Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(7), 1095-1102
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.127121

阶为八倍奇素数的边本原图

赖子峰

云南财经大学统计与数学学院，云南 昆明

收稿日期：2022年5月25日；录用日期：2022年6月28日；发布日期：2022年7月5日

摘 要

称一个图是边本原的，如果其全自同构群在其边集上的作用是本原的。通过Li的研究成果，我们可以得到包含子群的指数为四倍奇素数和八倍奇素数的本原置换群，并且将连通的非平凡边本原图分为了三种情形。本文我们考虑顶点本原和二部本原的情形，刻画阶为八倍奇素数的边本原图。

关键词

边本原图，本原置换群，几乎单型

Edge-Primitive Graphs of Order Eight Times an Odd Prime

Zifeng Lai

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: May 25th, 2022; accepted: Jun. 28th, 2022; published: Jul. 5th, 2022

Abstract

A graph is called edge-primitive, if its automorphism group acts primitively on its edge set. Through Li's research findings, we can obtain the primitive permutation group with a subgroup of index four times an odd prime and eight times an odd prime, and divide the connected non-trivial edge-primitive graphs into three cases. In this paper, edge-primitive graphs of order eight times an odd prime are characterized by considering the case of vertex-primitive and vertex-biprimitive.

Keywords

Edge-Primitive Graph, Primitive Permutation Group, Almost Simple Type

文章引用: 赖子峰. 阶为八倍奇素数的边本原图[J]. 理论数学, 2022, 12(7): 1095-1102.
DOI: 10.12677/pm.2022.127121

1. 引言

本文讨论的都是有限无向、无自环和重边的图。

对于一个非空图Γ，我们用$V\Gamma$，$E\Gamma$，$A\Gamma$和$G \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$分别表示它的顶点集、边集、弧集和全自同构群，记$|V\Gamma|$和$val(\Gamma)$分别为图$\Gamma$的阶和度数。给定顶点$\alpha \in V\Gamma$，与顶点$\alpha$邻接的点集称为$\alpha$的邻域，记为$\Gamma(\alpha)$，$|\Gamma(\alpha)|$称为点$\alpha$的度数。我们称顶点集的一个$s+1$序列$(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$为$\Gamma$的一条 s-弧，如果任意相邻两点邻接且$\alpha_{i+1} \ne \alpha_{i-1}$，其中$1 \le i \le s-1$。设$G \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$，若$G$在$V\Gamma$、$E\Gamma$、$A\Gamma$上的作用传递，则分别称$\Gamma$为$G$-点传递图、$G$-边传递图和$G$-弧传递图。

边本原图是弧传递图[1]的一个特殊子类，因此其具有特殊性但不失普遍性。我们知道除了星图外边本原图都是弧传递图，因此我们称一个边本原图是非平凡的，如果它是连通的弧传递图并且它的度数至少是 3。相比于弧传递图，边本原图的例子十分稀少，因此刻画边本原图是一项有意义的工作。

边本原图的研究开始于著名群论学家 Weiss [2]于 1973 年对 3 度边本原图的完全分类，其中有 6 阶的完全二部图、14 阶的 Heawood 图、30 阶的 Tutte-Coxeter 图以及 102 阶的 Biggs-Smith 图。后来学者们发现了新的边本原图，例如 Hoffman-Singleton 图和 Higman-Sims 图，一些以零散单群$J_2, McL, Ru, Suz, Fi_{23}$为自同构群的边本原图。

约 30 年后，Li 等人重新开始对边本原图的研究工作。如 M. Giudici 和 Li [3]于 2010 年系统地分析了边本原图可能的点和边作用，并且决定了基柱为$PSL(2,q),(q \ne 2,3)$的G-边本原图；Li 和 Zhang [4]于 2011 年决定了边本原 s-弧传递图的分类($s \ge 4$)；Feng、Li 和 Guo [5] [6]于 2011 年分别决定了度数为 4 和 5 的边本原图；Pan 和 Wu [7]于 2017 年刻画了 6 度的边本原图，并且完全分类了边稳定子群为可解的情形。此外，近几年，对边本原图的研究取得了创新性的成果。如 Pan 和 Wu [8] [9]于 2019 年完全分类阶为素数幂和二倍素数幂的边本原图；Lu [10]于 2019 年刻画了 2-弧传递的边本原图，证明了这类图是完全二部图或者其全自同构群是几乎单群；M. Giudici [11]在 2021 年通过分类图的全自同构群为一个基柱是交错群或零散单群的几乎单群，刻画了 3-弧传递的边本原图。

