Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 1074-1081
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126118

Hans汉斯

广义Chaplygin气体下等熵可压缩欧拉方程奇点的形成

李世锦

长安大学理学院，陕西 西安

收稿日期：2022年5月16日；录用日期：2022年6月22日；发布日期：2022年6月29日

摘 要

本文主要研究广义Chaplygin气体在等熵可压缩欧拉方程下奇点的形成问题。首先通过相关方程和准备知识，做一些变量的特征分解，以此来建立梯度变量和黎卡提方程；最后通过给出密度的下界估计来分析奇点的形成。

关键词

可压缩欧拉方程，广义Chaplygin气体，特征分解，奇点的形成

Singularity Formation for Isentropic Compressible Euler Equations with Generalized Chaplygin Gas

Shijin Li

School of Science, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Received: May 16th, 2022; accepted: Jun. 22nd, 2022; published: Jun. 29th, 2022

Abstract

In this paper, we consider singularity formation for isentropic compressible Euler equations with generalized Chaplygin gas. Firstly, through the relative equations and preliminaries, we do the characteristic decompositions of some variables, in order to establish the gradient variables and Riccati equations. Finally, we analyze the formation of singularity by giving the lower bound estimation of density.

文章引用：李世锦. 广义 Chaplygin 气体下等熵可压缩欧拉方程奇点的形成[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 1074-1081.
DOI: 10.12677/pm.2022.126118

Keywords

Compressible Euler Equations, Generalized Chaplygin Gas, Characteristic Decompositions, Singularity Formation

1. 引言

等熵的可压缩欧拉方程组是一个拟线性对称双曲型方程组，众多学者对它进行了研究，一方面是研究经典解的局部存在性，另一方面是即使给一个充分小且光滑的柯西初值，解在有限时间内也会发生爆破。对于经典解爆破的研究，根据维数和初值的不同，所采用的方法也不同。

对于等熵可压缩欧拉方程组奇性的研究，较早的 T. Sideris 对多方理想气体，用泛函分析的方法证明了三维可压缩欧拉方程组初值具有紧支集时，解将在有限的时间内发生爆破[1]。在拉格朗日坐标系下，Lax 证明了无论初始数据多么小，多么光滑，奇点都会在有限的时间内发生[2]。对于 $n\times n$ 系统[3] [4] [5] [6]论证了当初值在一个常数附近有小的光滑扰动且在任何真正非线性特征区域内初始可压缩，严格双曲型系统的解将在有限时间内发生爆破。

Geng Chen 等人证明了在初值没有小假设条件下，等熵和完全可压缩欧拉方程组的解将在有限时间内爆破，他们引入了一种全新而简便的方法建立了依赖时间的密度下界。这足以实现导致有限时间内奇点形成的特征分析，即使当初值很大时也是如此[7]。对于满足 γ 律的等熵流，他们的结果表明 P-系统的柯西问题的解在有限时间内爆破的充要条件是初始可压缩[8] [9] [10] [11]。多方气体和一般压力律下可压缩欧拉方程奇点的形成问题已得到深入研究[12] [13] [14] [15] [16]。同时对于不同条件下，例如带有时间阻尼的可压缩欧拉方程[17] [18]，相对论欧拉方程[19]奇点的形成也做了进一步研究；对于 Chaplygin 气体可压缩欧拉方程的研究在[20]中有介绍。

近年来，为了统一暗物质和暗能量，同时也为了更好地描述宇宙的加速膨胀现象，人们引入了大量的外来气体，2002 年，Benaoum 在[21]中引入了修正的 Chaplygin 气体，并且定义了广义 Chaplygin 气体，当

$$P=-a\tau^{\gamma},\quad a>0,\quad 0<\gamma<1. \tag{1.1}$$

本文考虑广义 Chaplygin 气体下一维等熵可压缩欧拉方程奇点的形成。

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0,\\ (\rho u)_t+\left(\rho u^2+P\right)_x=0.\end{cases} \tag{1.2}$$

其中 x 是空间变量，t 是时间变量。ρ 为密度，u 为速度，P 为压力。

在拉格朗日坐标系下，一维方程组(1.2)可化为

$$\begin{cases}\tau_t-u_x=0,\\ u_t+P_x=0.\end{cases} \tag{1.3}$$

其中 x，t，u，ρ，P 的意义同上，$\tau=\rho^{-1}$ 表示比容。

本文分成四个小节：第一节首先介绍了一些基本知识和相关方程；第二节建立一些变量的特征分解；第三节通过建立的特征分解得到梯度变量和黎卡提方程；第四节对密度的下界进行估计，该估计是研究可压缩欧拉方程奇点形成最关键的步骤；随后得到奇点形成的主要结论。

