Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 1027-1033
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126112

Ding 内射 Ext-Phantom 态射

刘明珠，杨晓燕

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年5月16日；录用日期：2022年6月21日；发布日期：2022年6月28日

摘 要

本文引入了 **Ding** 内射 **Ext-phantom** 态射，讨论了其基本同调性质。并证明了 **Ding** 内射 **Ext-phantom** 态射的类是 R-**Mod** 的一个理想。特别地，给出了一个 R-模态射是 **Ding** 内射 **Ext-phantom** 态射的等价刻画。

关键词

FP-内射模，**Ding** 内射 **Ext-Phantom** 态射，预包络

Ding Injective Ext-Phantom Morphisms

Mingzhu Liu, Xiaoyan Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 16th, 2022; accepted: Jun. 21st, 2022; published: Jun. 28th, 2022

Abstract

This paper introduces the Ding injective Ext-phantom morphisms, discusses basic homological properties of Ding injective Ext-phantom morphisms, and proves the collection of all Ding injective Ext-phantom morphisms is an ideal of R-Mod. In particular,

文章引用: 刘明珠, 杨晓燕. Ding 内射 Ext-Phantom 态射[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 1027-1033.
DOI: 10.12677/pm.2022.126112

the equivalent characterization that a morphism of R-modules is a Ding injective-Ext-phantom morphism is given.

Keywords

FP-Injective Module, Ding Injective Ext-Phantom Morphism, Preenvelope

1. 引言

Phantom 态射起源于代数拓扑学中 CW-复形之间的态射 [1]. Phantom 态射理论非常类似于代数拓扑与三角范畴中的模理论, 因此 phantom 态射引起了众多代数学家的广泛关注. Neeman 首次在 [2]中定义了三角范畴中的 phantom 态射. 2007 年, Herzog 在 [3]中利用有限表示模和 $\mathrm{Tor}_1^R(-,-)$ 将 phantom 态射的概念推广到任意环的模范畴上, 并定义 R-模态射 $g: X \to Y$ 是 Ext-phantom 态射, 若对任意的有限表示 R-模 B, $\mathrm{Ext}_R^1(B,g): \mathrm{Ext}_R^1(B,X) \to \mathrm{Ext}_R^1(B,Y)$ 是零同态. 2016 年, Mao 在 [4]中探究了 phantom 和 Ext-phantom 态射预覆盖与预包络的存在性. 2020 年, Mao 在 [5]中引入了 neat-phantom 和 clean-cophantom 态射的概念. 最近, Asadollahi 等人在 [6]中引入了 Gorenstein 平坦 phantom 态射, 研究了高阶 Gorenstein 平坦 phantom 态射及它们之间的关系, 证明了 Gorenstein 平坦 phantom 态射的理想和高阶 Gorenstein 平坦 phantom 态射的理想是一个预覆盖类. 最后给出了高阶 Gorenstein 平坦 phantom 态射的几条等价刻画.

作为 Gorenstein 同调理论在凝聚环上的特例, Ding, Li 和 Mao 在 [7,8]中研究了强 Gorenstein 平坦模和 Gorenstein FP-内射模, 因为 Ding, Li 和 Mao 在这方面的杰出工作, 因此 Gillespie 在 [9,10]中称之为 Ding 投射, Ding 内射和 Ding 平坦模, 其中 Ding 平坦模与 Gorenstein 平坦模是一致的.

受上述研究的启发, 本文主要研究了Ding内射Ext-phantom 态射, 证明了 Ding 内射Ext-phantom态射的类是R-Mod的一个理想, 并且态射范畴R-Mor中Ding内射Ext-phantom 态射的类关于直积与ME-扩张封闭. 此外, 也证明了R模态射是一个Ding内射Ext-phantom态射当且仅当它是$\mathfrak{F}$-cophantom态射, 其中$\mathfrak{F}$=\{R模短正合序列$\mathbb{C}$ |对任意的 FP-内射 R-模 E, $\mathrm{Hom}_R(E,\mathbb{C})$ 正合\}.

2. 预备知识

除非特别说明, 本文中所有的环 R 是结合环, 模均指左 R-模, R-Mod (Mod-R) 表示左(右) R-模范畴, R-Mor 表示左 R-模的态射范畴.

定义 2.1 用R-Mor表示 R-模的态射范畴, 其中,

(1) R-Mor 中的对象是左R-模同态,

(2) R-Mor 中从 $(M_1 \xrightarrow{f} M_2)$ 到 $(N_1 \xrightarrow{g} N_2)$ 的态射为 R-Mod 中态射的对子 (d, s)

$$(M_1 \xrightarrow{d} N_1, M_2 \xrightarrow{s} N_2)$$

使得下图

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"] & M_2 \arrow[d, "g"] \\ N_1 \arrow[r, "s"] & N_2 \end{tikzcd}$$

交换.