本文所使用的符号都是标准的。由 Atlas [12]，我们有时用正整数n来表示n阶循环群$\mathbb{Z}_n$。对于一个素数幂$q = p^n$，用p^n表示q阶的初等交换群。其他有限群符号可参考[13]。对于两个群N和H，我们用$N \times H$表示N和H的直积，用$N.H$表示N被H扩张，如果这个扩张是可裂的，则记为$N:H$。用$\mathrm{Aut}(T)$和$\mathrm{Out}(T)$分别表示为群T的全自同构群和外自同构群。用$\mathcal{G}(a,b)$表示阶为a且度数为b的G-边本原图，特别地，用K_n和$K_{n,n}$分别表示n阶的完全图和$2n$阶的完全二部图。

本文的主要内容是刻画阶为八倍奇素数的边本原图，下面给出本文的主要结果。

定理 1.1 设Γ是阶为 $8p$ 的 G-边本原图，其中 p 为奇素数。如果 G 在$V\Gamma$上本原或二部本原，$G \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$，则图$\Gamma$是 3-传递的$K_{4p,4p}$，或者是表 1 所列的其中一种情形，其中$G_v, G_e, s$分别是$G$的点稳定子群、边稳定子群和$\Gamma$的 s-弧传递性。

注：**定理** 1.1 的证明见下文的**定理** 3.1，**定理** 4.1。

本文的结构如下：在第二节，给出一些初等的结论、相关定义和引理。在第三节和第四节，分别考虑G在$V\Gamma$上本原和二部本原的情形。

Table 1. Edge-primitive graphs of order $8p$
表 1. 阶为 $8p$ 的边本原图

Γ	G	G_v	G_e	s	conditions
K_{8p}	$A_{8p}.o$	$A_{8p-1}.o$	$S_{8p-2}.o$	2	$1 \le o \le \mathbb{Z}_2$
$\mathcal{G}(248,5)$	$PSL_2(31)$	A_5	S_4	2	
$\mathcal{G}(56,10)$	$PSL_3(4).o$	$A_6.o$	$3^2:Q_8.o$	2	$1 \le o \le \mathbb{Z}_4$

2. 预备知识

本节介绍一些重要的定义和引理。下面首先给出初等数论和有限群论中的小结论。

引理 2.1 ([14]，引理 3.2)设 q 为一个素数的方幂，p 是素数。若有 $\frac{q^d-1}{q-1}=2^e p^n$ 成立，其中 $e=1$ 或 2，n 为正整数，则 $d=2$。

引理 2.2 ([15]，定理 8.5.3)设 p 和 q 是素数，a 和 b 是正整数，则阶为 $p^a q^b$ 的群是可解群。

下面给出群在集合上拟本原、二部本原作用的定义。

定义 2.3 [3]我们称 G 在集合 Ω 上是拟本原的，如果 G 的每一个极小正规子群在 Ω 上的作用都是传递的；我们称 G 在 Ω 上是二部本原的，如果 G 在 Ω 上非本原，并且其所有的非本原不变划分都恰有两个部。

注：在上述二部本原的定义下，若 G 在 Ω 上是二部本原，则 G 在 Ω 上一定是二部拟本原。

Praeger [16]详细分类了拟本原本原置换群，即下述引理：

引理 2.4 [O'Nan Scott-Praeger 定理]设 G 是集合 Ω 上的拟本原置换群，令 $N=Soc(G)$ 为 G 的基柱，T 为非交换单群，给定 $v\in\Omega$。则 G 为以下八种类型之一：

i) 如果 $N\cong T^k$ 为 G 的唯一极小正规子群，其中 $k\ge 2$ 时，有六种类型：

1) 仿射型(HA)：如果 $N \lhd G \le N:\mathrm{Aut}(T)\cong \mathbb{Z}_p^d:GL(d,q)=AGL(d,q)$。

