Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 911-918
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126100

阶为三的次幂倍奇素数幂的边本原图

赖子峰

云南财经大学，统计与数学学院，云南 昆明

收稿日期：2022年4月30日；录用日期：2022年6月2日；发布日期：2022年6月9日

摘 要

称一个图是边本原的，如果其全自同构群在其边集上的作用是本原的。通过Li的研究成果，我们可以得到包含子群的指数为三的次幂倍奇素数幂的本原置换群，并且将连通的非平凡边本原图分为了三种情形。本文我们考虑顶点本原的情形，刻画阶为三的次幂倍奇素数幂乘积的边本原图。最后我们可以构造出五个新的边本原图例子。

关键词

边本原图，本原置换群，几乎单型

Edge-Primitive Graphs of Order Three to the Power Times an Odd Prime Power

Zifeng Lai

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: Apr. 30th, 2022; accepted: Jun. 2nd, 2022; published: Jun. 9th, 2022

Abstract

A graph is called edge-primitive, if its automorphism group acts primitively on its edge set. Through Li's research findings, we can obtain the primitive permutation group with a subgroup of index three to the power times an odd prime power and divide the connected non-trivial edge-primitive graphs into three cases. In this paper, edge-primitive graphs of order three to the power times an odd prime

文章引用: 赖子峰. 阶为三的次幂倍奇素数幂的边本原图[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 911-918.
DOI: 10.12677/pm.2022.126100

power are characterized by considering the case of vertex-primitive. Finally, we can construct five new examples of edge-primitive graphs.

Keywords

Edge-Primitive Graph, Primitive Permutation Group, Almost Simple Type

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文讨论的都是有限无向，无自环和重边的图。

对于一个非空图Γ，我们用$V\Gamma$，$E\Gamma$，$A\Gamma$和$G\le \mathrm{Aut}(\Gamma)$分别表示它的顶点集、边集、弧集和全自同构群，记$|V\Gamma|$和$val(\Gamma)$分别为图$\Gamma$的阶和度数。给定顶点$\alpha\in V\Gamma$，与顶点$\alpha$邻接的点集称为$\alpha$的邻域，记为$\Gamma(\alpha)$，$|\Gamma(\alpha)|$称为点$\alpha$的度数。我们称顶点集的一个$s+1$序列$(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$为$\Gamma$的一条$s$-弧，如果任意相邻两点邻接且$\alpha_{i+1}\ne\alpha_{i-1}$，其中$1\le i\le s-1$。设$G\le \mathrm{Aut}(\Gamma)$，若$G$在$V\Gamma$、$E\Gamma$、$A\Gamma$上的作用传递，则分别称$\Gamma$为$G$-点传递图、$G$-边传递图和$G$-弧传递图。

边本原图是弧传递图[1]的一个特殊子类，因此其具有特殊性但不失普遍性。我们知道除了星图外边本原图都是弧传递图，因此我们称一个边本原图是非平凡的，如果其是连通的弧传递图并且其度数至少是3。相比于弧传递图，边本原图的例子十分稀少，因此刻画边本原图是一项有意义的工作。

许多著名的图都是边本原的。如著名群论学家 Weiss [2]于1973年对3度边本原图的完全分类，其中有6阶的完全二部图，14阶的 Heawood 图，30阶的 Tutte-Coxeter 图以及102阶的 Biggs-Smith 图。约30年后，Li 等人重新开始对边本原图的研究工作。如 M. Giudici 和 Li [3]于2010年系统地分析了边本原图可能的点作用和边作用，并且决定了基柱为$PSL(2,q),(q\ne 2,3)$的G-边本原图。Li 和 Zhang [4]于2011年决定了边本原s-弧传递图的分类($s\ge 4$)。Feng，Li 和 Guo [5] [6]于2011年分别决定了度数为4和5的边本原图。Pan 和 Wu [7]于2017年刻画了6度的边本原图，并且完全分类了边稳定子群为可解的情形。此外，近几年，对具有特定阶的边本原图的研究取得了创新性的成果。如 Pan 和 Wu [8] [9]于2019年完全分类阶为素数幂和二倍素数幂的边本原图。在此基础上，我们研究的一个目的是去寻找具有其他特定阶的边本原图例，因此本文的主要内容是刻画阶为三的次幂倍奇素数幂的边本原图。

