

带有形状参数的八次Bezier曲线

邓廷鹏*, 张贵仓

西北师范大学, 数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2022年4月16日; 录用日期: 2022年5月17日; 发布日期: 2022年5月24日

摘要

为了有效地改进Bezier曲线的形状, 给出了一组带有形状参数 β 的八次多项式基函数, 是七次Bernstein基函数的拓展; 分析了这组基的性质, 基于该组基定义了带有形状参数 β 的八次多项式曲线。该曲线不仅具有七次Bezier曲线的特性, 如: 端边相切、凸包性、保凸性、变差缩减性等, 而且具有形状的可调性和更好的逼近性。在控制多边形顶点不变的情况下, 通过调整形状参数 β , 可以产生逼近多边形的不同曲线。当 $\beta = 0$ 时, 曲线退化为七次Bezier曲线。应用实例表明, 本文定义的曲线为曲线/曲面的设计提供了一种可行的方法。

关键词

计算机应用, 七次Bezier曲线, 形状参数, 曲线设计

Eighth Times Bezier Curve with a Shape Parameter

Tingpeng Deng*, Guicang Zhang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 16th, 2022; accepted: May 17th, 2022; published: May 24th, 2022

Abstract

In order to effectively improve the shape of Bezier curve. In this paper, a set of eighth times polynomial basis function with shape parameter β is given, this is an extension of the seventh times Bernstein basis function. Next, properties of the basis are analyzed, and a polynomial curve with a shape parameter β is defined based on it. This curve not only has the characteristics of

*通讯作者。

the seventh times Bezier curve, such as tangent of end-edge, convex envelope, convexity-preserving and variation-reducing, but also has the shape adjustability and better approximation. Under the condition that the vertices of the control polygon are invariable, different curves approximating the polygon can be produced by adjusting the shape parameter β . When $\beta = 0$, the curve degenerates into a seventh times Bezier curve. At last, some examples illustrate that the curves defined in this paper provide a feasible method for the design of curves/surfaces.

Keywords

Computer Applications, Seventh Times Bezier Curve, Shape Parameter, Curve Design

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Bezier 曲线是计算机辅助几何设计(CAGD)和计算机图形学(CG)中表示自由曲线曲面的重要方法之一[1] [2], 本文研究了以 Bernstein 多项式作为基函数的许多独特性质, 如对称性、端点性质等, 正基于此基函数, 所产生的 Beizer 曲线具有许多良好的特性, 如端点性质、端边相切、凸包性、对称性、变差缩减性等优点。当然, Bezier 曲线也存在不足之处。主要体现在只要给定了多边形的控制顶点及对应的 Bernstein 基, Bezier 曲线曲面就可唯一确定, 若要修改曲线的形状, 则必须调整其控制顶点。

近十年来, 为了调整曲线所需要的形状或者改变曲线的位置, 使其具有更好的形状可调性和逼近性。于是, 学者们提出了各种带有形状参数的拟 Bezier 曲线, 并相应的推广了 Bezier 曲线的各种形式[3]-[9]。例如: 有理 Bezier 曲线通过不改变控制顶点, 引入了权因子, 可以调整曲线的形状, 但对如何选取权因子, 导致影响拟 Beizer 曲线的形状还不是很清楚[10]。在文献[11]中, 建立了一类可以调整的 Bezier 曲线, 主要是对于该控制多边形的 $n+1$ 个控制顶点, 使用 $m = l(n-1)+1$ 次 Bernstein 基构造了一类特殊的 Bezier 曲线。该曲线参数 l 的几何意义模糊, 且曲线次数过高, 不利于进行曲线的计算。而文献[12]提出了四次 Bézier 曲线的两种不同扩展, 文献[13]提出了五次 Bézier 曲线的三种不同扩展, 文献[14]提出了六次 Bézier 曲线的新扩展, 所用的方法都是提高了多项式的次数, 从而获得与 Bernstein 基不同且含有参数 β 的基函数。因此, 得到的曲线具有同六次 Bezier 曲线类似的性质。