2) 几乎单型(AS)：如果 $N \lhd G \le \mathrm{Aut}(N)$， $N=T$。

3) 单对角型(SD)：如果 N 包含一个正规子群 $H\cong T^{k-1}$ 作用在 Ω 上是正则的并且 $N_v\cong T$。

4) 扭圈积型(TW)：如果 N 在 Ω 上的作用是正则的。

5) 乘积作用型(PA)：如果 $N_v\ne 1$，N 不包含正规子群作用在 Ω 上正则。

6) 复合对角型(CD)：如果 $T_v\cong T^m$，其中 $m\mid k$， $|\Omega|=|T|^{k-m}$。

ii) 如果 G 恰有两个极小正规子群 L 和 M，则 $L\cong M\cong T^l$，并且有 $N\cong L\times M$ 时，有两种类型：

7) 全形单型(HS)： $l=1$，且 $G\le (L\times M).\mathrm{Out}(T)=T^2.\mathrm{Out}(T)$。

8) 复合全型(HC)： $l\ge 2$，且 $G\le (L\times M).\mathrm{Out}(T^k)$。

引理 2.5 ([3] 定理 1.1)设图 Γ 是一个连通的非平凡 G-边本原图。则 Γ 是一个 G-弧传递图，并且为下列情形之一：

1) Γ 为 G-顶点本原。

2) Γ 为 G-顶点二部本原。

3) Γ 为 G-边本原图 Σ 的扩展(spread)，且 Σ 为 G-非局部本原图。

注：本文的主要研究内容是刻画上述引理情形(1)和(2)的边本原图。

引理 2.6 设 Γ 是阶为 $8p$ 的 G-边本原图，其中 p 为奇素数。如果 G 在 $V\Gamma$ 上本原， $G\le \mathrm{Aut}(\Gamma)$。则

G 为几乎单型。

证明 令 $N=Soc(G)=T^k$ 为 G 的基柱。Liebeck 和 Praeger 对本原置换群进行了分类，其被分为五类：几乎单，仿射，乘积作用，扭圈积和对角型，即属于**引理** 2.4 中的情形。下面逐一讨论：

1) 若 G 为 HA 型，则 $N\cong\mathbb{Z}_p^k$ 在 $V\Gamma$ 上正则，于是有 $p^k=|N|=|V\Gamma|=8p$，故 $p=2$，舍去。

2) 若 G 为 SD 型，则有 $|N:N_v|=|T|^{k-l}$，其中 T 为非交换单群，$v\in V\Gamma$，$1\le l\le k$。由 G 在 $V\Gamma$ 上本原，则 N 在 $V\Gamma$ 上传递，因此有 $8p=|V\Gamma|=|N:N_v|=|T|^{k-l}$。而由**引理** 2.1 可知 T 为可解群，矛盾。

3) 若 G 为 TW 型，则 N 在 $V\Gamma$ 上正则，则有 $8p=|V\Gamma|=|N|=|T|^k$。而由**引理** 2.1 可知 T 为可解群，矛盾。

4) 若 G 为 PA 型，则 $N=T^l$，其中 $l\ge 2$，由 G 在 $V\Gamma$ 上本原，则 N 在 $V\Gamma$ 上传递，因此有 $8p=|V\Gamma|=|N|=|T|^l$，而由**引理** 2.1 可知 T 为可解群，矛盾。

证毕，故 G 只可能为几乎单型。

下面引理给出非平凡 G-边本原图存在的一个必要条件。

引理 2.7 设图 Γ 为一个非平凡 G-边本原图，令 $e=\{u,v\}\in E\Gamma$。则 $|G_e|<|G_v|$ 且 $|G_e|/2$ 整除 $|G_v|$。

证明 由**引理** 2.5 可知 Γ 是连通的弧传递图，则有 $G_e=G_{uv}.\mathbb{Z}_2$ 并且 Γ 的度数 $val(\Gamma)=|G_v:G_{uv}|\ge 3$。并且有 $|G_e|=2|G_{uv}|\le 2|G_v|/3<|G_v|$，$|G_e|/2=|G_{uv}|$ 整除 $|G_v|$。

Li 等人在[17]中分类了包含子群的指数为两个素数幂的乘积的本原置换群。从而我们可读出包含子群的指数为四倍奇素数和八倍奇素数的本原置换群。可得到下述的引理：

引理 2.8 设 T 是几乎单型的本原置换群，H 是 T 的子群，并且满足 $n=|T:H|=4p$ 或 $8p$，其中 p 为奇素数。则二元组 (T,H) 如表 2 所列。其中 q 为素数 p 的方幂，P_1 和 P_{d-1} 分别表示 $PSL_d(q)$ 作用在 1 维和 $d-1$ 维子空间上的点稳定子群，其中 $d\ge 3$。

Table 2. Non-abelian simple groups with a subgroup of index 4p and 8p
表 2. 具有子群的指数为 4p 和 8p 的非交换单群

