Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(5), 784-794
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.125089

与权函数有关的Q_K空间

石梅梅

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2022年4月16日；录用日期：2022年5月17日；发布日期：2022年5月24日

摘 要

本文主要引入了一类与权函数有关的新型的Q型空间$Q_K(\mathbb{H})$。我们首先研究了$Q_K(\mathbb{H})$的基本性质，从而得到了$Q_K(\mathbb{H})$与BMO之间的关系，最后给出了$Q_K(\mathbb{H})$的Carleson测度刻画。

关键词

Q型空间，权函数，Carleson测度刻画

The Q_K Space Related with Weight Function

Meimei Shi

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Apr. 16th, 2022; accepted: May 17th, 2022; published: May 24th, 2022

Abstract

In this paper, we introduce a new class of Q type space $Q_K(\mathbb{H})$ which is related to weight functions. Firstly, we study some properties of $Q_K(\mathbb{H})$ and then investigate the relationship between $Q_K(\mathbb{H})$ and BMO space. Finally, we give the Carleson measure characterization of $Q_K(\mathbb{H})$.

Keywords

Q Type Space, Weiht Function, Carleson Measure Characterization

文章引用：石梅梅. 与权函数有关的Q_K空间[J]. 理论数学, 2022, 12(5): 784-794.
DOI: 10.12677/pm.2022.125089

1. 引言

作为平均震荡空间的推广(BMO)，Q 型空间在调和分析、偏微分方程以及位势理论中得到了广泛的研究，参见文献[1] [2] [3]。Q 型空间与 BMO 空间有类似的性质，在许多分析性问题的研究中，Q 型空间可以是 BMO 空间很好的替代。最初，Essén 等人将 $Q_p(\mathbb{D})$ 推广到了欧几里得空间，参见文献[4]。在 2004 年，Dafni 和 Xiao 在文献[5]中利用一种新型的帐篷空间解决了分数阶 Carleson 测度和 $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 空间的几个对偶问题，定义了 $Q_\alpha(\mathbb{H}^n)$ 的对偶为包含 Hardy 空间 H^1 的分布空间并证明了一个原子分解。关于 Q 型空间更多的内容以及研究进展，可以参见文献[6] [7] [8]。

基于类似的想法，作为 BMO 型空间在 $\mathbb{H}^n$ 上的推广，在文献[9]中，王春杰将 Q 型空间推广到 $\mathbb{H}^n$ 中，引入了 $Q_p(\mathbb{H}^n)$ 空间，通过利用 Poisson 积分给出了 Carleson 测度刻画。接下来，我们重述一下文献[9]中 $Q_p(\mathbb{H}^n)$ 的概念。

定义 1.1 令 $1<p<\infty$， $Q_p(\mathbb{H}^n)$ 包含了 $\mathbb{H}^n$ 上的所有可测函数 f，则 f 满足

$$\|f\|_{Q_p}^2=\sup_I\int_I\int_I\frac{|f(\xi)-f(\eta)|^2}{|\eta^{-1}\xi|^{2(2n+2)}}\left(\frac{|\eta^{-1}\xi|}{\ell(I)}\right)^{(2n+2)p}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta<\infty,$$

其中 I 是 $\mathbb{H}^n$ 上的一个区间， $\ell(I)$ 是区间 I 的长度，并且该式的上确界取遍 $\mathbb{H}^n$ 中所有的方体 I。

董建锋将 $Q_p(\mathbb{H}^n)$ 的概念推广到 $\mathbb{H}$ 型群上，记为 $Q_p(\mathcal{H})$，参见文献[10]。在 2016 年，Zhao 在文献[11]中引入了 $Q_p(\mathbb{H}^n)$ 上的 Hardy-Hausdorff 空间，得到了 Hardy-Hausdorff 空间的原子分解，证明了 Hardy-Hausdorff 空间与 $Q_p(\mathbb{H}^n)$ 空间的对偶性。

通过定义 1.1 我们可以看出，空间 $Q_p(\mathbb{H}^n)$ 与幂函数 t^p 有关。一个很自然的问题就是 $Q_p(\mathbb{H}^n)$ 中的幂函数 t^p 是否可以用一个单调递增的权函数替代。因此，我们引入和研究了 Heisenberg 群上一个更为普遍的空间 Q_K，为了方便，本文研究 $Q_K(\mathbb{H})$ 的相关问题，对于高维形式 $Q_K(\mathbb{H}^n)$ 的研究可类似，二者均可视为 $Q_p(\mathbb{H}^n)$ 的推广。

定义 1.2 设 K 是 $[0,\infty)$ 上的增函数。若 $f\in L^2_{loc}(\mathbb{H})$ 满足

$$\|f\|_{Q_K(\mathbb{H})}^2=\sup_{I\subset\mathbb{H}}\int_I\int_I\frac{|f(\xi)-f(\eta)|^2}{|\eta^{-1}\xi|^8}K\left(\frac{|\eta^{-1}\xi|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta<\infty,$$