为此, 本文针对七次 Beizer 曲线进行拓展, 也是通过增加 t 的次数, 得出了带有形状参数 β 的八次多项式基函数, 由该基函数组构造了带有形状参数 β 的曲线, 这类曲线不仅具有与七次 Bezier 曲线类似的许多性质: 如端点插值、端边相切、凸包性等; 而且在控制多边形顶点不变的情况下, 随着参数 β 的调整, 可以改变曲线的形状和位置, 相对于七次 Bezier 曲线而言, 并从本文的基函数、曲线图像以及对应的性质中可以知道, 该曲线明显具有更好的形状可调性和逼近性。当 $\beta = 0$ 时, 该曲线退化为七次 Bezier 曲线。并运用张量积方法, 从而生成形状可调的曲面, 曲面也具有与曲线类似的性质, 这为曲线曲面的设计提供了一种切实可行的方法。

2. 基函数的结构和性质

定义 2.1 [15]对 $t \in [0,1]$, $\beta \in R$, 称关于 t 的多项式

$$\begin{cases} B_{0,7}(t) = (1-\beta t)(1-t)^7 \\ B_{1,7}(t) = (7+\beta-5\beta t)(1-t)^6 t \\ B_{2,7}(t) = (21+4\beta-9\beta t)(1-t)^5 t^2 \\ B_{3,7}(t) = (35+5\beta-9\beta t)(1-t)^4 t^3 \\ B_{4,7}(t) = (35+\beta t)(1-t)^3 t^4 \\ B_{5,7}(t) = (21-5\beta+9\beta t)(1-t)^2 t^5 \\ B_{6,7}(t) = (7-4\beta+5\beta t)(1-t)t^6 \\ B_{7,7}(t) = (1-\beta+\beta t)t^7 \end{cases} \quad (1)$$

为带参数 β 的基函数, 其中 $-7 \leq \beta \leq 1$ 。图 1 为 $\beta = -1$ 时 8 个基函数图形。

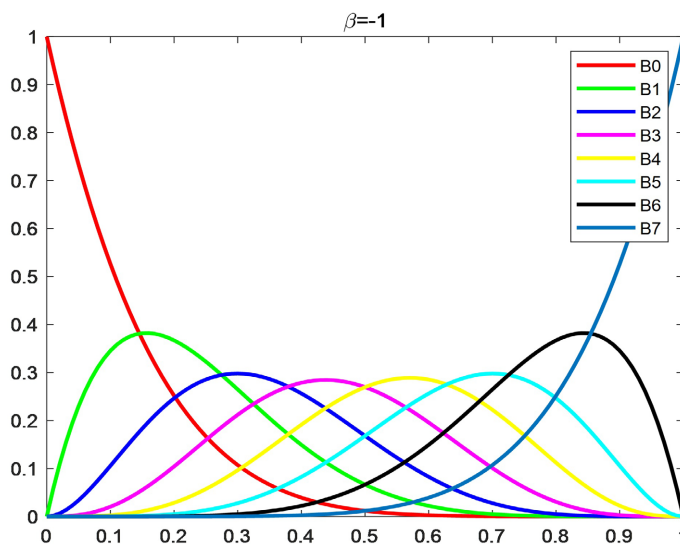


Figure 1. The images of eight basis functions
图 1. 八个基函数图形

上述基函数具有以下性质:

性质 2.1 非负性

$$B_{i,7} \geq 0 \quad (2)$$

其中 $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

性质 2.2 权性

$$\sum_{i=0}^7 B_{i,7}(t) \equiv 1 \quad (3)$$

性质 2.3 对称性

$$\begin{aligned} B_{0,7}(1-t) &= B_{7,7}(t) \\ B_{1,7}(1-t) &= B_{6,7}(t) \\ B_{2,7}(1-t) &= B_{5,7}(t) \\ B_{3,7}(1-t) &= B_{4,7}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