2. 预备知识

从现在起，我们建立如下假设运用到全部文章中。

假设 2.1 假设 $(\tau_0(x),u_0(x))$ 是 C^1 函数，并且有一致正常数 M_1 和 M_2 使得

$$\left\|(\tau_0,u_0)(x)\right\|_{C^1}\le M_1,\ \ \tau_0\ge M_2 .$$

(1.3)可以写成矩阵形式

$$L_t+QL_x=0,$$

其中

$$L=\begin{pmatrix}\tau\\ u\end{pmatrix},\ \ Q=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -a\gamma\tau^{\gamma-1} & 0\end{pmatrix}.$$

通过直接计算我们可以得到 Q 的两个特征值

$$\lambda_+=c,\ \ \lambda_-=-c .$$

这里 c 为拉格朗日声速

$$c=\sqrt{-P_\tau}=\sqrt{a\gamma\tau^{\gamma-1}}, \tag{2.1}$$

且其相对应的左特征向量为

$$l_+=(c,-1),\ \ l_-=(c,1).$$

在(1.3)的两边分别乘 $l_\pm$，可以得到特征方程

$$c\partial_\pm\tau\mp\partial_\pm u=0 . \tag{2.2}$$

向前和向后的特征分别被定义为

$$\frac{\mathrm{d}x^+}{\mathrm{d}t}=c,\ \ \frac{\mathrm{d}x^-}{\mathrm{d}t}=-c,$$

分别表示沿着他们的方向导数为

$$\partial_+=\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x},\ \ \partial_-=\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}.$$

而且，引入一个有用的量

$$\eta=\int_0^\tau c\,\mathrm{d}\tau=\frac{2c\tau}{\gamma+1}>0, \tag{2.3}$$

方程(1.3)对应的黎曼不变量为

$$s=u-\eta,\ \ r=u+\eta . \tag{2.4}$$

它们满足

$$\partial_+s=0,\ \ \partial_-r=0 . \tag{2.5}$$

3. 特征分解

这一节，我们将给出算子关系和变量的二阶特征分解，目的为下一节中得到黎卡提方程做准备。

定理 3.1 我们有交换子关系

$$\partial_+\partial_- - \partial_-\partial_+ = \frac{1-\gamma}{4\tau}(\partial_+\tau + \partial_-\tau)(\partial_+ - \partial_-). \tag{3.1}$$

证明 由 $c^2 = a\gamma\tau^{\gamma-1}$，可以得到

$$\partial_+ c = \frac{c(\gamma-1)}{2\tau}\partial_+\tau \text{ 和 } \partial_- c = \frac{c(\gamma-1)}{2\tau}\partial_-\tau. \tag{3.2}$$

运用 $\partial_x = \frac{\partial_+ - \partial_-}{2c}$ 和(3.2)，我们有

$$\begin{aligned}\partial_+\partial_- - \partial_-\partial_+ &= (\partial_t + \lambda_+\partial_x)(\partial_t + \lambda_-\partial_x) - (\partial_t + \lambda_-\partial_x)(\partial_t + \lambda_+\partial_x)\\ &= (\partial_+\lambda_- - \partial_-\lambda_+)\partial_x\\ &= -(\partial_+ c + \partial_- c)\frac{\partial_+ - \partial_-}{2c}\\ &= \frac{1-\gamma}{4\tau}(\partial_+\tau + \partial_-\tau)(\partial_+ - \partial_-)\end{aligned} \tag{3.3}$$

进一步，利用定理 3.1，可以获得 τ 的二阶特征分解。

定理 3.2 对于变量 τ，我们有以下二阶特征分解

$$\begin{cases}\partial_+\partial_-\tau = \frac{\gamma-1}{4\tau}\partial_-^2\tau + \frac{1-\gamma}{4\tau}\partial_+\tau\partial_-\tau,\\ \partial_-\partial_+\tau = \frac{\gamma-1}{4\tau}\partial_+^2\tau + \frac{1-\gamma}{4\tau}\partial_+\tau\partial_-\tau.\end{cases} \tag{3.4}$$

