

将上式右端 $n-1$ 阶行列式按第一列展开，得

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}.$$

将该递推公式变形，就有

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}).$$

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2}).$$

结合 $D_1=\alpha+\beta$，$D_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$，可得

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=\beta^n.$$

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})=\cdots=a^{n-2}(D_2-\alpha\beta)=\alpha^n.$$

故

$$\begin{aligned} D_n &= \beta^n + \alpha D_{n-1} \\ &= \beta^n + \alpha\left(\beta^{n-1} + \alpha D_{n-2}\right) \\ &= \cdots \\ &= \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + a^2\beta^{n-2} + \cdots + a^{n-3}\beta^3 + a^{n-2}D_2 \\ &= \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + a^2\beta^{n-2} + \cdots + a^{n-2}\beta^2 + a^{n-1}\beta + \alpha^n. \end{aligned}$$

注意：要根据行列式的特点选择适当的方法，如下式 D_n 则适合数学归纳法。

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos a \end{vmatrix}.$$

4. 抽象型行列式的计算

抽象型行列式通常是行列式的具体元素未给出，只用抽象符号表示，其计算往往结合行列式的性质、矩阵的知识、相似理论等，方法灵活多变，对行列式及矩阵的知识需要灵活运用。

4.1. 利用行列式的性质

例 4.1 已知 $|\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = n$， $|\alpha_1,\beta+\gamma,\alpha_2,\alpha_3| = m$， 则 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,3\beta| =$ __ 。

解析：由行列式的性质，可得

$$\begin{aligned} |\alpha_1,\beta+\gamma,\alpha_2,\alpha_3| &= |\alpha_1,\beta,\alpha_2,\alpha_3| + |\alpha_1,\gamma,\alpha_2,\alpha_3| \\ &= |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta| - |\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| \\ &= |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta| - n = m. \end{aligned}$$

因此，

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta| = m+n.$$

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,3\beta| = 3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta| = 3(m+n).$$

4.2. 利用矩阵性质

4.2.1. 矩阵的主要公式

设 A 是 n 阶可逆矩阵，则 $|kA| = k^n|A|$。

若 A,B 是同阶矩阵，则 $|AB| = |A||B|$。

注意：一般而言，$|A+B| \neq |A|+|B|$，对于 $|aA+bB|$ 的题目，通常要利用单位矩阵 E 作恒等变换，转换为矩阵乘积的形式计算。

4.2.2. 逆矩阵的性质及主要公式

设 A,B 是同阶可逆矩阵， A^{-1} 是 A 的逆矩阵，则

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}(k \neq 0), (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

$$\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}},\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}=\frac{1}{|A|}.$$

4.2.3. 伴随矩阵的性质与主要公式

设 A 是 n 阶可逆矩阵， A^* 是 A 的伴随矩阵，则

$$A^*=|A|A^{-1},\left|A^*\right|=|A|^{n-1},AA^*=A^*A=|A|E,$$

$$\left|\left(A^*\right)^*\right|=\left||A|^{n-2}A\right|=|A|^{(n-1)^2},(AB)^*=B^*A^*,$$

$$(kA)^*=k^{n-1}A^*,\left(A^*\right)^{-1}=\frac{A}{|A|}=\left(A^{-1}\right)^*,\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A.$$

4.2.4. 正交矩阵的性质及主要公式

设 A 是 n 阶方阵，满足 $AA^{\mathrm{T}}=E$，则 A 是正交矩阵。

例 4.2 设 A,B 是为 3 阶矩阵且 $|A|=4,|B|=2,\left|A^{-1}+B\right|=2$，则 $\left|A+B^{-1}\right|=$ __ 。