性质 2.4 端点性质

$$B_{0,7}(0) = 1 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & B_{i,7}(0) \\ &= B'_{2,7}(0) = B'_{3,7}(0) = B'_{4,7}(0) = B'_{5,7}(0) = B'_{6,7}(0) = B'_{7,7}(0) \\ &= B''_{3,3}(0) = B''_{4,4}(0) = B''_{5,5}(0) = B''_{6,6}(0) = B''_{7,7}(0) \\ &= B'''_{4,4}(0) = B'''_{5,5}(0) = B'''_{6,6}(0) = B'''_{7,7}(0) \\ &= B^{(4)}_{5,5}(0) = B^{(4)}_{6,6}(0) = B^{(4)}_{7,7}(0) \\ &= B^{(5)}_{6,6}(0) = B^{(5)}_{7,7}(0) \\ &= B^{(6)}_{7,7}(0) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$$B_{7,7}(1) = 1 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & B_{j,7}(1) \\ &= B'_{5,7}(1) = B'_{4,5}(1) = B'_{3,5}(1) = B'_{2,5}(1) = B'_{1,5}(1) = B'_{0,5}(1) \\ &= B''_{4,7}(1) = B''_{3,7}(1) = B''_{2,7}(1) = B''_{1,7}(1) = B''_{0,7}(1) \\ &= B'''_{3,5}(1) = B'''_{2,5}(1) = B'''_{1,5}(1) = B'''_{0,5}(1) \\ &= B^{(4)}_{2,7}(1) = B^{(4)}_{1,7}(1) = B^{(4)}_{0,7}(1) \\ &= B^{(5)}_{1,7}(1) = B^{(5)}_{0,7}(1) \\ &= B^{(6)}_{0,7}(1) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

性质 2.5 单峰性

每个基函数在 $[0,1]$ 上都有一个局部最大值。从图 1 就可以判断, 并通过对基函数求导可以验证。

性质 2.6 对 β 的单调性

即对固定 t , $B_{0,7}(t)$ 和 $B_{7,7}(t)$ 是 β 的递减函数, 而 $B_{1,7}(t)$, $B_{6,7}(t)$, $B_{2,7}(t)$, $B_{5,7}(t)$, $B_{3,7}(t)$, $B_{4,7}(t)$ 是 β 的递增函数。

性质 2.7 当 $\beta = 0$ 时, 对于 $\forall i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, 则有

$$B_{0,7}(t) = B_i^7(t) \tag{9}$$

此性质说明, 式(1)给出的基函数是七次 Bernstein 基函数的拓展。

3. 曲线的结构和性质

定义 3.1 给定 8 个控制顶点 $P_i \in R^d$ ($d = 2, 3; i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$), 对 $t \in [0, 1]$ 定义曲线

$$B_1 = \sum_{i=0}^7 P_i B_{i,7}(t) \tag{10}$$

因此, 将等式(10)所定义的曲线称作带有形状参数 β 的八次 Bezier 曲线, 简记为八次 β -Bezier 曲线。

显然, 当 $\beta = 0$ 时, 八次 β -Bezier 曲线退化为七次 Bezier 曲线。图 2 是从右到左取 $\beta = 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7$ 时不同情况的八次 β -Bezier 曲线。

