Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 1059-1066
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126116

亚纯函数导数与其平移函数的唯一性定理

刘登峰

福建师范大学，数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2022年5月16日；录用日期：2022年6月21日；发布日期：2022年6月28日

摘 要

本文研究了亚纯函数导数与其平移函数的唯一性问题。证明了亚纯函数导数与其平移函数在分担值条件下的一些唯一性结果，所得到的定理改进与推广了祁晓光、杨连中等人的结果。

关键词

亚纯函数，导数，平移函数，唯一性

Uniqueness Theoremon Derivatives and Shifts of Meromorphic Functions

Dengfeng Liu

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: May 16th, 2022; accepted: Jun. 21st, 2022; published: Jun. 28th, 2022

Abstract

In this paper, we study the problem of uniqueness on derivatives and shifts of meromorphic functions. And we prove a uniqueness theorem for derivatives of meromorphic functions satisfies the condition of sharing values with its shift, which improves and extends the results given by Qi X.G. *et al.*

Keywords

Meromorphic Functions, Derivatives, Shift Functions, Uniqueness

文章引用: 刘登峰. 亚纯函数导数与其平移函数的唯一性定理[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 1059-1066.
DOI: 10.12677/pm.2022.126116

1. 引言及主要结论

本文中的亚纯函数均指复平面上的亚纯函数。设 f 是非常数亚纯函数，采用亚纯函数唯一性理论中的一些基本记号和结论[1] [2]，如 $T(r,f)$，$N(r,f)$，$\bar{N}(r,f)$，$m(r,f)$ 等。令 $S(r,f)$ 表示任意满足 $S(r,f)=o\{T(r,f)\}$ $(r\to+\infty$，$r\notin E)$的量，其中 E 是一个有穷线性测度的集合，$S(r,f)$ 每次出现时 E 可能不相同。若对亚纯函数 a，有 $T(r,a)=S(r,f)$，则称 a 为 f 的一个小函数。给定一个复数 a，若 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 有相同的零点，并且零点的重数也相同，则称 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 aCM，若 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 有相同的零点，但不计零点重数，则称 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 aIM。此外，本文还用到下述定义。

定义 1 [3] [4]设 f，g 是两个非常数亚纯函数，$a\in C\cup\{\infty\}$，k 为一正整数或 ∞。$E_k(a,f)$ 表示 $f-a$ 的所有零点，当零点重数 $m\le k$ 时，计 m 次；当 $m>k$ 时，计 $k+1$ 次。若 $E_k(a,f)=E_k(a,g)$，则称 f 和 g 以权 k 分担 a。

这里记 f 和 g 分担 (a,k) 表示 f 和 g 以权 k 分担 a。显然若 f 和 g 分担 (a,k)，那么对任意的 $p(0\le p<k)$，p 为正整数，都有 f 和 g 分担 (a,p)。同时，当且仅当 f 和 g 分担 $(a,0)$ (或 (a,∞))时，f 和 g 分担 aIM (或 aCM)。

定义 2 [3] [4]设 f 是非常数亚纯函数，$a\in C\cup\{\infty\}$，k，m 是两个正整数，$N(r,a;f\,|=1)$ 表示 $f-a$ 单零点的计数函数，$N(r,a;f\,|\le k)$ $(N(r,a;f\,|\ge k))$ 表示 $f-a$ 的零点重数 $m\le k$ $(m\ge k)$ 的计数函数，$\bar{N}(r,a;f\,|\le k)$ $(\bar{N}(r,a;f\,|\ge k))$ 表示 $f-a$ 的零点重数 $m\le k$ $(m\ge k)$ 的精简计数函数.

定义 3 [3] [4]设 f 是非常数亚纯函数，$a\in C\cup\{\infty\}$，p 是一个正整数，那么
$N_p(r,a;f)=\bar{N}(r,a;f)+\bar{N}(r,a;f\,|\ge 2)+\cdots+\bar{N}(r,a;f\,|\ge p)$。

定义 4 [3] [4]设 f,g 是两个非常数亚纯函数，且 f 与 g 分担 aIM，$a\in C\cup\{\infty\}$，$\bar{N}_*(r,a;f,g)$ 表示 $f-a$ 零点与 $g-a$ 零点重数不同的精简计数函数。