则称 $f\in Q_K(\mathbb{H})$。其中 I 是 $\mathbb{H}$ 上的一个区间， $\ell(I)$ 是区间 I 的长度，并且该式的上确界取遍 $\mathbb{H}$ 中所有的方体 I 并且该式的上确界取遍 $\mathbb{H}$ 中所有的方体 I。

本文的主要目的是研究 $\mathbb{H}$ 上的 Q 型空间 $Q_K(\mathbb{H})$。本文主要包括如下内容：在第二部分，介绍了相关的概念，研究了 $Q_K(\mathbb{H})$ 的性质，给出了 $Q_K(\mathbb{H})$ 与 BMO 空间的关系；在第三部分，利用辅助函数给出了 $Q_K(\mathbb{H})$ 的 Carleson 测度刻画。

在本文中，如果存在一个正的常数 C 满足 $a\le Cb$，可写作 $a\lesssim b$。另外，如果 $a\lesssim b$ 和 $b\lesssim a$ 都成立，可写作 $a\approx b$。我们假设 $K:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是单调递增的并且满足 $K(2t)\approx K(t)$。如下是我们将会用到的几个函数空间：

$$C(\mathbb{H})=\{f:\mathbb{H}\to\mathbb{R}|\ f\text{ 是连续的}\};$$
$$C^k(\mathbb{H})=\{f:\mathbb{H}\to\mathbb{R}\ |\ f\text{ 是 }k\text{ 阶连续可微的}\},1\le k\le\infty;$$
$$C^\infty(\mathbb{H})=\{f:\mathbb{H}\to\mathbb{R}\ |\ f\text{ 是无穷阶可微的}\};$$
$$L^p(\mathbb{H})=\left\{f:\mathbb{H}\to\mathbb{R}\ |\ f\text{ 是可测的},\int_{\mathbb{H}}|f(\xi)|^p\mathrm{d}\xi<\infty\right\}.$$

2. $Q_K(\mathbb{H})$的基本性质

在复空间$\mathbb{C}^2$中，Siegel 上半空间$\mathbb{U}$被定义为

$$\mathbb{U}=\left\{z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:\operatorname{Im}z_2>|z_1|^2\right\}.$$

集合$\mathbb{C}\times\mathbb{R}=\left\{(z_1,t):z_1\in\mathbb{C},t\in\mathbb{R}\right\}$构成了 Heisenberg 群$\mathbb{H}$，其中$z_1=(x,y)\in\mathbb{C}$。如果$\xi=(z_1,t)\in\mathbb{H}$，那么

$$|\xi|_\infty=\max\left\{|x|,|y|,\sqrt{t}\right\}$$

且$|\xi|=\left(\frac{1}{16}|z_1|^4+|t|^2\right)^{1/4}$，其中$|z_1|^2=|x|^2+|y|^2, z_i=x+iy, 1\le i\le 2$。$\mathbb{H}$和$\partial\mathbb{U}$可以通过在原点进行如下的映射等同起来：

$$(z_1,t)\to\left(z_1,t+i|z_1|^2\right)\in\partial\mathbb{U},(z_1,t)\in\mathbb{H}.$$

令$f\in C^\infty(\mathbb{H})$，$f$的梯度及其梯度的长度分别为

$$\nabla f(\xi)=\left(Xf(\xi),Yf(\xi),T(\xi)\right)$$

和

$$|\nabla f(\xi)|^2=\left(1+|z_1|^2\right)^{-1}\left(|Xf(\xi)|+|Yf(\xi)|^2\right)+|Tf(\xi)|^2,$$

其中$X=\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial t}, Y=\frac{\partial}{\partial x}-2x\frac{\partial}{\partial t}$并且$T=\frac{\partial}{\partial t}$。在$\mathbb{H}$中，

$$f*g(\xi)=\int_{\mathbb{H}}f\left(\xi\eta^{-1}\right)g(\eta)\mathrm{d}\eta=\int_{\mathbb{H}}f(\eta)g\left(\eta^{-1}\xi\right)\mathrm{d}\eta$$

被称为函数f与g的卷积。

为了研究$Q_K(\mathbb{H})$的性质，我们需要如下辅助函数：

$$\varphi_K(s)=\sup_{0<t\le 1}\frac{K(st)}{K(t)},0<s<\infty.$$

并且在全文中假设辅助函数$\varphi_K(s)$满足如下两个条件：

$$\int_0^1\frac{\varphi_K(s)}{s^3}\mathrm{d}s<\infty, \tag{1}$$

$$\int_1^\infty\frac{\varphi_K(s)}{s^5}\mathrm{d}s<\infty. \tag{2}$$

对于任意的方体$I\subset\mathbb{H}$，η是I的中心，则基于I的 Carleson 盒子定义为

$$S(I)=\left\{(\xi,\rho)\in\mathbb{U}:\left|\eta^{-1}\xi\right|_\infty\le 2^{-1}\ell(I),\rho\le\ell(I)\right\}.$$