定义 2.2 称态射类 $\mathcal{I}$ 是 R-Mod 的理想, 如果 $\mathcal{I}$ 满足下列条件:

(1) 对 $\mathcal{I}$ 中任意两个态射 $f, g : X \to Y$, 有 $f + g : X \to Y$ 仍为 $\mathcal{I}$ 中态射,

(2) $\mathcal{I}$ 中的任意态射 $g : X \to Y$ 与 R-Mod 中任意态射 $f : A \to X$, $h : Y \to B$ 的复合态射 $gf : A \to Y$, $hg : X \to B$ 仍为 $\mathcal{I}$ 中态射.

定义 2.3 若对任意的有限表示 R-模 N, 有 $\mathrm{Ext}^1_R(N, M) = 0$, 则称 R-模 M 是 FP-内射模. FP-内射模的类用 $\mathcal{FI}$ 表示.

定义 2.4 称 R-模 M 是 Ding 内射, 如果存在内射 R-模的正合列

$$\mathbb{I} : \cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots$$

其中 $M \cong \mathrm{Ker}(I^0 \to I^1)$, 并且对任意的 FP-内射 R-模 A, 有 $\mathrm{Hom}_R(A, \mathbb{I})$ 正合. Ding 内射 R-模的类用 $\mathcal{DI}$ 表示.

定义 2.5 设 $\mathcal{C}$ 是一个 R-模类.

称 R-模态射 $\phi : X \to Y$ 是 Y 的一个 $\mathcal{C}$-预覆盖, 如果 $X \in \mathcal{C}$ 并且对任意的态射 $f : Z \to Y$, 其中 $Z \in \mathcal{C}$, 存在态射 $g : Z \to X$, 使得 $\phi g = f$. 称 $\mathcal{C}$-预覆盖 $\phi : X \to Y$ 是 Y 的 $\mathcal{C}$-覆盖, 如果满足 $\phi g = \phi$ 的自同态 g 是同构. 对偶地, 有 $\mathcal{C}$-(预) 包络的定义.

3. 主要结果

下面给出 Ding 内射 Ext-phantom 态射的定义.

定义 3.1 若对任意的 FP-内射 R-模 E, 诱导态射 $\mathrm{Ext}^1_R(E, \psi) : \mathrm{Ext}^1_R(E, A) \to \mathrm{Ext}^1_R(E, Y)$ 是零同态, 则称 R-模态射 $\psi : A \to Y$ 是 Ding 内射 Ext-phantom 态射, 简记为 $\mathcal{DI}$-Ext-phantom.

注记 3.2 由 Ding 内射模的定义知:

(1) 内射模是 Ding 内射模.

(2) 如果 $\mathbb{I}: \cdots \to I^1 \to I^0 \to I^{-1} \to I^{-2} \to \cdots$ 是内射模的正合列, 并对任意的 FP-内射模 E, $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{I})$ 正合, 那么由对称性知: 每个箭头的像, 核, 余核都是 Ding 内射模.

(3) 如果 M 是 Ding 内射模, 那么对任意的 FP-内射模 E 和 $i \geq 1$, $\mathrm{Ext}_R^i(E, M) = 0$.

由此我们引入 Ding 内射 Ext-phantom 态射.

命题 3.3 设 $\Psi_{\mathcal{DI}}$ 为所有 $\mathcal{DI}$-Ext-phantom 态射的类. 则 $\Psi_{\mathcal{DI}}$ 是 R-Mod 的一个理想.

证明: 设 $g_1, g_2 : X \to Y$ 是 $\Psi_{\mathcal{DI}}$ 中任意态射. 对任意的 FP-内射 R-模 E, 由 $\Psi_{\mathcal{DI}}$ 的定义可知: $\mathrm{Ext}_R^1(E, g_1) = \mathrm{Ext}_R^1(E, g_2) = 0$. 因此, 我们有

$$\mathrm{Ext}_R^1(E, g_1 + g_2) = \mathrm{Ext}_R^1(E, g_1) + \mathrm{Ext}_R^1(E, g_2) = 0.$$

如果 $f : A \to X$ 为 R-Mod 中态射, 那么有

$$\mathrm{Ext}_R^1(E, fg_1) = \mathrm{Ext}_R^1(E, f)\mathrm{Ext}_R^1(E, g_1) = 0.$$

如果 $h : Y \to B$ 为 R-Mod 中态射, 那么有

$$\mathrm{Ext}_R^1(E, g_1 h) = \mathrm{Ext}_R^1(E, g_1)\mathrm{Ext}_R^1(E, h) = 0$$

所以 $\Psi_{\mathcal{DI}}$ 是 R-Mod 中的理想.