显然，$\bar{N}_*(r,a;f,g)=\bar{N}_*(r,a;g,f)$。

定义 5 [5]设 f，g 是两个非常数亚纯函数，且 f 与 g 分担 aIM，$a\in C\cup\{\infty\}$，设 z_0 是 $f-a$ 的 p 重零点，$g-a$ 的 q 重零点，$N_E^{1)}(r,0,f-a)$ 表示 $p=q=1$ 的 $f-a$ 零点的精简计数函数。

近年来，随着 Halburd-Korhonen [6]和 Chiang-Feng [7]建立了有穷级条件下复域差分模拟理论及对数导数差分模拟理论。许多学者研究了亚纯函数与其平移算子的唯一性问题。其中杨连中、刘凯、祁晓光等人在这方面取得了许多优秀且丰富的成果[8]-[13]。主要结果如下。

2018 年，祁晓光等人[8]证明了：

定理 A [8]设 f 是一个非常数有穷级亚纯函数，a，c 是两个非零有穷复数，$n\ge 9$ 是一个正整数。若 $[f'(z)]^n$ 与 $[f(z+c)]^n$ CM 分担 a，$f'(z)$ 与 $f(z+c)$CM 分担 ∞，则 $f'(z)\equiv tf(z+c)$，其中 $t^n=1$。

定理 B [8]设 f 是一个非常数有穷级整函数，a，c 是两个非零有穷复数，$n\ge 5$ 是一个正整数。若 $[f'(z)]^n$ 与 $[f(z+c)]^n$ CM 分担 a，则 $f'(z)\equiv tf(z+c)$，其中 $t^n=1$。

基于上述研究，本文将进一步探讨在没有级的条件限制下，涉及分担值的亚纯函数的导数与其平移算子的唯一性问题，所得到的定理推广并改进了上述结果，我们证明了：

定理 1.1 设 f 是一个非常数亚纯函数，a，c 是两个非零有穷复数，$n\ge 6$ 是一个正整数。若 $[f'(z)]^n$ 与 $[f(z+c)]^n$ 分担 (a,l)，$l\ge 2$，$f'(z)$ 与 $f(z+c)$ IM 分担 ∞，则 $f'(z)\equiv tf(z+c)$，其中 $t^n=1$。

定理 1.2 设 f 是一个非常数整函数，a，c 是两个非零有穷复数，$n\ge 5$ 是一个正整数。若 $\left[f'(z)\right]^n$ 与 $\left[f(z+c)\right]^n$ 分担 (a,l)，$l\ge 2$，则 $f'(z)\equiv tf(z+c)$，其中 $t^n=1$。

备注 1 定理 1.1 与定理 1.2 中去掉了定理 A 与定理 B 中有穷级的条件，且将 $f'(z)$ 与 $f(z+c)$ CM 分担 ∞ 替换为 IM 分担 ∞，$\left[f'(z)\right]^n$ 与 $\left[f(z+c)\right]^n$ CM 分担 a 替换为权 2 分担 a。因此定理 1.1 与定理 1.2 推广并改进了定理 A 与定理 B。

2. 引理

设 F，G 是两个非常数亚纯函数，H，V 表示以下两个函数：

$$H=\left(\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F-1}\right)-\left(\frac{G''}{G'}-\frac{2G'}{G-1}\right).$$

$$V=\left(\frac{F'}{F-1}-\frac{F'}{F}\right)-\left(\frac{G'}{G-1}-\frac{G'}{G}\right)=\frac{F'}{F(F-1)}-\frac{G'}{G(G-1)}.$$

引理 2.1 [3]设 F，G 是两个非常数亚纯函数，且 F，G 分担 $(1,1)$，若 $H\not\equiv 0$，则

$$N(r,1;F|=1)=N(r,1;G|=1)\le N(r,H)+S(r,F)+S(r,G).$$

引理 2.2 [14]设 F，G 是两个非常数亚纯函数，且 F，G 分担 $(1,0)$，$(\infty,0)$，若 $H\not\equiv 0$，则

$$N(r,H)\le N(r,0;F|\ge 2)+N(r,0;G|\ge 2)+\bar{N}_*(r,1;F,G)+\bar{N}_*(r,\infty;F,G)$$
$$+\bar{N}_0(r,0,F')+\bar{N}_0(r,0,G')+S(r,F)+S(r,G).$$