定义 2.1 令$p>0$。如果存在常数$C>0$满足

$$\sup_I\frac{\mu(S(I))}{|I|^p}\le C,$$

称$\mathbb{U}$上的正 Borel 测度μ为p-Carleson 测度。

定理 2.2 $f\in Q_K(\mathbb{H})$当且仅当

$$\int_{|\eta|_\infty<\ell(I)}\int_I\left|f(\xi\eta)-f(\xi)\right|^2K\left(\frac{|\eta|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^8}<\infty,$$

其中 I 是 $\mathbb{H}$ 上的一个区间，$\ell(I)$ 是区间 I 的长度，并且该式的上确界取遍 $\mathbb{H}$ 中所有的方体 I。

证明根据定义 1.2，利用变量替换：$\eta^{-1}\xi\to\varsigma$，我们可以得到

$$\begin{aligned}\|f\|_{Q_K(\mathbb{H})}^2&=\sup_I\int_I\int_{|\varsigma|_\infty<\ell(I)}\frac{\left|f(\eta\varsigma)-f(\eta)\right|^2}{|\varsigma|^8}K\left(\frac{|\varsigma|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\varsigma\mathrm{d}\eta\\&=\sup_I\int_{|\eta|_\infty<\ell(I)}\int_I\left|f(\xi\eta)-f(\xi)\right|^2K\left(\frac{|\eta|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^8}.\end{aligned}$$

定义 2.3 令 $f\in L_{loc}^2(\mathbb{H})$ 且 $f_I=|I|^{-1}\int_I f(\xi)\mathrm{d}\xi$。若 f 满足

$$\|f\|_{BMO}^2=\sup_I|I|^{-1}\int_I\left|f(\xi)-f_I\right|^2\mathrm{d}\xi<\infty,$$

那么，称 $f\in BMO(\mathbb{H})$。其中 I 是 $\mathbb{H}$ 上的一个区间，$\ell(I)$ 是区间 I 的长度，并且该式的上确界取遍 $\mathbb{H}$ 中所有的方体 I。

下面我们给出空间 $Q_K(\mathbb{H})$ 与 $BMO(\mathbb{H})$ 之间的关系。

定理 2.4

(1) $Q_K(\mathbb{H})\subseteq BMO(\mathbb{H})$；

(2) 若 $\int_0^2\frac{K(t)}{t^5}\mathrm{d}t<\infty$，则 $Q_K(\mathbb{H})=BMO(\mathbb{H})$。

证明(1)假设 $f\in Q_K(\mathbb{H})$ 并且 m 表示 Lebesgue 测度。那么对于任意方体 I 以及 $\xi,\eta\in I$，我们有

$$C_1|I|\lesssim m\left(\left\{\varsigma\in I:\min\left(\left|\varsigma^{-1}\xi\right|,\left|\varsigma^{-1}\eta\right|\right)>C_2\ell(I)\right\}\right).$$

由于 K 是非减函数，于是

$$\begin{aligned}&\int_I\min\left(K\left(\frac{\left|\varsigma^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right),K\left(\frac{\left|\varsigma^{-1}\eta\right|}{\ell(I)}\right)\right)\mathrm{d}\varsigma\\&\ge\int_{\left\{\varsigma\in I:\min\left(\left|\varsigma^{-1}\xi\right|,\left|\varsigma^{-1}\eta\right|\right)>C_2\ell(I)\right\}}\min\left(K\left(\frac{\left|\varsigma^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right),K\left(\frac{\left|\varsigma^{-1}\eta\right|}{\ell(I)}\right)\right)\mathrm{d}\varsigma\\&\ge C_1K(C_2)|I|.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\|f\|_{BMO(\mathbb{H})}^2&=\sup_I|I|^{-1}\int_I\left|f(\xi)-f_I\right|^2\mathrm{d}\xi\\&\approx\sup_I|I|^{-2}\int_I\int_I\left|f(\xi)-f(\eta)\right|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}&|I|^{-2}\int_I\int_I\left|f(\xi)-f(\eta)\right|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&\lesssim|I|^{-3}\int_I\int_I\int_I\left|f(\xi)-f(\eta)\right|^2\min\left(K\left(\frac{\left|\varsigma^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right),K\left(\frac{\left|\varsigma^{-1}\eta\right|}{\ell(I)}\right)\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varsigma\\&\lesssim|I|^{-3}\int_I\int_I\int_I\left|f(\xi)-f(\varsigma)\right|^2K\left(\frac{\left|\varsigma^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varsigma\end{aligned}$$

$$+|I|^{-3}\int_I\int_I\int_I\left|f(\eta)-f(\varsigma)\right|^2 K\left(\frac{\left|\varsigma^{-1}\eta\right|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varsigma$$

$$\lesssim\int_I\int_I\frac{\left|f(\xi)-f(\eta)\right|^2}{\left|\eta^{-1}\xi\right|^8}K\left(\frac{\left|\eta^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