下面我们探讨 Ding 内射 Ext-phantom 态射的一些基本性质.

引理 3.4 $\mathcal{DI}$-Ext-phantom 态射的类关于直积封闭.

证明: 设 $\{f_i : M_i \to N_i\}_{i \in I}$ 是 R-模中的一簇 $\mathcal{DI}$-Ext-phantom 态射. 下面证明对任意的 FP-内射模 E, $\mathrm{Ext}_R^1(E, \prod_{i \in I} f_i) = 0$. 考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I}\mathrm{Ext}_R^1(E, M_i) \arrow[r, "\prod_{i\in I}\mathrm{Ext}_R^1(E, f_i)"] \arrow[d, "\cong"'] & \prod_{i\in I}\mathrm{Ext}_R^1(E, N_i) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Ext}_R^1(E, \prod_{i\in I} M_i) \arrow[r, "\mathrm{Ext}_R^1(E, \prod_{i\in I} f_i)"'] & \mathrm{Ext}_R^1(E, \prod_{i\in I} N_i)
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathrm{Ext}_R^1(E, f_i) = 0$, 所以 $\prod_{i \in I} \mathrm{Ext}_R^1(E, f_i) = 0$, 即 $\mathrm{Ext}_R^1(E, \prod_{i \in I} f_i) = 0$.

在 R-Mor 中, 称 R-模态射 α 是 j 通过 i 的 ME-扩张 [11], 如果存在态射的短正合序列 $0 \to i \to$

$\alpha \to j \to 0$, 有下列行正合的分解图使得 $\alpha = a_2 a_1$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "a_1"] & J_0 \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "a_2"] & J_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & J_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

命题 3.5 $\mathcal{DI}$-Ext-phantom 态射的类关于 ME-扩张封闭.

证明 设 $\alpha : A_0 \to A_1$ 是 j 通过 i 的 ME-扩张, 如上图所示, 其中 i 和 j 是$\mathcal{DI}$-Ext-phantom 态射. 对任意的 FP-内射 R-模 E , 将 $\mathrm{Ext}^n(E, -)$ 作用于上图, 有如下行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(E, I_0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1(E, A_0) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^1(E,a_1)"] & \mathrm{Ext}^1(E, J_0) \arrow[d, "\mathrm{Ext}^1(E,j)"] \\
\mathrm{Ext}^1(E, I_0) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1(E,f)"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^1(E,i)"] & \mathrm{Ext}^1(E, A) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1(E,g)"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^1(E,a_2)"] & \mathrm{Ext}^1(E, J_1) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^1(E, I_1) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(E, A_1) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(E, J_1)
\end{tikzcd}$$

因为 i 和 j 是 $\mathcal{DI}$-Ext-phantom 态射, 所以 $\mathrm{Ext}^1(E, i) = 0$, 且 $\mathrm{Ext}^1(E, j) = 0$. 从交换图可知: $\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^1(E, a_1)) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}^1(E, g)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^1(E, f)) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}^1(E, a_2))$, 因此 $\mathrm{Ext}^1(E, \alpha) = \mathrm{Ext}^1(E, a_2)\mathrm{Ext}^n(E, a_1) = 0$. 故 α 是 $\mathcal{DI}$-Ext-phantom 态射.

令 $\mathfrak{F} = \{R$-模短正合序列 $\mathbb{C} \mid$ 对任意的 FP-内射 R-模 E, $\mathrm{Hom}_R(E, \mathbb{C})$ 正合$\}$ 由 [[12], 引理 1.1] 知, $\mathfrak{F}$ 是 Ext 的加法子函子.

Fu 等人在 [13]中引入了关于 Ext 的加法子函子的 phantom 态射. 设 $\mathcal{F}$ 是 Ext 的加法子函子. 若对于任意 R-模 C, $\mathrm{Ext}^1_R(C, \psi) \in \mathcal{F}(C, Z)$, 其中 $\mathrm{Ext}^1_R(C, \psi) : \mathrm{Ext}^1_R(C, Y) \to \mathrm{Ext}^1_R(C, Z)$, 则称 R-模态射 $\psi : Y \to Z$ 为 $\mathcal{F}$-cophantom 态射.

下面的命题说明 R-模态射是 $\mathcal{DI}$-Ext-phantom 态射当且仅当它是 $\mathfrak{F}$-cophantom 态射.