其中 $\bar{N}_0(r,0,F')$ 表示 $F'=0$，而 $F(F-1)\ne 0$ 的密指量，$\bar{N}_0(r,0,G')$ 类似。

引理 2.3 [15]设 F，G 是两个非常数亚纯函数，且 F，G 分担 $(1,0)$，若 $H\not\equiv 0$，则

$$N_E^{1)}(r,0,F-1)\le N(r,H)+S(r,F)+S(r,G).$$

参考文献[14]，易证得下述引理。

引理 2.4 [14]设 f,g 是两个非常数亚纯函数，$F=\dfrac{f^n}{a}$，$G=\dfrac{g^n}{a}$，且 f,g 分担 $(\infty,0)$，F,G 分担 $(1,k)$，其中 $1\le k\le\infty$，若 $V\not\equiv 0$，则

$$\left(n-1-\frac{1}{k}\right)\bar{N}(r,\infty,f)\le\frac{k+1}{k}\bar{N}(r,0,f)+\bar{N}(r,0,g)-\frac{1}{k}N\left(r,0;f'\,|\,f\ne 0,1,\omega,\cdots,\omega^{n-1}\right)$$
$$+S(r,f)+S(r,g),$$

$$\left(n-1-\frac{1}{k}\right)\bar{N}(r,\infty,g)\le\frac{k+1}{k}\bar{N}(r,0,g)+\bar{N}(r,0,f)-\frac{1}{k}N\left(r,0;g'\,|\,g\ne 0,1,\omega,\cdots,\omega^{n-1}\right)$$
$$+S(r,f)+S(r,g).$$

引理 2.5 [2]设 f 是非常数亚纯函数，$P(z)=a_0f^n+a_1f^{n-1}+\cdots+a_n$，且 $a_0(\not\equiv 0),a_1,\cdots,a_n$ 均为 f 的小函数，则

$$T(r,P(f))=nT(r,f)+S(r,f).$$

引理 2.6 [13]设 f 是亚纯函数，且满足 $f'(z)f(z+c)\equiv t$，其中 $t^n=a^2$，a，c 是两个非零有穷复数，则 f 为常数。

3. 定理的证明

定理 1.1 的证明 设 $F=\dfrac{\left[f'(z)\right]^n}{a}$，$G=\dfrac{\left[f(z+c)\right]^n}{a}$。

由于$\left[f'(z)\right]^n$与$\left[f(z+c)\right]^n$分担(a,l)，从而F与G分担$(1,l)$。令

$$\phi(z)=\left(\frac{F'}{F-1}-\frac{F'}{F}\right)-\left(\frac{G'}{G-1}-\frac{G'}{G}\right)=\frac{F'}{F(F-1)}-\frac{G'}{G(G-1)}. \tag{1}$$

情形 1 若$\phi(z)\equiv 0$，则由(1)式得

$$\frac{F-1}{F}=C\frac{G-1}{G}. \tag{2}$$

其中C是一个非零的有穷复数。

若$C=1$，则由(2)式得$F\equiv G$，即$f'(z)\equiv tf(z+c)$，其中$t^n=1$。

若$C\neq 1$，则由(2)式得

$$F=\frac{G}{(1-C)G+C}. \tag{3}$$

由(3.3)式得

$$N(r,\infty,F)=N\left(r,0,G-\frac{C}{C-1}\right). \tag{4}$$

与

$$T\left(r,f'(z)\right)=T\left(r,f(z+c)\right)+S\left(r,f'(z)\right),\ S\left(r,f'(z)\right)=S\left(r,f(z+c)\right). \tag{5}$$

由 Nevanlinna 第二基本定理，引理 2.5 及(4)，(5)式得

$$\begin{aligned}
&nT\left(r,f(z+c)\right)+O(1)=T(r,G)\\
&\leq \overline{N}(r,\infty,G)+\overline{N}(r,0,G)+N\left(r,0,G-\frac{C}{C-1}\right)+S(r,G)\\
&\leq \overline{N}\left(r,\infty,f(z+c)\right)+\overline{N}\left(r,0,f(z+c)\right)+\overline{N}\left(r,\infty,f'(z)\right)+S\left(r,f(z+c)\right)\\
&\leq 3T\left(r,f(z+c)\right)+S\left(r,f(z+c)\right).
\end{aligned}$$