本文所使用的符号都是标准的。如 Atlas [10]，我们有时用正整数n来表示n阶循环群$\mathbb{Z}_n$。对于一个素数幂$q=p^n$，用p^n表示q阶的初等交换群。其他有限群符号可参考[11]。对于两个群N和H，我们用$N\times H$表示N和H的直积，用$N.H$表示N被H扩张，如果这个扩张是可裂的，则记为$N:H$。用$\mathrm{Aut}(T)$和$\mathrm{Out}(T)$分别表示为群T的全自同构群和外自同构群。用$\mathcal{G}(a,b)$表示阶为a且度数为b的G-边本原图。下面是本文的主要结果。

定理 1.1 设Γ是阶为$3^a p^b$的G-边本原图，其中a和b为正整数，p为奇素数且$p\ne 3$。如果G在$V\Gamma$上本原，$G\le \mathrm{Aut}(\Gamma)$。则图$\Gamma$可能是表1所列的其中一种情形。

本文的结构如下：在第二节，给出群论和图论中的相关定义和引理。在第三节，给出**定理 1.1** 中图例的证明。

Table 1. Edge-primitive graphs of order $3^a p^b$

表 1. 阶为 $3^a p^b$ 的边本原图

Γ	G	G_v	G_e	s	*conditions*
$\mathcal{G}(57,6)$	$PSL_2(19)$	A_5	D_{20}	2	
$\mathcal{G}(117,36)$	$PSL_4(3)$	$PSU_4(2):2$	$(4\times A_6):2$	1	
$\mathcal{G}(891,512)$	$PSU_6(2).o$	$2^9:PSL_3(4).o$	$(PSL_3(4):2).o$	1	$1\le o\le S_3$
$\mathcal{G}(351,126)$	$P\Omega_7(3).o$	$(2PSU_4(3):2).o$	$((2^2\times PSU_4(2)):2).o$	1	$1\le o\le \mathbb{Z}_2$
$\mathcal{G}(1107,378)$	$P\Omega_8^-(3).o$	$(\Omega_7(3):2).o$	$((4\times PSL_4(3)):2).o$	1	$1\le o\le \mathbb{Z}_2^2$

2. 预备知识

下面首先给出有限群论中的一个经典结论。

引理 2.1 [12]设 p 和 q 是素数，a 和 b 是正整数，那么阶为 $p^a q^b$ 的群是可解群。

考虑群在集合上的作用，我们给出秩和次轨道的定义。

定义 2.2 [13]设 G 是集合 Ω 上的置换群，对任意的 $\alpha\in\Omega$，我们称点 α 的稳定子群 G_α 在 $\Omega\setminus\{\alpha\}$ 上的轨道为 G 的一个次轨道。G 的次轨道个数称为 G 的秩。当次轨道的长度大于 1 时，我们称这是 G 的非平凡次轨道。

我们判断 G 在集合 Ω 上是否本原，常通过下面的引理进行判断。

引理 2.3 设 G 在集合 Ω 上传递，对任意的 $\alpha\in\Omega$，则 G 在 Ω 上本原当且仅当点 α 的稳定子群 G_α 是 G 的极大子群。

本原置换群的分类在[14]中得到解决，则我们可以得到下面的关键性引理：

引理 2.4 设 G 是集合 Ω 上的本原置换群，令 $N=Soc(G)=T^k$ 为 G 的唯一极小正规子群，T 为非交换单群，给定 $v\in\Omega$。则 G 为以下情形之一：