解析：由于 $\left|A+B^{-1}\right|$ 没有运算公式，所以利用单位矩阵 E 作恒等变形。

$$\begin{aligned}\left|A+B^{-1}\right|&=\left|EA+B^{-1}E\right|=\left|\left(B^{-1}B\right)A+B^{-1}\left(A^{-1}A\right)\right|=\left|B^{-1}\left(B+A^{-1}\right)A\right|\\&=\left|B^{-1}\right|\left|B+A^{-1}\right||A|=8|B|^{-1}=4.\end{aligned}$$

4.3. 利用矩阵的特征值及相似理论

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$， $\lambda_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 是 A 的特征值，则

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

$$|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

若 $A\sim B$，则有 $|A|=|B|$， $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$， $r(A)=r(B)$。

例 4.3 已知 A 是 3 阶矩阵，特征值是 1，2，4，若 A 和 B 相似，则 $|B+E|=$ __ 。

解析：已知矩阵 A 的 3 个特征值，则可得行列式得值：

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1\times2\times4=8.$$

由于 $A\sim B$，利用相似理论，则

$$|B|=8\text{，且 }r(B)=r(A).$$

$B+E$ 的特征值为：2，3，5。

则

$$|B+E|=2\times3\times5=30.$$

5. 小结

行列式计算方法灵活多样，本文整理归纳了具体型行列式和抽象型行列式的若干计算方法，并总结了每种方法对应行列式的特点。对于具体型行列式，本文主要介绍了九种方法，分别是定义法、化三角法、降阶法、加边法、拆分法、递推法、数学归纳法、范德蒙德行列式法以及析因子法。其中，化三角法、降阶法是行列式计算中最基本且最常用的方法，通常贯穿于具体型行列式的整个计算过程中。当行

列式为低阶行列式$(n \le 3)$或为零元素较多的高阶行列式时，通常可以考虑定义法；当行列式的行(列)存在特殊关系时，可以考虑化三角法；当行列式的行(列)含较多零元素时，可以使用降阶法；当行列式每行有公因子但无法在保持行列式不变的基础上提出公因子时，考虑加边法，为行列式增加特殊的行(列)进行化简；当行列式某行(列)元素能由两项之和表示时，考虑拆分法；当高阶(n阶)行列式与其相应的低阶($<n$阶)行列式具有相同的元素排列形式时，考虑递推法；当需要证明结论已知的行列式时，考虑数学归纳法；当行列式形如范德蒙德行列式时，考虑范德蒙德行列式法；当行列式中少量元素是变量x的多项式，且含有变量所在的行(列)与其余行列成比例时，考虑析因子法。抽象型行列式的计算需要根据题目特点，灵活运用公式。

总而言之，行列式的计算方法灵活多变，对于不同的行列式，其计算方法往往不唯一，通常会结合多种方法一起使用。具体选择哪种方法，需要根据行列式的特点而定。行列式的计算是高等代数中的一个重难点，本文归纳总结的方法有一定的局限性，希望在后续的研究中继续深入探讨。

致　谢

非常感谢审稿人对本文提出宝贵的意见。

基金项目

国家自然科学基金(12001117)、广州科技计划项目(202102020438)资助。

参考文献

[1] 王萼芳，石生明. 高等代数[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
[2] 吕淑君. 行列式计算的若干方法总结[J]. 数学学习与研究, 2016(22): 6-7.
[3] 张莹. 行列式的若干计算方法及解析[J]. 学园, 2019, 12(3): 49-51.
[4] 王建红. 行列式计算方法的研究[J]. 黄山学院学报, 2021, 23(3): 11-14.
[5] 张宇. 考研数学基础30讲[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2020.
[6] 贾凌云. “加边法”在行列式计算中的应用[J]. 开封教育学院学报, 2015, 35(10): 192-194.
[7] 于雪，张秋生. “加边法”在行列式计算中的应用[J]. 时代教育, 2014(7): 189.
[8] 徐安德. 行列式的两种计算方法探究[J]. 科技信息, 2011(33): 288+335.
[9] 张慧萍. 循环行列式的求法[J]. 现代计算机(专业版), 2015(2): 22-25.