即$(n-3)T\left(r,f(z+c)\right)\leq S\left(r,f(z+c)\right)$，这与已知条件$n\geq 6$矛盾。

情形 2 若$\phi(z)\not\equiv 0$，由引理 2.4 得

$$\left(n-\frac{3}{2}\right)\overline{N}\left(r,\infty,f'(z)\right)\leq\frac{3}{2}\overline{N}\left(r,0,f'(z)\right)+\overline{N}\left(r,0,f(z+c)\right)+S\left(r,f'(z)\right)+S\left(r,f(z+c)\right),$$

$$\left(n-\frac{3}{2}\right)\overline{N}\left(r,\infty,f(z+c)\right)\leq\frac{3}{2}\overline{N}\left(r,0,f(z+c)\right)+\overline{N}\left(r,0,f'(z)\right)+S\left(r,f'(z)\right)+S\left(r,f(z+c)\right).$$

即

$$\overline{N}\left(r,\infty,f'(z)\right)\leq\frac{3}{2n-3}\overline{N}\left(r,0,f'(z)\right)+\frac{2}{2n-3}\overline{N}\left(r,0,f(z+c)\right)+S(r,f)+S\left(r,f(z+c)\right), \tag{6}$$

$$\overline{N}\left(r,\infty,f(z+c)\right)\leq\frac{3}{2n-3}\overline{N}\left(r,0,f(z+c)\right)+\frac{2}{2n-3}\overline{N}\left(r,0,f'(z)\right)+S(r,f)+S\left(r,f(z+c)\right). \tag{7}$$

由 Nevanlinna 第二基本定理及引理 2.5 得

$$\begin{aligned}&n\left(T\left(r,f'(z)\right)+T\left(r,f(z+c)\right)\right)+O(1)\le T(r,F)+T(r,G)\\&\le \bar{N}(r,\infty,F)+\bar{N}(r,0,F)+\bar{N}(r,0,F-1)+\bar{N}(r,\infty,G)+\bar{N}(r,0,G)\\&\quad+\bar{N}(r,0,G-1)-\overline{N_0}(r,0,F')-\overline{N_0}(r,0,G')+S(r,F)+S(r,G).\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $\overline{N_0}(r,0,F')$ 与 $\overline{N_0}(r,0,G')$ 定义与引理 2.2 中一致。

令

$$\varphi(z)=\left(\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F-1}\right)-\left(\frac{G''}{G'}-\frac{2G'}{G-1}\right).$$

情形 2.1 若 $\varphi(z)\not\equiv 0$，由引理 2.1，2.2，2.3 及(8)式得

$$\begin{aligned}&\frac{n}{2}\left(T\left(r,f'(z)\right)+T\left(r,f(z+c)\right)\right)\\&\le N_2(r,0,F)+N_2(r,0,G)+\bar{N}(r,\infty,F)+\bar{N}(r,\infty,G)+\bar{N}_*(r,\infty;F,G)\\&\quad-\left(l-\frac{3}{2}\right)\bar{N}_*(r,1;F,G)+S(r,F)+S(r,G)\\&\le 2\bar{N}\left(r,0,f'(z)\right)+2\bar{N}\left(r,0,f(z+c)\right)+\bar{N}\left(r,\infty,f'(z)\right)+\bar{N}\left(r,\infty,f(z+c)\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\left(\bar{N}\left(r,\infty,f'(z)\right)+\bar{N}\left(r,\infty,f(z+c)\right)\right)+S\left(r,f'(z)\right)+S\left(r,f(z+c)\right).\end{aligned}\tag{9}$$

进一步，由(3.6)，(3.7)，(3.9)式得

$$\left(2n^2-11n-3\right)\left[T\left(r,f'(z)\right)+T\left(r,f(z+c)\right)\right]\le S\left(r,f'(z)\right)+S\left(r,f(z+c)\right).$$

这与已知条件 $n\ge 6$ 矛盾。

情形 2.2 若 $\varphi(z)\equiv 0$，即

$$\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F-1}=\frac{G''}{G'}-\frac{2G'}{G-1}.\tag{10}$$