1) 仿射型(HA)：如果 $N\lhd G\le N:\mathrm{Aut}(T)\cong\mathbb{Z}_p^d:GL(d,q)=AGL(d,q)$。

2) 几乎单型(AS)：如果 $N\lhd G\le \mathrm{Aut}(N)$，$N=T$。

3) 单对角型(SD)：如果 N 包含一个正规子群 $H\cong T^{k-1}$ 作用在 Ω 上是正则的并且 $N_v\cong T$。

4) 扭圈积型(TW)：如果 N 在 Ω 上的作用是正则的。

5) 乘积作用型(PA)：如果 $N_v\neq 1$，N 不包含正规子群作用在 Ω 上正则。

引理 2.5 [3]设图 Γ 是一个连通的非平凡 G-边本原图。则 Γ 是一个 G-弧传递图，并且为下列情形之一：

1) Γ 为 G-顶点本原。

2) Γ 为 G-顶点二部本原。

3) Γ 为 G-边本原图 Σ 的 spread 且 Σ 为 G-非局部本原图。

本文的主要研究内容即是刻画上述引理情形(1)中的边本原图。下面给出本文研究的关键性引理。

引理 2.6 在**定理 1.1** 中的 G 为几乎单型。

证明 令 $N=Soc(G)=T^k$ 为 G 的基柱。由**引理 2.4** 可知则 G 可能为五种情形，下面逐一分析：

1) 若 G 为 HA 型，则 $N\cong\mathbb{Z}_p^k$ 在 $V\Gamma$ 上正则，于是有 $p^k=|N|=|V\Gamma|=3^a p^b$，故 $p=3$，舍去。

2) 若 G 为 SD 型，则有 $|N:N_v|=|T|^{k-l}$，其中 T 为非交换单群，$v\in V\Gamma$，$1\le l\le k$。由 G 在 $V\Gamma$ 上本原，则 N 在 $V\Gamma$ 上传递，因此有 $3^a p^b=|V\Gamma|=|N:N_v|=|T|^{k-l}$。而由**引理 2.1** 可知 T 为可解群，矛盾。

3) 若 G 为 TW 型，则 N 在 $V\Gamma$ 上正则，则有 $3^a p^b = |V\Gamma| = |N| = |T|^k$。而由**引理 2.1** 可知 T 为可解群，矛盾。

4) 若 G 为 PA 型，则 $N = T^l$，其中 $l \ge 2$，由 G 在 $V\Gamma$ 上本原，则 N 在 $V\Gamma$ 上传递，因此有 $3^a p^b = |V\Gamma| = |N| = |T|^l$，而由**引理 2.1** 可知 T 为可解群，矛盾。

证毕，故 G 只可能为几乎单型。

下面引理给出非平凡 G-边本原图存在的一个必要条件。

引理 2.7 设图 Γ 为一个非平凡 G-边本原图，令 $e = \{u,v\} \in E\Gamma$。则 $|G_e| < |G_v|$ 且 $|G_e|/2$ 整除 $|G_v|$。

证明 由**引理 2.5** 可知 Γ 是连通的弧传递图，则有 $G_e = G_{uv}.\mathbb{Z}_2$ 并且 Γ 的度数 $val(\Gamma) = |G_v : G_{uv}| \ge 3$。并且有 $|G_e| = 2|G_{uv}| \le 2|G_v|/3 < |G_v|$，$|G_e|/2 = |G_{uv}|$ 整除 $|G_v|$。

Li 等人在[15]中分类了包含子群的指数为两个素数幂的乘积的本原置换群。从而我们可读出包含子群的指数为三的次幂倍奇素数幂的本原置换群。

本文我们仅考虑[15]中子群的指数是一个常数的情形，可得到下述的引理：

引理 2.8 设 T 是几乎单型的本原置换群，H 是 T 的子群且满足 $n = |T : H| = 3^a p^b$，其中 p 为奇素数且 $p \ne 3$，a 和 b 为正整数。则二元组 (T,H) 如表 2 所列。