T	H	$n=4p$	T	H	$n=8p$
A_8	S_6	$4\cdot 7$	A_8	$(A_5\times 3):2$	$8\cdot 7$
A_{4p}	A_{4p-1}	$4\cdot p$	A_{17}	S_{15}	$8\cdot 17$
M_{11}	$PSL_2(11)$	$4\cdot 3$	A_{8p}	A_{8p-1}	$8\cdot p$
M_{12}	M_{11}	$4\cdot 3$	$PSL_2(16)$	D_{30}	$8\cdot 17$
$PSL_2(8)$	D_8	$4\cdot 7$	$PSL_2(17)$	D_{18}	$8\cdot 17$
$PSL_2(16)$	A_5	$4\cdot 17$	$PSL_2(31)$	A_5	$8\cdot 31$
$PSL_d(q)$	P_1, P_{d-1}	$\frac{q^d-1}{q-1}$	$PSL_3(4)$	A_6	$8\cdot 7$
$PSU_3(3)$	$3_+^{1+2}:8$	$4\cdot 7$	$PSL_d(q)$	P_1, P_{d-1}	$\frac{q^d-1}{q-1}$
$PSp_6(2)$	$PSU_4(2):2$	$4\cdot 7$	$PSp_4(3)$	$3_+^{1+2}:2A_4$ $3^3:S_4$	$8\cdot 5$
			$PSp_4(4)$	$(A_5\times A_5):2$	$8\cdot 17$
			$PSU_3(7)$	$7^{1+2}:48$	$8\cdot 43$
			$P\Omega_8^-(2)$	$PSp_6(2)$	$8\cdot 17$

引理 2.9 [18]若交换群 G 忠实且传递作用在集合 Ω 上，则 G 在 Ω 上正则。

引理 3 [19]设 Γ 是一个完全图，$G \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$。若 $Soc(G) \cong PSL_d(q)$，其中 $d \ge 3$，则 G 作用在 Γ 上非本原。

3. 顶点本原的情形

在本节，我们考虑 G 在 $V\Gamma$ 上本原，我们可以得到下面的定理：

定理 3.1 设 Γ 是 $8p$ 阶的 G-边本原图，其中 $G \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$，$G$ 在 $V\Gamma$ 上本原。则 $\Gamma = K_{8p}$，其中 p 为奇素数或者 $\Gamma = \mathcal{G}(248,5)$，或者 $\Gamma = \mathcal{G}(56,10)$。

证明：通过**引理** 2.6 可知 G 是 AS 型的。令 $T = Soc(G)$，由 T 在 $V\Gamma$ 上传递，则 $|T:T_v| = 8p$，$v \in V\Gamma$。由**引理** 2.8 可知 $(T:T_v)$ 即为表 2 的右侧所列。由 G 在 $E\Gamma$ 的作用是忠实的，则 G 和 T 都可以看成 $E\Gamma$ 上的本原置换群。令 $e = \{u,v\} \in E\Gamma$，下考虑边稳定子群 G_e 是否为 G 的极大子群。

注：下文的证明将多次用到数学工具：Magma [20]，Atlas [12]。

设 $(T,T_v) = (A_8,(A_5\times 3):2)$，由 Atlas 可知，此时 $T_v = (A_5 \times 3):2$ 为 T 中阶最小的极大子群，由**引理** 2.7，我们可得到：$|G_e| < |G_v| = |(A_5\times 3):2||o|$，其中 $o \le \mathrm{Out}(A_8) \cong \mathbb{Z}_2$，矛盾。

设 $(T,T_v) = (A_{17},S_{15})$，则 $G \cong A_{17}.o$，$o \le \mathrm{Out}(A_{17}) \cong \mathbb{Z}_2$，由 Magma 计算可知，$G$ 在 $V\Gamma$ 上的秩为 3，非平凡次轨道的长度为 30 或 105。故可得：$|G_{uv}| = |G_v|/val(\Gamma) = 43589145600|o|$ 或 $12454041600|o|$，$|G_e| = 87178291200|o|$ 或 $24908083200|o|$。由 Magma 计算可知，G 无阶为 $|G_e|$ 的极大子群，舍去。

设 $(T,T_v) = (A_{8p},A_{8p-1})$，则 $G \cong A_{8p}.o$，$o \le \mathrm{Out}(A_{8p}) \cong \mathbb{Z}_2$。由 G 在 $V\Gamma$ 上是 2-传递的，故此时存在边本原图 Γ 为 K_{8p}，其中 $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong S_{8p}$，$\mathrm{Aut}(\Gamma)_v \cong S_{8p-1}$，$\mathrm{Aut}(\Gamma)_e \cong S_{8p-2}\times\mathbb{Z}_2$ 为 S_{8p} 的极大子群。

设 $(T,T_v) = (PSL_2(16),D_{30})$，$(PSL_2(17),D_{18})$ 或 $(PSL_2(31),A_5)$。由([3]，表格 1)易知仅当 $(T,T_v) = (PSL_2(16),D_{30})$ 时存在边本原图，记为 $\mathcal{G}(248,5)$，并且它是 2-弧传递的。

