Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(7), 1146-1159
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.127126

Hans汉斯

亚纯函数位移多项式的值分布

成奇斌，李叶舟

北京邮电大学，理学院，北京

收稿日期：2022年6月4日；录用日期：2022年7月5日；发布日期：2022年7月12日

摘　要

设f是非常数亚纯函数，$P_n(z,f)$是关于f的一类线性位移多项式，β是f的小函数。本文借助差分形式的Nevanlinna值分布理论，研究了f与$P_n(z,f)-\beta(z)$的特征函数之间的关系、$P_n(z,f)$与$P_n(z,f)-\beta(z)$的亏量等值分布性质，部分地推广了现有的一些结果。

关键词

亚纯函数，位移多项式，值分布，特征函数，亏量

On Value Distribution of Shift Polynomials of Meromorphic Functions

Qibin Cheng, Yezhou Li

School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing

Received: Jun. 4th, 2022; accepted: Jul. 5th, 2022; published: Jul. 12th, 2022

Abstract

Let f be a nonconstant meromorphic function, $P_n(z,f)$ be a shift polynomial of f, β be a small function with respect to f. With the help of difference version of Nevanlinna theory, some existing results could be partially generalized through studying the value distribution properties of $P_n(z,f)$, such as the relationship between the characteristic functions of f and $P_n(z,f)-\beta(z)$, the deficiencies of $P_n(z,f)$ and $P_n(z,f)-\beta(z)$.

文章引用: 成奇斌, 李叶舟. 亚纯函数位移多项式的值分布[J]. 理论数学, 2022, 12(7): 1146-1159.
DOI: 10.12677/pm.2022.127126

Keywords

Meromorphic Function, Shift Polynomial, Value Distribution, The Characteristic Function, Deficiency

1. 引言

诞生于上世纪 20 年代，以第一、第二基本定理为重要基础的 Nevanlinna 亚纯函数值分布理论，经过国内外几代数学工作者的接续努力，已拓展出众多研究方向，不断丰富着复分析、函数论的内涵。以微分算子的值分布为例，国内外不少学者已做过大量意义深远的研究，并收获了一系列经典结果[1] [2] [3] [4] [5]。

2006 年和 2008 年，Halburd 和 Korhonen，Chiang 和 Feng 分别研究了有限级亚纯函数的增长性，得到了两组差分形式的对数导数引理[6] [7]。随后学者们借助此工具将 Nevanlinna 理论中许多重要结果推广成差分形式[8]-[17]，完善了复域差分的值分布理论。

设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数，本文将采用 Nevanlinna 值分布理论的基本概念与标准符号[3] [5] [18]，如 f 的特征函数 $T(r,f)$、均值函数 $m(r,f)$、计数函数 $N(r,f)$ 等。

现将后文出现的一些符号作简要说明。设 $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，记 $\Delta^0 f(z)=f(z)$，定义 f 的(向前)差分为

$$\Delta f(z)=f(z+c)-f(z),\ \ \Delta^2 f(z)=\Delta f(z+c)-\Delta f(z),$$
$$\Delta^n f(z)=\Delta^{n-1} f(z+c)-\Delta^{n-1} f(z),\ \ (n=1,2,\cdots),$$

分别称为 f 的 1 阶、2 阶、n 阶差分。

非常数亚纯函数 f 的级与下级分别记为 $\sigma(f)$ 与 $\mu(f)$，f 的零点收敛指数、极点收敛指数分别记为 $\lambda(f)$ 与 $\lambda(1/f)$。

若对亚纯函数 s，有 $T(r,s)=o(T(r,f))$，$r\to\infty$ 且 $r\notin E$，其中 E 是个对数测度有限的集合，即 $\int_E \mathrm{d}t/t<\infty$，则称 s 为 f 的小函数。记 f 的所有小函数构成的集合为 $S(f)$。