Table 2. Non-abelian simple groups with a subgroup of index $3^a p^b$

表 2. 具有子群的指数为 $3^a p^b$ 的非交换单群

Row	T	H	n
1	A_7	$PSL_2(7)$	$3{\cdot}5$
2	A_8	$2^3 : PSL_3(2)$ $2^4 : (S_3 \times S_3)$	$3{\cdot}5$ $3^4{\cdot}5$
3	McL	M_{22}	$3^4{\cdot}5^2$
4	$PSL_2(19)$	A_5	$3{\cdot}19$
5	$PSL_4(3)$	$PSU_4(2):2$	$3^2{\cdot}13$
6	$PSp_6(2)$	$2^5 : S_6$ $2^6 : PSL_3(2)$	$3^2{\cdot}7$ $3^3{\cdot}5$
7	$PSU_3(3)$	$4^2 : S_3$	$3^2{\cdot}13$
8	$PSU_4(3)$	$2^4 : A_6$	$3^4{\cdot}7$
9	$PSU_5(2)$	$2^{4+4} : (3 \times A_5)$	$3^3{\cdot}11$
10	$PSU_6(2)$	$2^9 : PSL_3(4)$	$3^4{\cdot}11$
11	$P\Omega_7(3)$	$PSp_6(2)$ $2^6 : A_7$ $2PSU_4(3):2$	$3^5{\cdot}13$ $3^7{\cdot}13$ $3^3{\cdot}13$
12	$P\Omega_8^+(2)$	$2^6 : A_8$	$3^3{\cdot}5$
13	$P\Omega_8^+(3)$	$P\Omega_8^+(2)$	$3^7{\cdot}13$

Continued

14	$P\Omega_8^-(3)$	$P\Omega_7(3):2$	$3^3{\cdot}41$
15	$G_2(3)$	$PSU_3(3):2$ $2^3:PSL_3(2)$	$3^3{\cdot}13$ $3^5{\cdot}13$

3. 定理 1.1 的证明

在本节，我们考虑 G 在 $V\Gamma$ 上本原。通过**引理 2.6** 可知 G 是 AS 型的。令 $T=Soc(G)$，由 T 在 $V\Gamma$ 上传递，则 $|T:T_v|=3^a p^b$，$v\in V\Gamma$。由**引理 2.8** 可知 $(T:T_v)$ 即为表 2 所列。由 G 在 $E\Gamma$ 的作用是忠实的，则 G 和 T 都可以看成 $E\Gamma$ 上的本原置换群。令 $e=\{u,v\}\in E\Gamma$，由**引理 2.3** 可知 G-边本原图的存在性需考虑边稳定子群 G_e 在 G 中是否极大。注：下文的证明将多次使用数学工具：Magma [16]，Atlas [10]。

定理 1.1 的证明：

Row 1：设 $(T,T_v)=(A_7,PSL_2(7))$，此时 $G\cong T.o$，$o\le \mathrm{Out}(A_7)\cong\mathbb{Z}_2$。由 Magma 计算可知 T 在 $V\Gamma$ 上的秩为 2，非平凡次轨道的长度为 14，则 $|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=12|o|$，$|G_e|=24|o|$。而由 Atlas 知，$G$ 的极大子群的阶至少为 $168|o|$，故 G_e 在 G 中非极大，无边本原图例。

Row 2：设 $(T,T_v)=(A_8,2^3:PSL_3(2))$，此时 $G\cong T.o$，$o\le\mathrm{Out}(A_8)\cong\mathbb{Z}_2$。分为两种情形讨论：1) 当 $G\cong A_8.2\cong S_8$ 时，由 Magma 计算可知，此时 S_8 没有指数为 15 的子群，故舍去。2) 当 $G\cong A_8$ 时，由 Magma 计算可知，G 在 $V\Gamma$ 上的秩为 2，非平凡次轨道的长度为 14，故 $|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=96$，$|G_e|=192$。由 Atlas 可知 A_8 的极大子群的阶至少为 360，故舍去。