于是

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{H})}^2\lesssim\sup_I\int_I\int_I\frac{\left|f(\xi)-f(\eta)\right|^2}{\left|\eta^{-1}\xi\right|^8}K\left(\frac{|\eta|^{-1}\xi}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

即 $Q_K(\mathbb{H})\subseteq BMO(\mathbb{H})$。

(2) 若

$$\int_0^2\frac{K(t)}{t^5}\mathrm{d}t$$

成立。设 I 为一个方体，$\eta\in\mathbb{H}$ 并满足 $|\eta|<2\ell(I)$。则

$$\int_I\left|f(\xi\eta)-f(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi\lesssim\int_I\left|f(\xi\eta)-f_{6I}\right|^2+\left|f(\xi)-f_{6I}\right|^2\mathrm{d}\xi\approx|I|\|f\|_{BMO(\mathbb{H})}^2$$

并且

$$\int_I\int_I\frac{\left|f(\xi)-f(\eta)\right|^2}{\left|\eta^{-1}\xi\right|^8}K\left(\frac{\left|\eta^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$\le\int_{|\eta|<2\ell(I)}\int_I\left|f(\xi\eta)-f(\xi)\right|^2 K\left(\frac{|\eta|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^8}$$

$$\lesssim|I|\|f\|_{BMO(\mathbb{H})}^2\int_{|\eta|<2\ell(I)}K\left(\frac{|\eta|}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^8}.$$

由于

$$\int_{|\eta|<2\ell(I)}K\left(\frac{|\eta|}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^8}\approx|I|^{-1}\int_0^2\frac{K(t)}{t^5}\mathrm{d}t,$$

我们可以得到

$$\int_I\int_I\frac{\left|f(\xi)-f(\eta)\right|^2}{\left|\eta^{-1}\xi\right|^8}K\left(\frac{\left|\eta^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\lesssim\|f\|_{BMO(\mathbb{H})}^2\int_0^2\frac{K(t)}{t^5}\mathrm{d}t.$$

因此 $BMO(\mathbb{H})\subseteq Q_K(\mathbb{H})$，根据(1)知 $BMO(\mathbb{H})=Q_K(\mathbb{H})$。

3. Carleson 测度刻画

为了研究 $Q_K(\mathbb{H})$ 的 Carleson 测度刻画，我们需要文献如下的 Hardy 型不等式，参见文献[12]。

引理 3.1 令 $0<a\le\infty,1<r<\infty$ 并且 $r'=\dfrac{r}{r-1}$。假设 σ 和 τ 在区间 $(0,a)$ 上是非负可测的。如果对于所有非负可测函数 f,

(1)

$$\int_0^a\left(\int_0^s f(t)\mathrm{d}t\right)^r \sigma(s)\mathrm{d}s \le C\int_0^a f^r(s)\tau(s)\mathrm{d}s$$

成立，当且仅当

$$\sup_{0<s<a}\left(\int_s^a \sigma(t)\mathrm{d}t\right)^{1/r}\left(\int_0^s(\tau(t))^{1-r'}\mathrm{d}t\right)^{1/r'}<\infty.$$

(2)

$$\int_0^a\left(\int_s^a f(t)\mathrm{d}t\right)^r \sigma(s)\mathrm{d}s \le C\int_0^a f^r(s)\tau(s)\mathrm{d}s$$

成立，当且仅当

$$\sup_{0<s<a}\left(\int_0^s \sigma(t)\mathrm{d}t\right)^{1/r}\left(\int_s^a(\tau(t))^{1-r'}\mathrm{d}t\right)^{1/r'}<\infty.$$

在 $\mathbb{H}$ 上，用 $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ 定义 Schwarz 函数族。接下来我们证明与权函数有关的 Stegenga 型不等式。

引理 3.2 假设 K 满足

$$\sup_{0<s<\infty}\int_0^s\frac{K(t)}{t^3}\mathrm{d}t\int_s^\infty\frac{t}{K(t)}\mathrm{d}t<\infty$$

和

$$\sup_{0<s<1}\int_s^1\frac{K(t)}{t^{13}}\mathrm{d}t\int_0^s\frac{t^{11}}{K(t)}\mathrm{d}t<\infty.$$