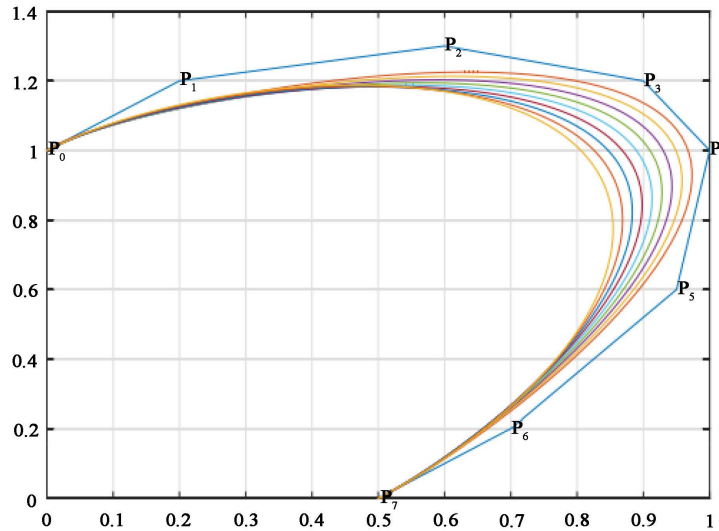


Figure 2. Curves with different parameter values
图 2. 不同参数值的曲线

对于上述基函数的性质, 可以得出曲线式(10)具有以下性质:

性质 3.1 端点性质

$$\begin{aligned}
 B_1(0) &= P_0 \\
 B_1(1) &= P_7 \\
 B_1'(0) &= (\beta + 7)(P_1 - P_0) \\
 B_1'(1) &= (\beta + 7)(P_7 - P_6)
 \end{aligned} \tag{11}$$

由此得出曲线式(10)插值在首末端点及与控制多边形的首末边相切。

性质 3.2 凸包性

根据基函数的性质 2.1 可得。

性质 3.3 对称性

即: 由控制多边形顶点 $P_7, P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1, P_0$ 的八次 β -Bezier 曲线和由控制多边形顶点 $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ 的八次 β -Bezier 曲线必定是相同的, 但是方向一定相反。根据基函数的对称性, 得出

$$B_1(1-t) = \sum_{i=0}^7 P_{7-i} B_{i,7}(1-t) = \sum_{j=0}^7 P_j B_{j,7}(t) = B_1(t) \tag{12}$$

性质 3.4 几何不变性和仿射不变性

曲线只依赖控制顶点, 而与坐标系的位置和方向无关, 即曲线的形状在坐标平移和旋转后仍保持不变。对于控制多边形进行扩大、缩小或剪切等仿射变换后, 所对应的新曲线就是相同仿射变换后的曲线。

性质 3.5 逼近性

即: 当参数 β 增大时, 对应的曲线更易逼近控制多边形, 比七次 Bezier 曲线对控制多边形的逼近更优越。因此, 说明了本文的曲线比七次 C-Bezier 曲线有着更好的逼近性。

性质 3.6 变差缩减法(V.D.)

证明: 根据文献[16]所提供的方法。先证明

$$B_{0,7}(t), B_{1,7}(t), B_{2,7}(t), B_{3,7}(t), B_{4,7}(t), B_{5,7}(t), B_{6,7}(t), B_{7,7}(t) \tag{13}$$

本组基函数在 (0,1) 上完全符合笛卡尔符号法制。即对于下述的常数序列

$$\{k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\} \tag{14}$$

都有

$$Zeros(0,1)\left\{\sum_{i=0}^7 k_i B_{i,7}(t)\right\} \leq SA(k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7) \tag{15}$$

其中 $Zeros(0,1)\{f(t)\}$ 表示函数 $f(t)$ 在区间 (0,1) 上根的个数, 则

$$f(t) = \sum_{i=0}^7 k_i B_{i,7}(t) \tag{16}$$

$$SA(k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7) \tag{17}$$

表示常数序列(14)的符号改变次数。

不妨设 $k_0 > 0$, $SA(k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7)$ 的可能取值为 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0。

1) 当式(17) = 7 时, 根据引理, 得

$$k_7 < 0 \tag{18}$$

又因为 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上是连续函数, $f(0) = k_0$, $f(1) = k_7$ 。