设 $(T,T_v) = (PSL_3(4),A_6)$，则 $G \cong PSL_3(4).o$，$o \le \mathrm{Out}(PSL_3(4)) \cong \mathbb{Z}_2\times S_3$，首先考虑：(i) 当有 $G \cong PSL_3(4).o$，$o \le \mathbb{Z}_4$ 时，此时由 Magma 计算可知，G 在 $V\Gamma$ 上的秩为 3，非平凡次轨道的长度为 10 或 45。故此时可计算得 $|G_{uv}| = |G_v|/val(\Gamma) = 36|o|$ 或 $8|o|$，$|G_e| = 72|o|$ 或 $16|o|$。由 Atlas 可知，此时 G 恰有阶为 $72|o|$ 的极大子群，故存在边本原图，记为 $\mathcal{G}(56,10)$。(ii) 当 $G \cong T.o$，$\mathbb{Z}_3 \le o \le S_3\times\mathbb{Z}_2$ 时，G 不存在指数为 56 的子群，舍去。

设 $(T,T_v) = PSL_d(q),P_1$，由**引理** 3 可知，此时不存在边本原图。

设 $(T,T_v) = (PSp_4(3),3_+^{1+2}:2A_4)$ 或 $(T,T_v) = (PSp_4(3),3^3:S_4)$，此时 $G \cong T.o$，$o \le \mathrm{Out}(PSp_4(3)) \cong \mathbb{Z}_2$，若 G_e 为 G 的极大子群，由 Atlas 可知，当 $|G_e| < |G_v|$ 时，$|G_e|$ 只能为 $576|o|$，而 $|G_v| = |3_+^{1+2}:2A_4||o| = |3^3:S_4||o| = 648|o|$。计算可知 $|G_e|/2$ 不整除 $|G_v|$，这与**引理** 2.7 矛盾，舍去。

设 $(T,T_v) = (PSp_4(4),(A_5\times A_5):2)$，此时 $G \cong T.o$，$o \le \mathrm{Out}(PSp_4(4)) \cong \mathbb{Z}_4$，由 Magma 计算可知，$G$ 在 $V\Gamma$ 上的秩为 3，非平凡次轨道的长度为 60 或 75，故可得：$|G_{uv}| = |G_v|/val(\Gamma) = 120|o|$ 或 $96|o|$，$|G_e| = 240|o|$ 或 $192|o|$。而 G 的极大子群阶至少为 $720|o|$，矛盾。

设 $(T,T_v) = (PSU_3(7),7^{1+2}:48)$，此时 $G \cong T.o$，$o \le \mathrm{Out}(PSU_3(7)) \cong \mathbb{Z}_2$，由 Magma 计算可知，$G$ 在 $V\Gamma$ 上的秩为 2，非平凡次轨道的长度为 343，故可得：$|G_{uv}| = |G_v|/val(\Gamma) = 48|o|$，$|G_e| = 96|o|$。而 G 的极大子群阶至少为 $129|o|$，矛盾。

设 $(T,T_v) = (P\Omega_8^-(2),PSp_6(2))$，此时 $G \cong T.o$，$o \le \mathrm{Out}(P\Omega_8^-(2)) \cong \mathbb{Z}_2$，由 Magma 计算可知，$G$ 在 $V\Gamma$

上的秩为 3，非平凡次轨道的长度为 63 或 72，故可得：$|G_{uv}|=|G_v|/val(\Gamma)=23040|o|$ 或 $20160|o|$，$|G_e|=46080|o|$ 或 $40320|o|$。而 G 的极大子群没有阶为 $|G_e|$ 的极大子群，矛盾。

4. 二部本原的情形

在本节，我们考虑 G 在 $V\Gamma$ 上二部本原，可以得到下面的定理：

定理 4.1 设 Γ 是 $8p$ 阶的 G-边本原图，其中 $G\le \mathrm{Aut}(\Gamma)$，$G$ 在 $V\Gamma$ 上二部本原。则 $\Gamma=K_{4p,4p}$ 是 3-传递的，其中 p 为奇素数。

注：**定理** 4.1 的证明见下述**引理** 4.4~4.7。

下面给出图的标准双覆盖的一个重要结论。

引理 4.2 ([8]，引理 3.1)任意图的标准双覆盖都不是边本原图。特别地，$\Gamma=K_{n,n}-nK_2$ 不是边本原的，其中 n 是正整数。

下面的定理对二部拟本原置换群的情形进行了分类。

定理 4.2 ([21]，定理 1.4，定理 1.5)设 G 是 Ω 上的二部拟本原置换群，G 在 Ω 上有两部为 Δ_1,Δ_2，$\Omega=\Delta_1\cup\Delta_2$。下令 $G^+=G_{\Delta_1}=G_{\Delta_2}$，则 G^+ 为下列情形之一：