令 $f\in L^2_{loc}(\mathbb{H})$ 并且 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{H})$ 满足 $\int_{\mathbb{H}}\nabla\phi(\xi)\mathrm{d}\xi=0$。那么对于任意的以 ξ_0 为中心的方体 I 和 J 且 $J=3I$，存在与 f,I 和 J 无关的常数 $C>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\int_{S(I)}\left|\left(f*\nabla\phi_\rho\right)(\xi)\right|^2K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\rho}{\rho^3}\\&\le C\int_{|\eta|<2\ell(I)}\int_I\left|f(\xi\eta)-f(\xi)\right|^2K\left(\frac{|\eta|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^8}\\&\quad+C\left(\int_0^2\frac{K(t)}{t^3}\mathrm{d}t+\int_{1/8}^\infty\frac{K(t)}{t^5}\mathrm{d}t\right)|J|^{-1}\int_J\left|f(\xi)-f_J\right|^2\mathrm{d}\xi\\&\quad+C\int_0^2\frac{K(t)}{t^3}\mathrm{d}t\left(\ell(J)\int_{\mathbb{H}\setminus(2/3)J}\frac{\left|f(\xi)-f_J\right|}{\left|\xi_0^{-1}\xi\right|^5}\mathrm{d}\xi\right)^2\end{aligned}$$

成立，其中 $f_J=|J|^{-1}\int_J f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 并且 $\phi_\rho(\xi)=\rho^{-4}\phi\left(\rho^{-1}\xi\right),\rho>0$。

证明由于 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{H})$，

$$\left|\nabla\phi_\rho(\xi)\right|\le C\rho^{-5},|\xi|\le\rho;$$
$$\left|\nabla\phi_\rho(\xi)\right|\le C|\xi|^{-5},|\xi|>\rho.$$

首先令 $\xi_0=0$ 并且函数 $g(0\le g\le 1)$ 满足，当 $g\in\frac{2}{3}J$ 时，$g=1$，$\operatorname{supp}g\subseteq\frac{3}{4}J$ 并且 $\left|g(\xi)-g(\eta)\right|\le C\ell(J)^{-1}\left|\eta^{-1}\xi\right|$。记 $f=f_1+f_2+f_3$，其中 $f_1=f_J, f_2=\left(f-f_J\right)g$ 且 $f_3=\left(f-f_J\right)(1-g)$。$f_1$ 是

一个常数并且 $\int_{\mathbb{H}}\nabla\phi(\xi)\mathrm{d}\xi=0$ 表明 $f*\nabla\phi_\rho=f_2*\nabla\phi_\rho+f_3*\nabla\phi_\rho$。因为 $\int_{\mathbb{H}}\nabla\phi_\rho(\varsigma)\mathrm{d}\varsigma=0$，

$$\begin{aligned}&\int_{S(I)}\left|\left(f*\nabla\phi_\rho\right)(\xi)\right|K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\rho}{\rho^3}\\&=\int_{S(I)}\left|\int_{\mathbb{H}}\left(f\left(\xi\varsigma^{-1}\right)\nabla\phi_\rho(\varsigma)-f(\xi)\nabla\phi_\rho(\varsigma)\right)\mathrm{d}\varsigma\right|^2K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\rho}{\rho^3}.\end{aligned}$$

令 $E=\{(\varsigma',t)\in\mathbb{H},|\varsigma'|<1,|t|<1\}$ 是 $\mathbb{H}$ 上以原点为中心的单位圆柱。设 $\eta=re_\eta,e_\eta\in\partial E$ 并且 $\Omega(r)=\int_{\partial E}\left\|f\left(\cdot\eta^{-1}\right)-f\right\|_{L^2}\mathrm{d}e_\eta$。于是

$$\begin{aligned}\left\|f*\nabla\phi_\rho\right\|_{L^2}&\le C\rho^{-5}\int_{\rho E}\left\|f\left(\cdot\eta^{-1}\right)-f\right\|_{L^2}\mathrm{d}\eta+C\int_{\mathbb{H}\setminus\rho E}\left\|f\left(\cdot\eta^{-1}\right)-f\right\|_{L^2}|\eta|^{-5}\mathrm{d}\eta\\&\le C\rho^{-5}\int_0^\rho\Omega(r)r^3\mathrm{d}r+C\int_\rho^\infty\Omega(r)r^{-2}\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

利用引理 3.1，得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left\|f*\nabla\phi_\rho\right\|_{L^2}^2K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^3}\\&\le C\int_0^\infty\Omega^2(\rho)\rho^6K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{11}}+C\int_0^\infty\Omega^2(\rho)\rho^{-4}K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\\&\le C\int_{\mathbb{H}}\int_{\mathbb{H}}|f(\xi)-f(\eta)|^2K\left(\frac{\left|\eta^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\left|\eta^{-1}\xi\right|^8}.\end{aligned}$$

因此，对于 f_2，记

$$\int_{S(I)}\left|\left(f_2*\nabla\phi_\rho\right)(\xi)\right|^2K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\rho}{\rho^3}\lesssim A_1+A_2+A_3,$$