设 $(T,T_v)=(A_8,2^4:(S_3\times S_3))$，分为两种情形讨论：1) 当 $G\cong A_8$ 时，由 Magma 计算可知，G 在 $V\Gamma$ 上的秩为 3，非平凡次轨道的长度为 16 或 18。故 $|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=36$ 或 32，$|G_e|=72$ 或 64，由 Atlas 可知 A_8 的极大子群阶数最小为 360，舍去。2) 当 $G\cong A_8.2\cong S_8$ 时，同理可知 G 在 $V\Gamma$ 上的秩为 2，非平凡次轨道的长度为 14，故 $|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=72$ 或 64，$|G_e|=144$ 或 128。由 Magma 计算可知 S_8 的极大子群的阶至少为 336，故舍去。

Row 3：设 $(T,T_v)=(McL,M_{22})$，此时 $G\cong T.o$，$o\le\mathrm{Out}(McL)\cong\mathbb{Z}_2$。1) 当 $G\cong McL.2$ 时，由 Magma 计算可知，此时 $McL.2$ 没有指数为 2025 的子群，舍去。2) 当 $G\cong McL$ 时，由 Magma 计算可知，G 在 $V\Gamma$ 上的秩为 4，非平凡次轨道的长度为 330，462，1232，故 $|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=1344,960,360$，$|G_e|=2688,1920,720$。而由 Atlas 可知 McL 的极大子群的阶至少为 3000，舍去。

Row 4：设 $(T,T_v)=(PSL_2(19),A_5)$，此时 $G\cong T.o$，$o\le\mathrm{Out}(PSL_2(19))\cong\mathbb{Z}_2$。由文献[3]可知当 $G\cong PSL_2(19)$ 时，存在 2-弧传递的边本原图，记为 $\mathcal{G}(57,6)$。

Row 5：设 $(T,T_v)=(PSL_4(3),PSU_4(2):2)$，此时 $G\cong T.o$，$o\le\mathrm{Out}(PSL_4(3))\cong\mathbb{Z}_2^2$。1) $G\cong PSL_4(3).2$ 或 $G\cong PSL_4(3).2^2$ 时，由 Magma 计算可知，G 不存在指数为 117 的子群，故舍去。2) 当 $G\cong PSL_4(3)$ 时，由 Magma 计算可知 G 在 $V\Gamma$ 上的秩为 3，非平凡次轨道的长度为 36 或 80，故此时可计算得 $|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=1440$ 或 648，$|G_e|=2880$ 或 1296。由 Atlas 可知 $PSL_4(3)$ 恰有阶为 2880 的极大子群。故此时存在边本原图，记为 $\mathcal{G}(117,36)$，并且由[17]可知，该图是 1-弧传递的。

Row 6：设 $(T,T_v)=(PSp_6(2),2^6:PSL_3(2))$，此时 $G\cong T.o=T=PSp_6(2)$。由 Magma 计算可知 $PSp_6(2)$ 在 $V\Gamma$ 上的秩为 4，非平凡次轨道的长度为 14，56，64。故此时可计算得 $|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=768,192,168$，$|G_e|=1536,384,336$。由 Atlas 知，$PSp_6(2)$ 没有阶为 $|G_e|$ 的极大子群，故舍去。

设 $(T,T_v)=(PSp_6(2),2^5:S_6)$，同理 $G\cong PSp_6(2)$。由 Magma 计算可知，$PSp_6(2)$ 在 $V\Gamma$ 上的秩为 3，

非平凡次轨道的长度为 30 或 32。故此时可计算得$|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=768$ 或 720，$|G_e|=1536$ 或 1440，由 Atlas 知，$PSp_6(2)$ 没有阶为$|G_e|$的极大子群，故舍去。