注 1 在本文中，不同地方出现的 E 未必是相同的集合，但均表示对数测度有限的例外集。

设 $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，记

$$\delta(a,f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}.$$

若 $\delta(a,f)>0$，则称 a 是亚纯函数 f 的一个亏值(Nevanlinna 例外值)，并称 $\delta(a,f)$ 为亏量。若 $\lambda(f-a)<\sigma(f)$，则称 a 为 f 的一个 Borel 例外值。若 $a=\infty$，则上述记号中的 $m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$，$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$，$\lambda(f-a)$ 分别为 $m(r,f)$，$N(r,f)$，$\lambda(1/f)$。

对于整函数 f，用 $M(r,f)$ 来表示它在圆周 $|z|=r$ 上的最大模。设 $0<\sigma(f)=\sigma<\infty$，定义 f 的型为

$\tau(f)=\limsup_{r\to\infty}\dfrac{\log M(r,f)}{r^{\sigma}}$。

近年来，一些学者研究了亚纯函数 f 与其差分算子 $\Delta^n f$ 之间的关系，并在 $\Delta^n f$ 的零点、极点的值分布性质、亏量关系等方面做了不少工作[8] [9] [11] [12] [19] [20] [21]。

2014 年，蓝双婷、陈宗煊[19]证明了如下定理：

定理 A 设 c 是一个非零有穷复数，f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个有限级亚纯函数且具有两个 Borel 例外值 $a,b\in\mathbb{C}$。假设以下任一条件成立：

i) $\sigma(f)\geq 2$；

ii) $\sigma(f)<2$，且 a 和 b 都不是 f 的 Picard 例外值。

则对于每一个整数 $n\geq 2$，有 $\delta(0,\Delta^n f)=\dfrac{2}{n+1}$ 和 $\delta(\infty,\Delta^n f)=0$。

定理 B 设 c 是一个非零有穷复数，f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个有限级亚纯函数且具有两个 Borel 例外值 $a\in\mathbb{C}$ 和 ∞。则对于每一个正整数 n，有 $\delta(0,\Delta^n f)=\delta(\infty,\Delta^n f)=1$，除非 f 和 c 满足：$f(z)=a+p(z)e^{dz}$，其中 $p(z)(\not\equiv 0)$ 是次数小于 n 的多项式，$d\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，且对某个 $k\in\mathbb{Z}$ 有 $cd=2k\pi i$，这里 i 是虚数单位。

文献[19]也指出了明显的事实：在定理 A 的条件下，0 是 $\Delta^n f$ 仅有的一个 Nevanlinna 例外值；在定理 B 的条件下，0 和 ∞ 是 $\Delta^n f$ 的两个 Borel 例外值。

本文将研究线性位移多项式

$$P_n(z,f):=\alpha_n f(z+nc)+\cdots+\alpha_1 f(z+c)+\alpha_0 f(z) \tag{1.1}$$

的增长性、亏量及 $\dfrac{P_n(z,f)}{f}$ 的极点收敛指数，其中 $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$\alpha_k\in\mathbb{C}\setminus\{0\}(k=0,1,\cdots,n)$ 且满足 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k=0$。

本文剩余部分的结构如下：第二节是对主要结果的介绍、分析与说明；第三节给出的是在证明主要结果时所需的辅助性引理；第四节完整呈现了主要结果的证明过程。

2. 主要结果

本文的主要结论如下：

定理 1 设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上具有两个 Borel 例外值 $a,b\in\mathbb{C}$ 的有限级亚纯函数，

$$G_n(z):=P_n(z,f)-\beta(z), \tag{2.1}$$

其中 $P_n(z,f)$ 如(1.1)所定义，且 $\beta(z)(\not\equiv 0,\infty)\in S(f)$。假设 f 还满足以下任一条件：

i) $\sigma(f)\geq 2$；

ii) $\sigma(f)<2$，且 a 和 b 都不是 f 的 Picard 例外值。

则对于任一 $n\in\mathbb{N}^{+}\setminus\{1\}$，下述结论成立：

1) $T(r,G_n(z))=(n+1)T(r,f)+o(T(r,f))$，$r\notin E$；

2) $\delta(0,G_n)=0$，$\delta(0,P_n(z,f))=\dfrac{2}{n+1}$，$\delta(\infty,G_n)=\delta(\infty,P_n(z,f))=0$；