其中

$$A_1:=\int_J\int_J\left|f_2(\xi)-f_2(\eta)\right|^2K\left(\frac{\left|\eta^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\left|\eta^{-1}\xi\right|^8};$$

$$A_2:=\int_{\xi\notin J}\int_{\xi\in(3/4)J}\left|f_2(\xi)-f_2(\eta)\right|^2K\left(\frac{\left|\eta^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\left|\eta^{-1}\xi\right|^8};$$

$$A_3:=\int_{\eta\notin J}\int_{\xi\in(3/4)J}\left|f_2(\xi)-f_2(\eta)\right|^2K\left(\frac{\left|\eta^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\left|\eta^{-1}\xi\right|^8}.$$

由于

$$\left|f_2(\xi)-f_2(\eta)\right|\le|f(\xi)-f(\eta)|+C\ell(J)^{-1}\left|\eta^{-1}\xi\right|\left|f(\eta)-f_J\right|,$$

从而

$$\int_J\int_J\frac{|f(\xi)-f(\eta)|^2}{\left|\eta^{-1}\xi\right|^8}K\left(\frac{\left|\eta^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\lesssim\int_{|\eta|<2\ell(J)}\int_J|f(\xi\eta)-f(\xi)|^2K\left(\frac{|\eta|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^8}$$

且

$$\begin{aligned}&\ell(J)^{-2}\int_J\int_J\frac{\left|f(\eta)-f_J\right|^2}{\left|\eta^{-1}\xi\right|^6}K\left(\frac{\left|\eta^{-1}\xi\right|}{\ell(J)}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&\lesssim\ell(J)^{-2}\int_{|\eta|<2\ell(J)}\int_J\left|f(\xi\eta)-f_J\right|^2K\left(\frac{|\eta|}{\ell(J)}\right)\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^6}\\&\lesssim\int_{|\eta|<2\ell(J)}\int_J\left|f(\xi\eta)-f(\xi)\right|^2K\left(\frac{|\eta|}{\ell(J)}\right)\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^8}+\int_0^2\frac{K(t)}{t^3}\mathrm{d}t|J|^{-1}\int_J\left|f(\xi)-f_J\right|^2\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

所以

$$A_1\lesssim\int_{|\eta|<2\ell(J)}\int_J\left|f(\xi\eta)-f(\xi)\right|^2K\left(\frac{|\eta|}{\ell(J)}\right)\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^8}+\int_0^2\frac{K(t)}{t^3}\mathrm{d}t|J|^{-1}\int_J\left|f(\xi)-f_J\right|^2\mathrm{d}\xi.$$

接下来考虑 A_2。注意到

$$\left|\eta^{-1}\xi\right|>(1/8)\ell(J),\left|f_2(\xi)-f_2(\eta)\right|\lesssim\left|f(\eta)-f_J\right|,\xi\notin J,\eta\in(3/4)J,$$

于是

$$\begin{aligned}A_2&=\int_{\xi\notin J}\int_{\eta\in(3/4)J}\left|f_2(\xi)-f_2(\eta)\right|^2K\left(\frac{\left|\eta^{-1}\xi\right|}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\left|\eta^{-1}\xi\right|^8}\\&\lesssim\int_{\eta\in(3/4)J}\left|f(\eta)-f_J\right|^2\mathrm{d}\eta\int_{|\zeta|>(1/8)\ell(J)}K\left(\frac{|\zeta|}{\ell(J)}\right)\frac{\mathrm{d}\zeta}{|\zeta|^8}\\&\lesssim\int_{1/8}^{\infty}\frac{K(t)}{t^5}\mathrm{d}t|J|^{-1}\int_J\left|f(\eta)-f_J\right|^2\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

用与 A_2 相同的方法，可以得到

$$A_3\lesssim\int_{1/8}^{\infty}\frac{K(t)}{t^5}\mathrm{d}t|J|^{-1}\int_J\left|f(\eta)-f_J\right|^2\mathrm{d}\eta.$$

对于 f_3，由于 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{H})$，

$$\left|f_3*\nabla\phi_\rho\right|=\left|\int_{\mathbb{H}}f_3(\eta)\left(\nabla\phi_\rho\left(\eta^{-1}\xi\right)\right)\mathrm{d}\eta\right|\le C\int_{\mathbb{H}\setminus(2/3)J}\frac{\left|f(\eta)-f_J\right|}{\left(\rho+\left|\eta^{-1}\xi\right|\right)^5}\mathrm{d}\eta.$$

如果 $(\xi,\rho)\in S(I)$ 并且 $\eta\in\mathbb{H}\setminus(2/3)J$，则有 $\left(\rho+\left|\eta^{-1}\xi\right|\right)^5\le C|\eta|^{-5}$。因此

$$\begin{aligned}&\int_{S(I)}\left|\left(f_3*\phi_\rho\right)(\xi)\right|^2K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\rho}{\rho^3}\\&\le C\int_{S(I)}K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\rho}{\rho^3}\left(\int_{\mathbb{H}\setminus(2/3)J}\frac{\left|f(\eta)-f_J\right|}{|\eta|^5}\mathrm{d}\eta\right)^2\\&=C\int_0^2\frac{K(t)}{t^3}\mathrm{d}t\left(\ell(I)\int_{\mathbb{H}\setminus(2/3)J}\frac{\left|f(\eta)-f_J\right|}{|\eta|^5}\mathrm{d}\eta\right)^2.\end{aligned}$$