Row 7：设$(T,T_v)=(PSU_3(3),4^2.S_3)$，此时$G\cong T.o$，$o\le \mathrm{Out}(PSU_3(3))\cong \mathbb{Z}_2$。由**引理 2.7** 可知，此时需满足$|G_e|<|G_v|=96|o|$。而由 Atlas 可知，此时$G_v$恰好为$G$中阶最小的极大子群，故舍去。

Row 8：设$(T,T_v)=(PSU_4(3),2^4:A_6)$，此时$G\cong T.o$，$o\le \mathrm{Out}(PSU_4(3))\cong D_8$。1) 当$G\cong PSU_4(3).D_8$时，此时由 Magma 计算可知，$G$没有指数为 567 的子群，舍去。2) 当$G\cong T.o$，$1\le o\le \mathbb{Z}_4$时，可以通过 Magma 计算可知，$G$在$V\Gamma$上的秩为 5，此时非平凡次轨道的长度为 30，96，120，320。故此时可计算得$|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)\le 192|o|$，$|G_e|\le 384|o|$。而由 Magma 计算$G$的极大子群$L$的阶$|L|\ge 720|o|$，故舍去。

Row 9：设$(T,T_v)=(PSU_5(2),2^{4+4}:(3\times A_5))$，此时$G\cong T.o$，$o\le \mathrm{Out}(PSU_5(2))\cong \mathbb{Z}_2$。分两种情形讨论：1) 当$G\cong PSU_5(2)$时，由 Magma 计算可知，此时$G$在$V\Gamma$上的秩为 3，此时非平凡次轨道的长度为 40 或 256。故此时可计算得$|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=1152$ 或 180，$|G_e|=2304$ 或 360。由 Atlas 可知，$PSU_5(2)$没有阶为$|G_e|$的极大子群，舍去。2) 当$G\cong PSU_5(2).2$时，同理可求得$|G_e|=4608$ 或 720。由 Magma 计算可知，$PSU_5(2).2$也没有阶为$|G_e|$的极大子群，舍去。

Row 10：设$(T,T_v)=(PSU_6(2),2^9:PSL_3(4))$，此时$G\cong T.o$，$o\le \mathrm{Out}(PSU_6(2))\cong S_3$。分两种情形讨论：1) 当$G\cong PSU_6(2)$时，由 Magma 计算可知，此时$G$在$V\Gamma$上的秩为 4，此时非平凡次轨道的长度为 42，336，512。故此时可计算得$|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=245,760,30,720,20,160$，$|G_e|=491520,61440,40320$。由 Atlas 可知，此时$PSU_6(2)$有阶为 40,320 的极大子群。故此时存在边本原图，记为$\mathcal{G}(891,512)$，并且由[17]可知，该图是 1-弧传递的。2) 当$G\cong T.o$，$1<o\le S_3$时。由 Magma 计算易验证，仅存在与 1) 同构的边本原图例子。

Row 11：设$(T,T_v)=(P\Omega_7(3),PSp_6(2))$，此时$G\cong T.o$，$o\le \mathrm{Out}(P\Omega_7(3))\cong \mathbb{Z}_2$。类似地，分两种情形讨论：1)当$G\cong P\Omega_7(3)$时，由 Magma 计算可知，此时$G$在$V\Gamma$上的秩为 4，此时非平凡次轨道的长度为 288，630，2240。故此时可计算得$|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=5040,2304,648$，$|G_e|=10080,4608,1296$。而由 Atlas 可知，$P\Omega_7(3)$的极大子群的阶至少为 13824，舍去。2) 当$G\cong P\Omega_7(3).2$时，由 Magma 计算可知，此时$P\Omega_7(3).2$没有指数为 3159 的子群，舍去。