证明 由特征方程(2.2)可知

$$\partial_+ c\partial_-\tau + c\partial_+\partial_-\tau + \partial_+\partial_- u = 0, \tag{3.5}$$

$$\partial_- c\partial_+\tau + c\partial_-\partial_+\tau - \partial_+\partial_- u = 0. \tag{3.6}$$

其中

$$\partial_+ c\partial_-\tau + \partial_- c\partial_+\tau = \frac{c(\gamma-1)}{\tau}\partial_+\tau\partial_-\tau, \tag{3.7}$$

$$\partial_+\partial_- u - \partial_-\partial_+ u = \frac{c(1-\gamma)}{4\tau}(\partial_+\tau + \partial_-\tau)^2. \tag{3.8}$$

因为

$$\partial_+\partial_-\tau - \partial_-\partial_+\tau = \frac{1-\gamma}{4\tau}(\partial_+\tau + \partial_-\tau)(\partial_+\tau - \partial_-\tau), \tag{3.9}$$

所以

$$c\partial_+\partial_-\tau = c\partial_-\partial_+\tau + \frac{c(1-\gamma)}{4\tau}(\partial_+\tau + \partial_-\tau)(\partial_+\tau - \partial_-\tau). \tag{3.10}$$

(3.5)和(3.6)相加，并将(3.7)，(3.8)，(3.10)带入，可以得到

$$\frac{c(\gamma-1)}{\tau}\partial_+\tau\partial_-\tau+2c\partial_+\partial_-\tau-\frac{c(1-\gamma)}{4\tau}(\partial_+\tau+\partial_-\tau)(\partial_+\tau-\partial_-\tau)+\frac{c(1-\gamma)}{4\tau}(\partial_+\tau+\partial_-\tau)^2=0. \tag{3.11}$$

化简(3.11)，我们有

$$\partial_+\partial_-\tau=\frac{\gamma-1}{4\tau}\partial_-^2\tau+\frac{1-\gamma}{4\tau}\partial_+\tau\partial_-\tau. \tag{3.12}$$

$\partial_-\partial_+\tau$ 类似可得。

4. 建立黎卡提方程

运用我们得到的特征分解关系式，可以得到相关的黎卡提方程。

根据(3.4)，我们有

$$\partial_+\partial_-\tau-\frac{1-\gamma}{4\tau}\partial_+\tau\partial_-\tau=\frac{\gamma-1}{4\tau}\partial_-^2\tau, \tag{4.1}$$

将(4.1)的两边同时乘 $\tau^{\frac{\gamma-1}{4}}$，有

$$\partial_+\left(\tau^{\frac{\gamma-1}{4}}\partial_-\tau\right)=\frac{\gamma-1}{4\tau}\tau^{\frac{\gamma-1}{4}}\partial_-^2\tau, \tag{4.2}$$

令

$$y=\tau^{\frac{\gamma-1}{4}}\partial_-\tau, \tag{4.3}$$

则

$$\partial_-\tau=y\tau^{\frac{1-\gamma}{4}}. \tag{4.4}$$

所以(4.2)可化为

$$\partial_+y=-\frac{1-\gamma}{4}\tau^{\frac{-3-\gamma}{4}}y^2. \tag{4.5}$$

同理可得

$$\partial_-q=-\frac{1-\gamma}{4}\tau^{\frac{-3-\gamma}{4}}q^2. \tag{4.6}$$

这里我们把 $\partial_+\tau$ 和 $\partial_-\tau$ 变成了新的变量 y 和 q，即把(3.4)变为“解耦的常微分方程”，

$$y=\tau^{\frac{\gamma-1}{4}}\partial_-\tau,$$

$$q=\tau^{\frac{\gamma-1}{4}}\partial_+\tau.$$

进而可以得到以下定理。

定理 4.1 方程(1.3)的光滑解满足

$$\partial_+y=-a_0y^2, \tag{4.7}$$

$$\partial_-q=-a_0q^2. \tag{4.8}$$

这里

$$a_0=\frac{1-\gamma}{4}\tau^{\frac{-3-\gamma}{4}}. \tag{4.9}$$

5. 奇点的形成

为了证明奇点的形成，以下定义起到了关键的作用。

定义

$$Y=\max\left\{0,\sup_{x}\left\{y\left(x,0\right)\right\}\right\},\quad Q=\max\left\{0,\sup_{x}\left\{q\left(x,0\right)\right\}\right\}. \tag{5.1}$$