3) $\lambda\left(\dfrac{f}{P_n(z,f)}\right)=\sigma(f)$。

注 2 结论 2)表明，在本定理的条件下，0 是 $P_n(z,f)$ 唯一的亏值。

定理 2 设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上具有两个 Borel 例外值 $a\in\mathbb{C}$ 和 ∞ 的有限级亚纯函数，且 ∞ 不是 f 的 Picard 例外值。$P_n(z,f)$，$G_n(z)$ 分别如(1.1)，(2.1)所定义。则对于任一 $n\in\mathbb{N}^+$，下述结论成立：

1) $T(r,G_n)=T(r,f)+o(T(r,f))$，$r\notin E$；

2) $\delta(0,G_n)=0$，$\delta(0,P_n(z,f))=\delta(\infty,P_n(z,f))=\delta(\infty,G_n)=1$；

3) $a\neq 0$ 时，$\lambda\left(\dfrac{f}{P_n(z,f)}\right)=\sigma(f)$。

注 3 结论 2)表明，在本定理的条件下，0 和 ∞ 是 $P_n(z,f)$ 仅有的两个亏值，也是 $P_n(z,f)$ 仅有的两个 Borel 例外值。

注 4 从后文的证明知道，定理 1 和定理 2 的条件都保证了 $P_n(z,f)\not\equiv 0$。

下面的例子满足定理 1 的条件与结论。

例 1 设 $c=2$，$f(z)=\dfrac{\omega e^{z^2}}{\omega e^{z^2}+\tau}$，其中 $\omega,\tau\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，则 $\sigma(f)=2$，且 0，1 是 f 的两个 Borel 例外值。任取 α_0，α_1，α_2 满足 $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=0$，经计算可得

$$P_2(z,f)=\alpha_2 f(z+2c)+\alpha_1 f(z+c)+\alpha_0 f(z)=\frac{\omega\tau e^{z^2}U(z)}{\left(\omega e^{z^2}+\tau\right)\left(\omega e^{z^2+4z+4}+\tau\right)\left(\omega e^{z^2+8z+16}+\tau\right)},$$

其中 $U(z)=\omega e^{z^2}\left[(\alpha_1+\alpha_2)e^{8z+16}+(\alpha_0+\alpha_2)e^{4z+12}+\alpha_0+\alpha_1\right]e^{4z+4}+\tau\alpha_2 e^{8z+16}+\tau\alpha_1 e^{4z+4}+\tau\alpha_0$。由于 e^{z^2}、e^z 的级分别为 2、1，且它们都是正规增长的函数，我们有 $T(r,e^z)=o\left(T\left(r,e^{z^2}\right)\right)$。显然 $U(z)\not\equiv 0$，利用涉及小函数的 Nevanlinna 第二基本定理和 Valiron-Mohon'ko 定理，不难得出

$$N\left(r,\frac{1}{P_2(z,f)}\right)=N\left(r,\frac{1}{U(z)}\right)=T\left(r,e^{z^2}\right)+o\left(T\left(r,e^{z^2}\right)\right),$$

$$N(r,P_2(z,f))=N\left(r,\frac{1}{\left(\omega e^{z^2}+\tau\right)\left(\omega e^{z^2+4z+4}+\tau\right)\left(\omega e^{z^2+8z+16}+\tau\right)}\right)=3T\left(r,e^{z^2}\right)+o\left(T\left(r,e^{z^2}\right)\right),$$

$$T(r,P_2(z,f))=3T\left(r,e^{z^2}\right)+o\left(T\left(r,e^{z^2}\right)\right).$$

于是，$\delta(0,P_2(z,f))=2/3$，$\delta(\infty,P_2(z,f))=0$。

以下例子表明，在定理 1 的 ii)中，条件“a，b 都不是 f 的 Picard 例外值”不能减弱。

例 2 设 $f(z)=\dfrac{\omega e^z}{\omega e^z-z+\tau}$，$c=4\pi i$，其中 $\omega,\tau\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$i$ 是虚数单位。则 0，1 是 f 的两个 Borel 例外值，且 0 是 f 的一个 Picard 例外值，1 不是 f 的 Picard 例外值。取 $\alpha_k=(-1)^{n-k}C_n^k$，其中 C_n^k 为二项式系数，即 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，$(k=0,1,\cdots,n)$。用数学归纳法易得

$$P_n(z,f)=\Delta^n f(z)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{n-k}f(z+kc)=\frac{(4\pi i)^n n!\omega e^z}{\prod_{k=0}^{n}\left(\omega e^z-z+\tau-4k\pi i\right)}.$$