设$(T,T_v)=(P\Omega_7(3),2PSU_4(3):2)$，类似地，首先考虑 1) 当$G\cong P\Omega_7(3)$时，由 Magma 计算可知，此时$G$在$V\Gamma$上的秩为 3，非平凡次轨道的长度为 126 或 224。故此时可计算得$|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=103,680$ 或 58,320，$|G_e|=207,360$ 或 116,640。由 Atlas 可知，$P\Omega_7(3)$恰有阶为 207360 的极大子群。故此时存在边本原图，记为$\mathcal{G}(351,126)$，并且由[17]可知，该图是 1-弧传递的。2) 当$G\cong P\Omega_7(3).2$时，由 Magma 计算易验证，此时仅存在与 1) 同构的边本原图例。

设$(T,T_v)=(P\Omega_7(3),2^6:A_7)$，此时$G\cong T.o$，$o\le \mathrm{Out}(P\Omega_7(3))\cong \mathbb{Z}_2$，若$G_e$为$G$的极大子群，通过 Magma 计算并且由 Atlas 可知，此时$|G_e|$只能为$13,824|o|$或$17,280|o|$，而$|G_v|=|2^6:A_7||o|=161,280$。计算可知$|G_e|/2$不整除$|G_v|$，这与**引理 2.7** 矛盾，舍去。

Row 12：设$(T,T_v)=(P\Omega_8^+(2),2^6:A_8)$，此时$G\cong T.o$，$o\le \mathrm{Out}(P\Omega_8^+(2))\cong S_3$。分两种情形讨论：1) 当$G\cong T.o$，$1\le o\le \mathbb{Z}_2$时，由 Magma 计算可知$G$在$V\Gamma$上的秩为 3，非平凡次轨道的长度为 64 或 70。故此时可计算得$|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=20,160$ 或 18,432，$|G_e|=40,320$ 或 36,864。而由 Atlas 可知，G没有阶为$|G_e|$的极大子群，舍去。2) 当$G\cong T.o$，$\mathbb{Z}_3\le o\le S_3$时，G没有指数为 135 的子群，舍去。

Row 13：设$(T,T_v)=(P\Omega_8^+(3),P\Omega_8^+(2))$，此时$G\cong T.o$，$o\le \mathrm{Out}(P\Omega_8^+(3))\cong S_4$。首先考虑：1) 当有$G\cong P\Omega_8^+(3)$，此时由 Magma 计算可知，$G$在$V\Gamma$上的秩为 6，非平凡次轨道的长度为 960、960、960、3150、22,400。故此时可计算得$|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=181,440$，55,296 或 7776，$|G_e|=362,880$，110,592 或 15,552。由 Atlas 可知，$P\Omega_8^+(3)$没有阶为$|G_e|$的极大子群，舍去。2) $G\cong T.o$，$1<o\le S_4$。类似情形 1)，

由 Magma 易验证也无 G_e 在 G 中极大，舍去。

Row 14：设 $(T,T_v)=\left(P\Omega_8^-(3),\Omega_7(3):2\right)$，此时 $G\cong T.o$， $o\le \mathrm{Out}\left(P\Omega_8^-(3)\right)\cong \mathbb{Z}_2^2$。分两种情形讨论：1) 当 $G\cong P\Omega_8^-(3)$ 时，由 Magma 计算可知，G 在 $V\Gamma$ 上的秩为 3，非平凡次轨道的长度为 378 或 728。故此时计算得 $|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=24,261,120$ 或 $12,597,120$， $|G_e|=48,522,240$ 或 $25,194,240$。由 Atlas 知 $P\Omega_8^-(3)$ 恰好有阶为 48522240 的极大子群。故存在边本原图，记为 $\mathcal{G}(1107,378)$，并且由[17]可知，该图是 1-弧传递的。2) 当 $G\cong T.o$， $1<o\le \mathbb{Z}_2^2$ 时，由 Magma 验证可知仅存在与 1) 同构的边本原图例。