对(10)式连续积分两次得

$$\frac{1}{G-1}=\frac{C_1}{F-1}+C_2.\tag{11}$$

其中 C_1， C_2 为常数且 $C_1\ne 0$。

由(11)式得

$$G=\frac{(C_2+1)F+(C_1-C_2-1)}{C_2F+(C_1-C_2)}.\tag{12}$$

$$F=\frac{(C_2-C_1)G+(C_1-C_2-1)}{C_2G-(C_2+1)}.\tag{13}$$

由(12)式得

$$T\left(r,f'(z)\right)=T\left(r,f(z+c)\right)+S\left(r,f'(z)\right),\quad S\left(r,f'(z)\right)=S\left(r,f(z+c)\right).\tag{14}$$

情形 2.2.1 若 $C_2\ne 0,-1$，由(13)式得

$$\bar{N}(r,\infty,F)=\bar{N}\left(r,0,G-\frac{C_2+1}{C_2}\right).\tag{15}$$

结合 Nevanlinna 第二基本定理，引理 2.5 及(14)，(15)得

$$
\begin{aligned}
& nT(r,f(z+c))+S(r,f(z+c))=T(r,G) \\
& \le \bar{N}(r,\infty,G)+\bar{N}(r,0,G)+\bar{N}\left(r,0,G-\frac{C_2+1}{C_2}\right)+S(r,G) \\
& \le \bar{N}(r,\infty,G)+\bar{N}(r,0,G)+\bar{N}(r,\infty,F)+S(r,G) \\
& \le \bar{N}(r,\infty,f(z+c))+\bar{N}(r,0,f(z+c))+\bar{N}(r,f'(z))+S(r,f(z+c)) \\
& \le 3T(r,f(z+c))+S(r,f(z+c)).
\end{aligned}
$$

即 $(n-3)T(r,f(z+c))\le S(r,f(z+c))$，这与已知条件 $n\ge 6$ 矛盾。

情形 2.2.2 若 $C_2=-1$，则

$$G=\frac{C_1}{C_1+1-F}. \tag{16}$$

若 $C_1\ne -1$，由(16)式得

$$\bar{N}(r,\infty,G)=\bar{N}(r,0,F-C_1-1). \tag{17}$$

结合 Nevanlinna 第二基本定理，引理 2.5 及(14)，(17)得

$$
\begin{aligned}
& nT(r,f'(z))+S(r,f'(z))=T(r,F) \\
& \le \bar{N}(r,\infty,F)+\bar{N}(r,0,F)+\bar{N}(r,0,F-C_1-1)+S(r,F) \\
& \le \bar{N}(r,\infty,F)+\bar{N}(r,0,F)+\bar{N}(r,\infty,G)+S(r,F) \\
& \le \bar{N}(r,\infty,f'(z))+\bar{N}(r,0,f'(z))+\bar{N}(r,\infty,f(z+c))+S(r,f'(z)) \\
& \le 3T(r,f'(z))+S(r,f'(z)).
\end{aligned}
$$

即 $(n-3)T(r,f'(z))\le S(r,f'(z))$，这与已知条件 $n\ge 6$ 矛盾。因此 $C_1=-1$，将其带入(16)式得 $FG\equiv 1$，从而

$$f'(z)f(z+c)\equiv t.$$

其中 $t^n=a^2$。

由引理 2.6 得 f 为常数，矛盾。

情形 2.2.3 若 $C_2=0$，则

$$G=\frac{F+C_1-1}{C_1}. \tag{18}$$

若 $C_1\ne 1$，由(18)式得

$$\bar{N}(r,0,G)=\bar{N}(r,0,F+C_1-1). \tag{19}$$

结合 Nevanlinna 第二基本定理，引理 2.5 及(14)，(19)得

$$
\begin{aligned}
& nT(r,f'(z))+S(r,f'(z))=T(r,F) \\
& \le \bar{N}(r,\infty,F)+\bar{N}(r,0,F)+\bar{N}(r,0,F+C_1-1)+S(r,F) \\
& \le \bar{N}(r,\infty,F)+\bar{N}(r,0,F)+\bar{N}(r,0,G)+S(r,F) \\
& \le \bar{N}(r,\infty,f'(z))+\bar{N}(r,0,f'(z))+\bar{N}(r,0,f(z+c))+S(r,f'(z)) \\
& \le 3T(r,f'(z))+S(r,f'(z)).
\end{aligned}
$$