命题 3.6 设 R 是环. 对 R-模态射 $\psi : A \to Y$, 下列条件等价:

(1) ψ 是一个 $\mathcal{DI}$-Ext-phantom 态射.

(2) 若 $\rho : A \to I$ 是 A 的内射预包络, 则对任意的 FP-内射 R-模 E, ρ 沿着 ψ 的推出

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\psi"] & I \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & B \arrow[r] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

用函子 $\mathrm{Hom}_R(E,-)$ 作用后仍正合.

证明: (1)⇒(2) 对任意的 FP-内射R-模 E, 由定义知 $\mathrm{Ext}^1_R(E,\psi)=0$. 通过下面的交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(E,L) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1_R(E,A) \arrow[d, "\mathrm{Ext}^1_R(E,\psi)"] \\
\mathrm{Hom}_R(E,L) \arrow[r, "\tau"'] & \mathrm{Ext}^1_R(E,Y)
\end{tikzcd}$$

因为 $\tau=0$, 所以 $0\to Y\to B\to L\to 0$ 用函子 $\mathrm{Hom}_R(E,-)$ 作用后仍正合.

(2)⇒(1) 假设 (2) 成立, 对任意的 FP-内射 R-模 E, 考虑下面的交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(E,L) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1_R(E,A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^1_R(E,\psi)"] & \mathrm{Ext}^1_R(E,I) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(E,L) \arrow[r, "\tau"'] & \mathrm{Ext}^1_R(E,Y) \arrow[r, "\sigma"'] & \mathrm{Ext}^1_R(E,B)
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathrm{Ext}^1_R(E,I)=0$, 所以 $\sigma\mathrm{Ext}^1_R(E,\psi)=0$. 又由 (2)知 σ 是单射, 所以 $\mathrm{Ext}^1_R(E,\psi)=0$, 即 ψ 是一个 $\mathcal{DI}$-Ext-phantom 态射.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11761060).

参考文献

[1] McGibbon, C.A. (1995) Phantom Maps. In: James, I.M., Ed., *Handbook of Algebraic Topology*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1209-1257. https://doi.org/10.1016/B978-044481779-2/50026-2

[2] Neeman, A. (1992) The Brown Representability Theorem and Phantomless Triangulated Categories. *Journal of Algebra*, **151**, 118-155. https://doi.org/10.1016/0021-8693(92)90135-9

[3] Herzog, I. (2008) Contravariant Functors on the Category of Finitely Presented Modules. *Israel Journal of Mathematics*, **167**, 347-410. https://doi.org/10.1007/s11856-008-1052-8

[4] Mao, L.X. (2016) Precovers and Preenvelopes by Phantom and Ext-Phantom Morphisms. *Communications in Algebra*, **44**, 1704-1721. https://doi.org/10.1080/00927872.2015.1027388

[5] Mao, L.X. (2020) Neat-Phantom and Clean-Cophantom Morphisms. *Journal of Algebra and Its Applications*, **20**, Article ID: 2150172. https://doi.org/10.1142/S0219498821501723

[6] Asadollahi, J., Hemat, S. and Vahed, R. (2020) Gorenstein Flat Phantom Morphisms. *Communications in Algebra*, **48**, 2167-2182. https://doi.org/10.1080/00927872.2019.1710519

[7] Ding, N.Q., Li, Y.L. and Mao, L.X. (2009) Strongly Gorenstein Flat Modules. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 323-338. https://doi.org/10.1017/S1446788708000761

[8] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2008) Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **7**, 491-506. https://doi.org/10.1142/S0219498808002953

[9] Gillespie, J. (2010) Model Structures on Modules over Ding-Chen Rings. *Homology, Homotopy and Applications*, **12**, 61-73. https://doi.org/10.4310/HHA.2010.v12.n1.a6

[10] Gillespie, J. (2017) On Ding Injective, Ding Projective, and Ding Flat Modules and Complexes. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **47**, 2641-2673. https://doi.org/10.1216/RMJ-2017-47-8-2641

[11] Fu, X.H. and Herzog, I. (2016) Powers of the Phantom Ideal. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **112**, 714-752. https://doi.org/10.1112/plms/pdw006

[12] Auslander, M. and Solberg, O. (1993) Relative Homology and Representation Theory I: Reative Homology and Homologically Finite Categories. *Communications in Algebra*, **21**, 2995-3031. https://doi.org/10.1080/00927879308824717

[13] Fu, X.H., Guil Asensio, P.A., Herzog, I. and Torrecillas, B. (2013) Ideal Approximation Theory. *Advances in Mathematics*, **244**, 750-790. https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.05.020