假设 $f(t)$ 在 (0,1) 上有 8 个根, 则 $f(1) = k_7 > 0$; 故相互矛盾, 式(15)成立。

2) 当式(17) = 6, 5, 4, 3, 2, 1 时, 同样的方法可证式(15)成立。

显然式(17) = 0 时, 式(15)成立。

故结论成立。

下证变差缩减法。

令 L 为通过点 Q 且法向量为 u 的直线(或平面)。

如果 L 和控制多边形 $\langle P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 \rangle$ 交于 P_j, P_{j+1} 之间的边, 则 P_j, P_{j+1} 一定位于 L 的两侧, 有 $u \cdot (P_j - Q)$ 和 $u \cdot (P_{j+1} - Q)$ 符号相反。

于是, 一方面, 有

$$\begin{aligned} & SA\{u \cdot (P_0 - Q), u \cdot (P_1 - Q), u \cdot (P_2 - Q), u \cdot (P_3 - Q), \\ & u \cdot (P_4 - Q), u \cdot (P_5 - Q), u \cdot (P_6 - Q), u \cdot (P_7 - Q)\} \\ & \leq \langle P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 \rangle \end{aligned} \tag{19}$$

与 L 交点的个数;

另一方面, 有 $B_1(t)$ 与 L 交点的个数为

$$Zero(0,1)\left\{\sum_{j=0}^7 B_{j,7}(t)(P_j - Q) \cdot u\right\} \tag{20}$$

因此, 根据基函数组的笛卡尔符号法则, $B_1(t)$ 与 L 交点的个数不大于

$$\begin{aligned} & SA\{u \cdot (P_0 - Q), u \cdot (P_1 - Q), u \cdot (P_2 - Q), u \cdot (P_3 - Q), \\ & u \cdot (P_4 - Q), u \cdot (P_5 - Q), u \cdot (P_6 - Q), u \cdot (P_7 - Q)\} \end{aligned} \tag{21}$$

故结论得证。

性质 3.7 保凸性

由性质 3.6 知, 当控制多边形为凸时, 平面上任一直线与曲线的交点个数不超过 2; 这是因为直线与控制多边形的交点个数最多为 2。

4. 曲线的应用实例

花瓣图形

八次 β -Bezier 曲线与七次 Bezier 曲线一样, 当起点和终点重合时, 可以得到一条封闭的曲线, 如图 3 所示是 $\beta = 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7$ 的闭曲线的花瓣图形。

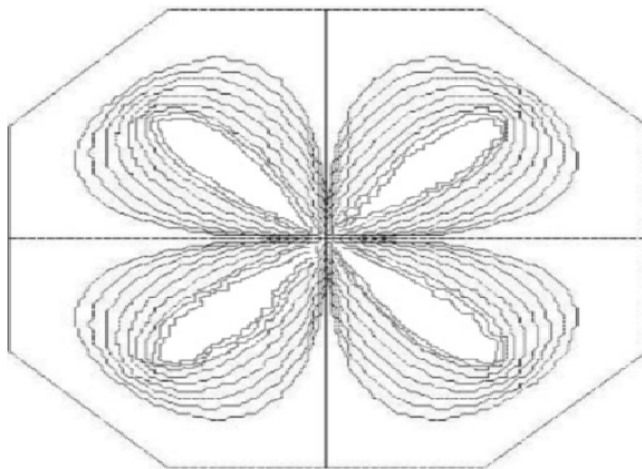


Figure 3. The petal images of close curves
图 3. 闭曲线的花瓣图形

5. 曲面的定义

运用张量积的方法, 可将曲线推广到曲面上。

定义 5.1 设有 8×8 个控制顶点 $P_{ij} \in R^d$ ($d = 2, 3$) 其中 $i, j = 0, \dots, 7$, 且相应的张量积曲面

$$B_1(u, v) = \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 P_{ij} B_{i,7}(u) B_{j,7}(v) \tag{22}$$

其中 $u, v \in [0, 1], -7 \leq \beta \leq 1$

称为 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的双八次 β -Bezier 曲面。可证明双八次 β -Bezier 曲面具有与八次 β -Bezier 曲线相似的几何性质。