综合以上不等式，可得所证。

定理 3.3 假设 K 满足(2)，$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{H})$ 满足 $\int_{\mathbb{H}}\nabla\phi(\xi)\mathrm{d}\xi=0$。令 $f\in L^2_{loc}(\mathbb{H})$ 且 $\int_{\mathbb{H}}\frac{f(t)}{1+|t|^{2t+3}}\mathrm{d}t<\infty$，则 $f\in Q_K(\mathbb{H})$ 当且仅当存在一个常数 $C>0$ 满足

$$\sup_I\int_{S(I)}\left|\left(f*\nabla\phi_\rho\right)(\xi)\right|^2K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\rho}{\rho^{2n+1}}<\infty. \tag{3}$$

证明 $F(\xi,\rho)$ 表示 $f*\phi_\rho(\xi)$ 并且 $\lim_{\rho\to0}F(\xi,\rho)=F(\xi,0)=f(\xi)$。首先，若 $f\in Q_K(\mathbb{H})$。由定理 2.4，我们可以得到 $f\in BMO(\mathbb{H})$ 且 $\|f\|_{BMO(\mathbb{H})}\le C\|f\|_{Q_K(\mathbb{H})}$。令 I 与 J 是 $\mathbb{H}$ 上以原点为中心的方体，满足 $J=3I$，则 $\ell(J)=\ell(3I)$。那么

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{H}\setminus\frac{2}{3}J}\frac{\left|f(\xi)-f_J\right|}{|\xi|^5}\mathrm{d}\xi\\
&\lesssim\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^k\ell(J)\le|\xi|\le2^{k+1}\ell(J)}\frac{\left|f(\xi)-f_J\right|}{|\xi|^5}\mathrm{d}\xi\\
&\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^k\ell(J)\right)^{-5}\int_{2^{k+1}J}\left|f(\xi)-f_{2^{k+1}J}\right|\mathrm{d}\xi+\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^k\ell(J)\right)^{-5}\int_{2^{k+1}J}\left|f_{2^{k+1}J}-f_J\right|\mathrm{d}\xi\\
&\le\sum_{k=1}^{\infty}2^{1-4k}\ell(J)^{-1}\|f\|_{BMO(\mathbb{H})}+C\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)2^{1-4k}\ell(J)^{-1}\|f\|_{BMO(\mathbb{H})}\\
&\lesssim\ell(J)^{-1}\|f\|_{BMO(\mathbb{H})}.
\end{aligned}$$

通过引理 3.2 我们可以推出

$$\begin{aligned}
&\int_{S(I)}\left|\left(f*\nabla\phi_\rho\right)(\xi)\right|^2K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\rho}{\rho^3}\\
&\le\|f\|^2_{Q_K(\mathbb{H})}+C\left(\int_0^2\frac{K(t)}{t^3}+\int_{1/8}^{\infty}\frac{K(t)}{t^5}\mathrm{d}t\right)\|f\|^2_{BMO(\mathbb{H})}+C\int_0^2\frac{K(t)}{t^3}\mathrm{d}t\|f\|^2_{BMO(\mathbb{H})}\\
&\le C\|f\|^2_{Q_K(\mathbb{H})}.
\end{aligned}$$

反过来，若(3)成立。要证 $f\in Q_K(\mathbb{H})$，只需证

$$\int_{|\eta|_\infty<\ell(I)}\int_I\left|f(\xi\eta)-f(\xi)\right|^2K\left(\frac{|\eta|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^8}\le C.$$

记 $\left|f(\xi\eta)-f(\xi)\right|\le A_1+A_2+A_3$，其中 $A_1=\left|f(\xi\eta)-F(\xi\eta,|\eta|)\right|$，$A_2=\left|F(\xi\eta,|\eta|)-F(\xi,|\eta|)\right|$，并且 $A_3=\left|F(\xi,|\eta|)-f(\xi)\right|$。由于

$$\left|F(\xi,|\eta|)-f(\xi)\right|=\left|F(\xi,|\eta|)-F(\xi,0)\right|\le\int_0^{|\eta|}\left|\nabla F(\xi,r)\right|\mathrm{d}r,$$

那么对于 A_3，利用 Minkowski 不等式，

$$\left(\int_I|A_3|^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}\le\left(\int_I\left(\int_0^{|\eta|}\left|\nabla F(\xi,r)\right|\mathrm{d}r\right)^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}\le\int_0^{|\eta|}\left(\int_I\left|\nabla F(\xi,r)\right|^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}\mathrm{d}r.$$