通过定义我们可以得到以下引理。

引理 5.1 如果 $\left(\tau_0\left(x\right),u_0\left(x\right)\right)$ 满足假设 2.1，对于系统的 C^1 解 $\left(\tau,u\right)\left(x,t\right)$ 有

$$y\left(x,t\right)\le Y \text{ 和 } q\left(x,t\right)\le Q.$$

成立。

该引理可以根据方程(4.7)，(4.8)和常微分方程的比较原理，结合 Y 和 Q 的定义得到。

通过引理 5.1 的帮助，可以证明关于密度下界(等价于 τ 的上界)的关键估计。

引理 5.2 设 $\left(\tau,u\right)\left(x,t\right)$ 时定义在时间间隔 $\left(0,T\right]\left(T>0\right)$ 上的系统(1.3)的 C^1 解，初值 $\left(\tau_0\left(x\right),u_0\left(x\right)\right)$ 满足假设 2.1，如果 $0<\gamma<1$，对于 $\forall x\in R$ 和 $t\in\left[0,T\right)$，使得

$$\tau\left(x,t\right)\le\left[\tau_0^{\frac{\gamma+3}{4}}+\frac{\gamma+3}{8}\left(Y+Q\right)t\right]^{\frac{4}{\gamma+3}}.$$

证明 从 y 和 q 的定义，显然有

$$y=\tau^{\frac{\gamma-1}{4}}s_x,\quad q=\tau^{\frac{\gamma-1}{4}}r_x.$$

从而

$$y+q=\tau^{\frac{\gamma-1}{4}}\left(s_x+r_x\right)=2u_x\tau^{\frac{\gamma-1}{4}},$$

因此，从质量守恒得出

$$\tau^{\frac{\gamma-1}{4}}\tau_t=\frac{1}{2}\left(y+q\right).$$

通过引理 5.1 可以得到

$$\tau^{\frac{\gamma-1}{4}}\tau_t\le\frac{1}{2}\left(Y+Q\right). \tag{5.2}$$

当 $0<\gamma<1$，$\frac{1-\gamma}{4}<1$，对于 $\forall x\in R$，$t\in\left[0,T\right)$，对(5.2)的两边分别关于 t 积分

$$\frac{4}{\gamma+3}\tau^{\frac{\gamma+3}{4}}\Big|_{t_0}^{t}\le\frac{1}{2}\left(Y+Q\right)t.$$

因此我们有

$$\tau\left(x,t\right)\le\left[\tau_0^{\frac{\gamma+3}{4}}+\frac{\gamma+3}{8}\left(Y+Q\right)t\right]^{\frac{4}{\gamma+3}}. \tag{5.3}$$

下边定理是本文中最主要的结论。

定理 5.3 假设 $(\tau_0(x),u_0(x))$ 满足假设 2.1，当 $0<\gamma<1$ 时，如果存在一点 $x^*\in R$ 使得

$$s_x(x^*,0)<0 \text{ 或 } r_x(x^*,0)<0 .$$

则系统(1.3)的古典解发生爆破。

证明 我们证明对某一 x，如果 $s_x(x,0)<0$ 或 $r_x(x,0)<0$，奇性在有限时间内发生。不失一般性，我们假设 $s_x(x^*,0)<0$，则对于某一 x^*，$y(x^*,0)<0$，穿过的 $(x^*,0)$ 的向前特征表示为 $x^+(t)$，通过(4.7)有

$$\frac{1}{y(x^+(t),t)}=\frac{1}{y(x_0,0)}+\int_0^t a_0(x^+(\sigma),\sigma)\mathrm{d}\sigma ,$$

为了证明 y 在有限的时间内发生爆破，主要是证明

$$\int_0^t a_0(x^+(\sigma),\sigma)\mathrm{d}\sigma=\infty ,$$

这里的积分是沿着前特征 $x^+(t)$。从 a_0 的定义来看，我们有

$$a_0(x^+(t),t)=\frac{1-\gamma}{4}\tau^{\frac{-3-\gamma}{4}}\ge\frac{1-\gamma}{4}\left[M_1^{\frac{\gamma+3}{4}}+\frac{\gamma+3}{8}(Y+Q)t\right]^{-1} .$$