即$(n-3)T(r,f'(z))\le S(r,f'(z))$，这与已知条件$n\ge 6$矛盾.因此$C_1=1$，将其带入(18)式得$F\equiv G$，从而

$$f'\equiv tf(z+c).$$

其中$t^n=1$。

至此，定理 1.1 证毕。

定理 1.2 的证明

与定理 1.1 的证明相同，可得到

$$\begin{aligned}&\frac{n}{2}\left(T\left(r,f'(z)\right)+T\left(r,f\left(z+c\right)\right)\right)\\&\le 2\bar{N}\left(r,0,f'(z)\right)+2\bar{N}\left(r,0,f\left(z+c\right)\right)+\bar{N}\left(r,\infty,f'(z)\right)+\bar{N}\left(r,\infty,f\left(z+c\right)\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\left(\bar{N}\left(r,\infty,f'(z)\right)+\bar{N}\left(r,\infty,f\left(z+c\right)\right)\right)+S\left(r,f'(z)\right)+S\left(r,f\left(z+c\right)\right).\end{aligned}$$

由于f是一个非常数整函数，因此$\bar{N}\left(r,\infty,f'(z)\right)=0$，$\bar{N}\left(r,\infty,f\left(z+c\right)\right)=0$，从而有

$$\begin{aligned}&n\left(T\left(r,f'(z)\right)+T\left(r,f\left(z+c\right)\right)\right)\\&\le 4\bar{N}\left(r,0,f'(z)\right)+4\bar{N}\left(r,0,f\left(z+c\right)\right)+S\left(r,f'(z)\right)+S\left(r,f\left(z+c\right)\right).\end{aligned}$$

这与已知条件$n\ge 5$矛盾。其余情形的讨论与定理 1.1 相同，即可证得定理 1.2。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11801291)；福建省自然科学基金资助项目(2019J05047, 2019J01672)。

参考文献

[1] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] Yi, H.X. and Yang, C.C. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Science Press, Beijing.

[3] Lahiri, I. (2001) Weighted Value Sharing and Uniqueness of Meromorphic Functions. *Complex Variables, Theory and Application*, **46**, 241-253. https://doi.org/10.1080/17476930108815411

[4] Lahiri, I. (2001) Weighted Sharing and Uniqueness of Meromorphic Functions. *Nagoya Mathematical Journal*, **161**, 193-206. https://doi.org/10.1017/S0027763000027215

[5] Yi, H.X. and Yang, L.Z. (1997) Meromorphic Functions That Share Two Sets. *Kodai Mathematical Journal*, **20**, 127-134. https://doi.org/10.2996/kmj/1138043751

[6] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2006) Difference Analogue of the Lemma on the Logarithmic Derivative with Applications to Difference Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **314**, 477-487. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.010

[7] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of $f(z+\eta)$ and Difference Equations in the Complex Plane. *The Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1

[8] Qi, X.G., Li, N. and Yang, L.Z. (2018) Uniqueness of Meromorphic Functions Concerning Their Differences and Solutions of Difference Painleve Equations. *Computational Methods and Function Theory*, **18**, 567-582. https://doi.org/10.1007/s40315-018-0241-7

[9] Liu, K. (2009) Meromorphic Functions Sharing a Set with Applications to Difference Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **359**, 384-393. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.05.061

[10] Zhang, J.L. (2010) Value Distribution and Shared Sets of Differences of Meromorphic Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **367**, 401-408. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.01.038

[11] Chen, B.Q. and Chen, Z.X. (2012) Meromorphic Function Sharing Two Sets with Its Difference Operator. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **35**, 765-774.

[12] Zhang, S.Y. and Liu, H.F. (2019) On Uniqueness Problem of Meromorphic Functions Sharing Values with Their q-Shifts. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, **34**, 232-241.

[13] 王品玲, 方明亮. 涉及导数与差分的亚纯函数唯一性[J]. 数学学报(中文版), 2020, 63(2): 171-180.

[14] Lahirii, B.A. (2006) Weighted Sharing of Two Sets. *Kyungpook Mathematical Journal*, **46**, 79-87.

[15] Yi, H.X. (1999) Meromorphic Functions That Share One or Two Values II. *Kodai Mathematical Journal*, **22**, 264-272. https://doi.org/10.2996/kmj/1138044046