DOI: 10.12677/pm.2022.125089

结合引理 3.1，可以推出

$$\begin{aligned}&\int_{|\eta|_\infty<\ell(I)}\frac{1}{|\eta|^8}K\left(\frac{|\eta|}{\ell(I)}\right)\left(\int_I|A_3|^2\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta\\&\le C\int_0^{\ell(I)}\frac{1}{\rho^5}K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\left(\int_0^\rho\left(\int_I|\nabla F(\xi,r)|^2\,\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}\mathrm{d}r\right)^2\mathrm{d}\rho\\&\le\int_{S(I)}|\nabla F(\xi,\rho)|^2K\left(\frac{\rho}{\ell(I)}\right)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\rho}{\rho^3}\le C.\end{aligned}$$

又因为

$$\int_I|A_1|^2\,\mathrm{d}\xi=\int_{I+\eta}|A_3|^2\,\mathrm{d}\xi\le\int_{3I}|A_3|^2\,\mathrm{d}\xi,$$

对于任意满足 $|\eta|_\infty<\ell(I)$ 的 η，有

$$\int_{|\eta|_\infty<\ell(I)}\frac{1}{|\eta|^8}K\left(\frac{|\eta|}{\ell(I)}\right)\left(\int_I|A_1|^2\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta\le C.$$

对于 A_2，易得

$$A_2\le C\int_0^{|\eta|}\left|\nabla F\left(\xi re_\eta,|\eta|\right)\right|\mathrm{d}r,e_\eta\in E,$$

并且由 Minkowski 不等式

$$\left(\int_I|A_2|^2\,\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}\le C|\eta|\left(\int_{3I}|\nabla F(\xi,|\eta|)|^2\,\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}.$$

所以

$$\int_{|\eta|_\infty<\ell(I)}\frac{1}{|\eta|^8}K\left(\frac{|\eta|}{\ell(I)}\right)\left(\int_I|A_2|^2\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta\le C.$$

因此通过对 A_1,A_2 和 A_3 的估计，

$$\int_{|\eta|_\infty<\ell(I)}\int_I|f(\xi\eta)-f(\xi)|^2K\left(\frac{|\eta|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^8}\le C,$$

即 $f\in Q_K(\mathbb{H})$。

致　谢

作者衷心感谢李澎涛教授的指导与建议。

基金项目

山东省自然科学基金(项目编号：ZR2020MA004)；国家自然科学基金(项目编号：11871293)。

参考文献

[1] Xiao, J. (2007) Homothetic Variant of Fractional Sobolev Space with Application to Navier-Stokes System. *Dynamics of Partial Differential Equations*, **2**, 227-245. https://doi.org/10.4310/DPDE.2007.v4.n3.a2

[2] Aulaskari, R., Xiao, J. and Zhao, R. (1995) On Subspaces and Subsets of BMOA and UBC. *Analysis*, **15**, 101-121. https://doi.org/10.1524/anly.1995.15.2.101

[3] Wu, Z. and Xie, C. (2003) Q Spaces and Morrey Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **201**, 282-297.

https://doi.org/10.1016/S0022-1236(03)00020-X

[4] Essén, M., Janson, S., Peng, Li. and Xiao, J. (2000) Q Spaces of Several Real Variables. *Indiana University Mathematics Journal*, **49**, 575-616. https://doi.org/10.1512/iumj.2000.49.1732

[5] Dafni, G. and Xiao, J. (2004) Some New Tent Spaces and Duality Theorems for Fractional Carleson Measures and $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$. *Journal of FunctionalAnalysis*, **208**, 377-422. https://doi.org/10.1016/S0022-1236(03)00181-2

[6] Wu, Z. and Xie, C. (2003) Q Spaces and Morrey Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **201**, 282-297. https://doi.org/10.1016/S0022-1236(03)00020-X

[7] Li, P. and Zhai, Z. (2010) Well-Posedness and Regularity of Generalized Navier-Stokes Equations in Some Critical Q-Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **259**, 2457-2519. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.07.013

[8] Xiao, J. (2007) Homothetic Variant of Fractional Sobolev Space with Application to Navier-Stokes System. *Dynamics of Partial Differential Equations*, **4**, 227-245. https://doi.org/10.4310/DPDE.2007.v4.n3.a2

[9] 王春杰. 复区域上的几个问题研究[D]: [博士学位论文]. 北京: 北京大学数学系, 2003.

[10] 董建锋. H-型群上的 Q 空间与 Poisson 积分[D]: [硕士学位论文]. 北京: 北京大学数学系, 2004.

[11] Zhao, K. (2016) Hardy-Hausdorff Space on the Heisenberg Group. *Science China Mathematics*, **59**, 2167-2184. https://doi.org/10.1007/s11425-016-0062-9

[12] Kufner, A. and Persson, L.-E. (2003) Weighted Inequalities of Hardy Type. World Scientific Publishing, River Edge, NJ, USA. https://doi.org/10.1142/5129