所以 $a_0(x^+(t),t)$ 有正下界，因此

$$\int_0^t a_0(x^+(\sigma),\sigma)\mathrm{d}\sigma=\infty .$$

所以 y 在有限时间内发生爆破。

参考文献

[1] Sideris, T. (1985) Formation of Singularities in Three-Dimensional Compressible Fluids. *Communications in Mathematical Physics*, **101**, 475-485. https://doi.org/10.1007/BF01210741

[2] Lax, P. (1964) Development of Singularities of Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **5**, 611-614. https://doi.org/10.1063/1.1704154

[3] John, F. (1974) Formation of Singularities in One-Dimensional Nonlinear Wave Propagation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **27**, 377-405. https://doi.org/10.1002/cpa.3160270307

[4] Liu, T. (1979) The Development of Singularities in the Nonlinear Waves for Quasi-Linear Hyperbolic Partial Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **33**, 92-111. https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90082-2

[5] Li, T., Zhou, Y. and Kong, D. (1994) Weak Linear Degeneracy and Global Classical Solutions Forgeneral Quasilinear Hyperbolic Systems. *Communications in Partial Differential Equations*, **19**, 1263-1317. https://doi.org/10.1080/03605309408821055

[6] Li, T., Zhou, Y. and Kong, D. (1997) Global Classical Solutions for General Quasilinear Hyperbolic Systems with Decay Initial Data. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **28**, 1299-1332. https://doi.org/10.1016/0362-546X(95)00228-N

[7] Chen, G., Pan, R. and Zhu, S. (2017) Singularity Formation for the Compressible Euler Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **49**, 2591-2614. https://doi.org/10.1137/16M1062818

[8] Chen, G. (2011) Formation of Singularity and Smooth Wave Propagation for the Non-Isentropic Compressible Euler Equations. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, **8**, 671-690. https://doi.org/10.1142/S0219891611002536

[9] Chen, G., Young, R. and Zhang, Q. (2013) Shock Formation in the Compressible Euler Equations and Related Systems. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, **10**, 149-172. https://doi.org/10.1142/S0219891613500069

[10] Chen, G. and Young, R. (2012) Smooth Solutions and Singularity Formation for the Inhomogeneous Nonlinear Wave Equation. *Journal of Differential Equations*, **252**, 2580-2595. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.09.004

[11] Chen, G., Pan, R. and Zhu, S. (2014) Lower Bound of Density for Lipschitz Continuous Solutions in the Isentropic Gas Dynamics. arXiv:1410.3182.

[12] Zheng, H. (2016) Singularity Formation for the Compressible Euler Equations with General Pressure Law. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **438**, 59-72. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.02.001

[13] Temple, B. and Young, R. (2009) A Paradigm for Time-Periodic Sound Wave Propagation in the Compressible Euler Equations. *Methods Appl. Anal.*, **16**, 341-364. https://doi.org/10.4310/MAA.2009.v16.n3.a5

[14] Rammaha, M.A. (1989) Formation of Singularities in Compressible Fluids in Two-Space Dimensions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **107**, 705-714. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1989-0984811-5

[15] Chen, G., Chen, G.Q.G. and Zhu, S. (2021) Formation of Singularities and Existence of Global Continuous Solutions for the Compressible Euler Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **53**, 6280-6325. https://doi.org/10.1137/20M1316603

[16] Cheng, B., Qu, P. and Xie, C. (2018) Singularity Formation and Global Existence of Classical Solutions for One-Dimensional Rotating Shallow Water System. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **50**, 2486-2508. https://doi.org/10.1137/17M1130101

[17] Chen, S., Li, H., Li, J., *et al*. (2020) Global and Blow-Up Solutions for Compressible Euler Equations with Time-Dependent Damping. *Journal of Differential Equations*, **268**, 5035-5077. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.11.002

[18] Sui, Y. and Yu, H. (2022) Vacuum and Singularity Formation Problem for Compressible Euler Equations with General Pressure Law and Time-Dependent Damping. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **65**, Article ID: 103472. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103472

[19] Athanasiou, N. and Zhu, S. (2021) Formation of Singularities for the Relativistic Euler Equations. *Journal of Differential Equations*, **284**, 284-317. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.03.010

[20] Lai, G. and Zhu, M. (2022) Formation of Singularities of Solutions to the Compressible Euler Equations for a Chaplygin Gas. *Applied Mathematics Letters*, **129**, Article ID: 107978. https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.107978

[21] Benaoum, H.B. (2002) Accelerated Universe from Modified Chaplygin Gas and Tachyonic Fluid. Syracuse University, Physics Department, Syracuse.