1) G^+ 在 Δ_1,Δ_2 上不忠实。

2) G^+ 在 Δ_1,Δ_2 上忠实：

i) G^+ 在 Δ_1,Δ_2 上拟本原。

ii) G^+ 有两个同构的极小正规子群 L 和 M，它们在 Ω 上半正则。它们的直积 $L\times M$ 是 G 的极小正规子群，并且在 Δ_1,Δ_2 上传递。

假设 4.3 设 Γ 是 $8p$ 阶的 G-边本原图，其中 $G\le\mathrm{Aut}(\Gamma)$，G 在 $V\Gamma$ 上二部本原，其中 p 为奇素数。设 G 在 $V\Gamma$ 上二部本原，其两部为 Δ_1,Δ_2，令 $G^+=G_{\Delta_1}=G_{\Delta_2}$，则 $G=G^+.\mathbb{Z}_2$，并且任取 $g\in G\setminus G^+$，有 $G=\langle G^+,g\rangle$。

以下引理是在上述假设成立的条件下得到的。

引理 4.4 若 G^+ 在 Δ_1,Δ_2 上不忠实，则 Γ 为 3-传递的完全二部图 $K_{4p,4p}$，其中 p 为奇素数。

证明 令 K_1,K_2 分别为 G^+ 作用在 Δ_1,Δ_2 上的核，则我们有 $K_1\cap K_2=1$。因为 $G=\langle G^+,g\rangle$ 在 $V\Gamma$ 上传递，有 $\Delta_1^g=\Delta_2,\Delta_2^g=\Delta_1$。任取 $\beta\in\Delta_2$，有 $\beta^{g^{-1}}\in\Delta_1$，则 $\beta^{g^{-1}K_1g}=\left(\beta^{g^{-1}}\right)^{K_1g}=\beta^{g^{-1}g}=\beta$，于是 $K_1^g\subseteq K_2$；同理有 $K_2\subseteq K_1^g$。因此 $K_1^g=K_2$，$K_2^g=K_1$，并且 $1\ne K_1\times K_2\lhd G$。因为 G 在 $V\Gamma$ 上二部本原，则 $K_1\times K_2$ 在 Δ_1,Δ_2 上都传递，于是 K_1 在 Δ_2 上传递，K_2 在 Δ_1 上传递，因此 Δ_1 中的每一个点都与 Δ_2 中的每个点相邻接，从而 $\Gamma=K_{4p,4p}$ 是完全二部图。

引理 4.5 若 G^+ 在 Δ_1,Δ_2 上忠实，则 G^+ 在 Δ_1,Δ_2 上的作用是拟本原。

证明 设 G^+ 有两个同构的极小正规子群 L 和 M，并且在 $V\Gamma$ 上半正则。进一步，它们的直积 $L\times M$ 是 G 的极小正规子群，并且在 Δ_1,Δ_2 上传递。于是有 $4p\,\big||L||M|=|M|^2$，并且 $|L|=|M|\,\big|\,2|\Delta_i|$，从而 L 和 M 是 $\{2,p\}$ 群，这与它们是极小正规子群矛盾。

引理 4.6 $\left(G^+\right)^{\Delta_1}\cong\left(G^+\right)^{\Delta_2}$ 是忠实的几乎单型的拟本原置换群。

证明 因为 G^+ 在 Δ_1,Δ_2 上的作用是拟本原，由**引理** 2.4 可知 G^+可能为仿射型、乘积作用型或几乎单型。令 $N=Soc(G)$ 为 G 的基柱，下证明前两种情形是不可能的：

若 G^+ 为仿射型，则 N 是交换群并且在 Δ_1,Δ_2 上正则。因为 N 是 G^+ 的特征子群，$G^+\lhd G$，则有 $N\lhd G$。

由 G 在 $E\Gamma$ 上本原，所以其正规子群 N 在 $E\Gamma$ 上传递。于是由**引理** 2.9 可知，N 在 $E\Gamma$ 上正则。从而我们有 $|\Delta_1|=|\Delta_2|=|N|=|E\Gamma|=|\Delta_i|\cdot val(\Gamma)$，则 $val(\Gamma)=1$，矛盾。