6. 结论

本文主要是通过提高多项式的次数得到一组带有参数 β 的八次多项式基函数, 并分析了该组基函数的性质。此外, 由这组基函数相应构造的曲线称为八次 β -Bezier 曲线。该曲线具有许多类似七次 Bezier 曲线的特征。如端点性质、端边相切、凸包性、对称性、变差缩减性等。对于计算量而言, 该曲线都比七次 Bezier 曲线的计算量大, 可利用海纳算法来计算该曲线。曲线的优点是: 在 8 个控制顶点不变情况下, 通过调节参数 β 值, 进而改变曲线的形状和位置, 而且 β 的几何意义明显, 在 $-7 \leq \beta \leq 1$ 范围内, β 越大, 说明该曲线越逼近控制多边形, 且当 $\beta = 0$ 时, 曲线退化为七次 Bezier 曲线。最后, 从逼近的角

度来看, 所构造的曲线比七次 Bezier 曲线的逼近性更好。运用张量积的方法, 将曲线推广到曲面, 得到的曲面形状可以调整且具有与曲线相类似的性质。今后, 将在此基础上考虑其它基函数所构造的 Bezier 曲线曲面是否具有更好的可调性和逼近性, 这是需要进一步研究的工作。

参考文献

- [1] Pottmann, H. and Wagner, M.G. (1944) Helix Splines as an Example of Affine Tchebycheffian Splines. *Advances in Computational Mathematics*, **2**, 123-142. <https://doi.org/10.1007/BF02519039>
- [2] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 306-454.
- [3] 汪凯, 张贵仓, 王敏. 带两个参数的非均匀三次三角 B 样条曲线[J]. 图学学报, 2019, 40(2): 395-402.
- [4] 徐梦豪, 严兰兰. 形状可调 3 次三角域 Bézier 曲面及其几何迭代[J]. 江西科学, 2020, 38(6): 811-819+842.
- [5] 胡钢, 秦新强, 韩西安, 段现报. 拟三次 Bézier 曲线曲面的拼接技术[J]. 西安交通大学学报, 2010, 44(11): 46-50+60.
- [6] 蕙海英, 张贵仓. 带两个参数的拟 Bézier 曲线[J]. 计算机科学, 2014, 41(S2): 100-102+122.
- [7] 吴晓勤, 韩旭里. 三次 Bézier 曲线的扩展[J]. 工程图学学报, 2005(6): 98-102.
- [8] 张贵仓, 拓明秀, 苏金凤, 孟建军, 韩根亮. 一种带形状参数的奇异混合拟 Bézier 曲线[J]. 计算机工程与科学, 2021, 43(5): 897-906.
- [9] 姜岳道, 植物. Bézier 曲线的扩展种类[J]. 内蒙古民族大学学报(自然科学版), 2011, 26(4): 378-381.
- [10] Marnar, E., Peña, J.M. and Sánchez-Reyes, J. (2001) Shape Preserving Alternatives to the Rational Bezier Model. *Computer Aided Geometric Design*, **18**, 37-60. [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(01\)00011-5](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(01)00011-5)
- [11] 齐从谦, 邬弘毅. 一类可调控 Bezier 曲线及其逼近性[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 1996(6): 16-20.
- [12] 吴晓勤, 韩旭里, 罗善明. 四次 Bézier 曲线的两种不同扩展[J]. 工程图学学报, 2006, 27(5): 59-64.
- [13] 潘庆云, 陈素根. 五次 Bézier 曲线的三种不同扩展[J]. 安庆师范学院学报(自然科学版), 2008, 14(2): 69-73.
- [14] 植物, 姜岳道, 白根柱. 六次 Bézier 曲线的新扩展[J]. 内蒙古民族大学学报(自然科学版), 2012, 27(2): 140-141.
- [15] 陈发来, 邓建松, 徐晨东. 几何设计与计算的新进展[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2005.
- [16] 胡钢, 吉晓民, 秦新强, 沈晓芹. 4 次带参 Bézier 可展曲面的设计[J]. 上海交通大学学报, 2012, 46(4): 601-606.