Row 15：设 $(T,T_v)=\left(G_2(3),PSU_3(3):2\right)$，此时 $G\cong T.o$，$o\le \mathrm{Out}\left(G_2(3)\right)\cong \mathbb{Z}_2$。由 Magma 计算可知，$G$ 在 $V\Gamma$ 上的秩为 3，非平凡次轨道的长度为 126 或 224。故此时计算得 $|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=96|o|$ 或 $54|o|$，$|G_e|=192|o|$ 或 $108|o|$。由 Atlas 可知，G 的极大子群的阶至少为 $576|o|$，舍去。

设 $(T,T_v)=\left(G_2(3),2^3:PSL_3(2)\right)$，若 G_e 为 G 的极大子群，通过 Magma 计算并且由 Atlas 可知，此时 $|G_e|$ 只能为 $1092|o|$ 或 $576|o|$，而 $|G_v|=|2^3:PSL_3(2)||o|=1344|o|$。计算可知 $|G_e|/2$ 不整除 $|G_v|$，这与**引理 2.7** 矛盾，舍去。

基金项目

云南省科技厅应用基础研究项目(2019FD116)资助。

参考文献

[1] Verret, G. (2009) On the Order of Arc-Stabilizers in Arc-Trasitive Graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **80**, 498-505.

[2] Weiss, R.M. (1973) Kantenprimitive Graphen vom Grad drei. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **15**, 269-288. https://doi.org/10.1016/0095-8956(73)90041-5

[3] Giudici, M. and Li, C.H. (2009) On Finite Edge-Primitive and Edge-Quasiprimitive Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **100**, 275-298. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2009.09.001

[4] Li, C.H., Zhang, H. (2011) The Finite Primitive Groups with Soluble Stabilizers, and the Edge-Primitive S-Arc Transitive Graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society* **103**, 441-472. https://doi.org/10.1112/plms/pdr004

[5] Guo, S.T., Feng, Y.Q. and Li, C.H. (2015) Edge-Primitive Tetravalent Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **112**, 124-137. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2014.12.004

[6] Guo, S.T., Feng, Y.Q. and Li, C.H. (2013) The Finite Edge-Primitive Pentavalent Graphs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **38**, 491-497. https://doi.org/10.1007/s10801-012-0412-y

[7] Pan, J.M. and Wu, C.X. (2020) Finite Hexavalent Edge-Primitive Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **378**, Article ID: 125207. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125207

[8] Pan, J.M., Huang, Z.H. and Wu, C.X. (2019) Edge-Primitive Graphs of Prime Power Order. *Graphs and Combinatorics*, **35**, 249-259. https://doi.org/10.1007/s00373-018-1997-2

[9] Pan, J.M., Huang, Z.H. and Wu, C.X. (2019) On Edge-Primitive Graphs of Order Twice a Prime Power. *Discrete Mathematics*, **342**, Article ID: 111594. https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.07.010

[10] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A. and Wilson, R.A. (1985) Atlas of Finite Groups. Oxford University Press, London.

[11] Wilson, R.A. (2009) The Finite Simple Groups. Springer, London. https://doi.org/10.1007/978-1-84800-988-2

[12] Robinson, D.J.S. (1982) A Course in the Theory of Groups. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0128-8

[13] Li, C.H., Lu, Z.P. and Marušič, D. (2004) On Primitive Permutation Groups with Small Suborbits and Their Orbital Graphs. *Journal of Algebra*, **279**, 749-770. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.03.005

[14] Liebeck, W., Praeger, C.E. and Saxl, J. (1988) On the O'Nan-Scott Theorem for Finite Primitive Permutation Groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **44**, 389-396. https://doi.org/10.1017/S144678870003216X

[15] Li, C.H. and Li, X.H. (2013) On Permutation Groups of Degree a Product of Two Prime-Powers. *Communications in Algebra*, **42**, 4722-4743. https://doi.org/10.1080/00927872.2013.823500

[16] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of*

Symbolic Computation, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[17] Cameron, P.J. (1981) Finite Permutation Groups and Finite Simple Groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **13**, 1-22. https://doi.org/10.1112/blms/13.1.1