若 G^+ 为乘积作用型，由于 G 在 $V\Gamma$ 上二部本原，则 G^+ 在 Δ_1,Δ_2 上是本原的，于是 $G^+\cong\left(G^+\right)^{\Delta_i}$ 在 Δ_i 上是乘积作用型本原置换群，从而可设 $N=Soc\left(G^+\right)=T^l$，其中 $l\ge 2$，因此有 $4p=|T:T_v|^l=|N:N_\alpha|$，此时 $p=2$ 或 $l=1$，矛盾。

引理 4.7 设 $\left(G^+\right)^{\Delta_1}\cong\left(G^+\right)^{\Delta_2}$ 是忠实的几乎单型的拟本原置换群，则 Γ 为完全二部图 $K_{12,12}$。

证明设 $T=Soc\left(G^+\right)$，其中 T 为非交换单群，则 $|T:T_v|=4p$，其中 $v\in\Delta_1$ 或 Δ_2。由 $T\lhd G$，则 $G^+\cap C_G(T)=C_{G^+}(T)=1$，进一步我们有 $C_G(T)=C_G(T)/G^+\cap C_G(T)\cong C_G(T)G^+/C_G(T)\le G/G^+\cong\mathbb{Z}_2$，从而有 $C_G(T)\cong 1$ 或者 $\mathbb{Z}_2$。若 $C_G(T)\cong\mathbb{Z}_2$，则 $G=C_G(T)\times G^+\cong\mathbb{Z}_2\times G^+$，则 G 有一个正规子群 $\mathbb{Z}_2$ 在 $E\Gamma$ 上不传递，这与 G 在 $E\Gamma$ 上本原矛盾，因此 $C_G(T)\cong 1$。于是 $G=G/C_G(T)\le \mathrm{Aut}(T)$。故 $G\cong T.o$ 是几乎单型，其中 $Soc(G)=T$，$o\le \mathrm{Out}(T)$。由引理 2.可知，(T,T_v) 如表 2 左侧所列。下面分两种情形讨论：

1) 如果 T 在 Δ_1,Δ_2 上 2-传递。

假设 T^{Δ_1} 和 T^{Δ_2} 置换等价。取 $\alpha\in\Delta_1$，由于 T^{Δ_1} 和 T^{Δ_2} 置换等价，则存在 $\beta\in\Delta_2$ 使得 $T_\alpha=T_\beta$。若 α 与 β 邻接，因为 $T\lhd G$，由 G 的边本原性，则 T 在 $E\Gamma$ 上传递。从而有 T_α 在 $\Gamma(\alpha)$ 上传递。假设 $\beta\in\Gamma(\alpha)$，则 $\Gamma(\alpha)=\beta^{T_\alpha}=\beta$，矛盾。于是 α 与 β 不邻接。由 T 在 Δ_1,Δ_2 上 2 -传递，$T_\alpha=T_\beta$ 在 $\Delta_2\setminus\{\beta\}$ 上传递，所以 $\Delta_2\setminus\{\beta\}$ 中每个点都与 α 邻接。故此时 $\Gamma=K_{4p,4p}-4pK_2$。由**引理** 3 可知 $\mathrm{Aut}(\Gamma)=S_{4p}\times\mathbb{Z}_2$ 有一个正规子群 $\mathbb{Z}_2$ 在 $E\Gamma$ 上不传递，矛盾。从而 T^{Δ_1} 和 T^{Δ_2} 不置换等价。因此 T 在 Δ_1,Δ_2 上至少有两个不等价的次数相等的 2-传递置换表示。([22]，定理 5.3(S))中得到了 2-传递置换群的完全分类，故表 2 左侧中满足条件的只有 $(T,T_v)=(M_{12},M_{11})$ 或 $\left(PSL_d(q),P_1\right)$，其中 $d\ge 3$。

若 $(T,T_v)=(M_{12},M_{11})$，则 $|V\Gamma|=2|T:T_v|=24$。由 G 是几乎单的，则 $G\cong T.\mathbb{Z}_2=\mathrm{Aut}(M_{12})$，$G^+\cong T=M_{12}$，并且有 $G_v\cong G_v^+=M_{11}$，由 Magma 计算可知，此时 G 在 $V\Gamma$ 上的秩为 3，非平凡次轨道的长度为 11 或 12，计算可得 $|G_{uv}|=720$ 或 660，$|G_e|=1440$ 或 1320。而由 Atlas 可知 $\mathrm{Aut}(M_{12})$ 恰有阶为 1320 的极大子群。故存在 24 阶的边本原图为 $K_{12,12}$。

若 $(T,T_v)=\left(PSL_d(q),P_1\right)$，则 $|T:T_v|=\dfrac{q^d-1}{q-1}=4p$，由**引理** 2.1 可知，$d=2$，矛盾。

2) 如果 T 在 Δ_1,Δ_2 上非 2 -传递，则 $(T,T_v)=(A_8,S_6)$ 或 $\left(PSL_2(16),A_5\right)$。

若 $(T,T_v)=(A_8,S_6)$，则 $|V\Gamma|=2|T:T_v|=56$。由 G 是几乎单的，则 $G\cong T.\mathbb{Z}_2=S_8$，$G^+\cong T=A_8$，并且有 $G_v\cong G_v^+=S_6$，由 Magma 计算可知，此时 G 在 $V\Gamma$ 上的秩为 7，非平凡次轨道长度可能为 6 或 30，计算得 $|G_{uv}|=120$ 或 24，$|G_e|=240$ 或 48。而由 Magma 计算可知 S_8 极大子群的阶至少为 336，矛盾。

若 $(T,T_v)=\left(PSL_2(16),A_5\right)$，由文献([3]，表格 1)易知不存在边本原图。

基金项目

云南省科技厅应用基础研究项目(2019FD116)资助。

参考文献

[1] Li, C.H. (2001) Finite s-arc Transitive Graphs of Prime-Power Order. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **33**, 129-137. https://doi.org/10.1112/blms/33.2.129

[2] Weiss, R.M. (1973) Kantenprimitive Graphen vom Grad drei. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **15**, 269-288.

https://doi.org/10.1016/0095-8956(73)90041-5

[3] Giudici, M. and Li, C.H. (2009) On Finite Edge-Primitive and Edge-Quasiprimitive Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **100**, 275-298. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2009.09.001

[4] Li, C.H. and Zhang, H. (2011) The Finite Primitive Groups with Soluble Stabilizers, and the Edge-Primitive s-arc Transitive Graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **103**, 441-472. https://doi.org/10.1112/plms/pdr004

[5] Guo, S.T., Feng, Y.Q. and Li, C.H. (2015) Edge-Primitive Tetravalent Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **112**, 124-137. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2014.12.004

[6] Guo, S.T., Feng, Y.Q. and Li, C.H. (2012) The Finite Edge-Primitive Pentavalent Graphs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **38**, 491-497. https://doi.org/10.1007/s10801-012-0412-y

[7] Pan, J.M. and Wu, C.X. (2020) Finite Hexavalent Edge-Primitive Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **378**, Article ID: 125207. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125207

[8] Pan, J.M., Huang, Z.H. and Wu, C.X. (2019) Edge-Primitive Graphs of Prime Power Order. *Graphs and Combinatorics*, **35**, 249-259. https://doi.org/10.1007/s00373-018-1997-2

[9] Pan, J.M., Huang, Z.H. and Wu, C.X. (2019) On Edge-Primitive Graphs of Order Twice a Prime Power. *Discrete Mathematics*, **342**, Article ID: 111594. https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.07.010

[10] Lu, Z.P. (2020) On Edge-Primitive 2-Arc-Transitive Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **171**, 105. https://doi.org/10.1016/j.jcta.2019.105172

[11] Giudici, M. and King, C. (2021) On Edge-Primitive 3-Arc-Transitive Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **151**, 282-306. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2021.06.012

[12] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A. and Wilson, R.A. (1985) Atlas of Finite Groups. Oxford University Press, London.

[13] Wilson, R.A. (2009) The Finite Simple Groups. Springer, London. https://doi.org/10.1007/978-1-84800-988-2

[14] 王超. 阶为四倍素数幂的素数度对称图[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南财经大学, 2020.

[15] Robinson, D.J.S. (1982) A Course in the Theory of Groups. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0128-8

[16] Praeger, C.E. (1993) On O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-arc Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **47**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[17] Li, C.H. and Li, X.H. (2019) On Permutation Groups of Degree a Product of Two Prime-Powers. *Communications in Algebra*, **42**, 4722-4743. https://doi.org/10.1080/00927872.2013.823500

[18] 徐明曜. 有限群初步[M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[19] Sibley, T.Q. (2004) On Classifying Finite Edge Colored Graphs with Two Transitive Automorphism Groups. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **90**, 121. https://doi.org/10.1016/S0095-8956(03)00079-0

[20] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[21] Li, C.H., Praeger, C.E., Venkatesh, A. and Zhou, S.M. (2002) Finite Locally-Quasiprimitive Graphs. *Discrete Mathematics*, **246**, 197-218. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(01)00258-8

[22] Cameron, P.J. (1981) Finite Permutation Groups and Finite Simple Groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **13**, 1-22. https://doi.org/10.1112/blms/13.1.1