明显地，此时 $P_n(z,f)$ 没有零点，而 $T(r,P_n(z,f))=(n+1)T(r,e^z)+o(T(r,e^z))$，因此

$\delta\left(0,P_n\left(z,f\right)\right)=1\neq\frac{2}{n+1}$， $n\in\mathbb{N}^+\setminus\{1\}$。

3. 重要引理

以下是证明本文的主要结果时需要用到的引理。

引理 3.1 [6]设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上一个有限级非常数亚纯函数， $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 是个常数。则

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)=o\left(T(r,f)\right),\ r\notin E.$$

引理 3.2 [7] [22] 设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上一个有限级非常数亚纯函数， $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 是个常数。则

$$T\left(r,f(z+c)\right)=T(r,f)+o\left(T(r,f)\right),\ r\notin E;$$

$$N\left(r,f(z+c)\right)=N(r,f)+o\left(T(r,f)\right),\ r\notin E.$$

引理 3.3 [3] [23]设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上一个亚纯函数， $R\left(z,f(z)\right)=\frac{a_n(z)f(z)^n+\cdots+a_1(z)f(z)+a_0(z)}{b_m(z)f(z)^m+\cdots+b_1(z)f(z)+b_0(z)}$ 是关于 f 的不可约有理函数，其中系数 $a_i,b_j\in S(f)$ $(i=0,1,\cdots,n;j=0,1,\cdots,m)$。则有

$$T\left(r,R\left(z,f(z)\right)\right)=\max\{m,n\}T(r,f)+o\left(T(r,f)\right),\ r\notin E.$$

引理 3.4 [13]设 ω_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 是互异的非零常数， $A_k(z)(k=1,2,\cdots,n)$ 是有限级整函数。若在具有最大极 $\sigma=\max\left\{\sigma(A_k),0\leq k\leq n\right\}$ 的这些系数中仅有一项系数具有最大型，则方程

$$A_n(z)f(z+\omega_n)+\cdots+A_1(z)f(z+\omega_1)+A_0(z)f(z)=0$$

的任一非零亚纯解 $f(z)$ 满足 $\sigma(f)\geq\sigma+1$。

引理 3.5 [11] 设 $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$， $P_k(z)(k=1,2,\cdots,n)$ 是满足 $P_nP_0\not\equiv0$ 和

$$\deg(P_n+\cdots+P_0)=\max\left\{\deg P_j:j=0,1,\cdots,n\right\}\geq1$$

的多项式。则对于方程

$$P_n(z)f(z+nc)+\cdots+P_1(z)f(z+c)+P_0(z)f(z)=0\tag{3.1}$$

的任一有限级非零亚纯解 $f(z)$，有 $\sigma(f)\geq1$。

引理 3.6 [10] [19]设 $P_k(z)(k=1,2,\cdots,n)$ 是满足 $P_nP_0\not\equiv0$ 的多项式。则对于方程(3.1)的至少具有一个极点(从而有无穷多个极点)的亚纯解 $f(z)$，有 $\sigma(f)\geq1$。

引理 3.7 [19] 设 h 是满足 $\overline{N}(r,h)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{h}\right)=o\left(T(r,h)\right)$ 的非常数亚纯函数。又设

$$f=a_ph^p+a_{p-1}h^{p-1}+\cdots+a_1h+a_0,$$

其中 $a_j\in S(h)$ $(j=0,1,\cdots,p)$ 满足 $a_0a_p\not\equiv0$。则 $N\left(r,\frac{1}{f}\right)=pT(r,h)+o\left(T(r,h)\right)$。

4. 定理的证明

4.1. 定理 1 的证明

令

$$g(z)=\frac{f(z)-a}{f(z)-b}, \tag{4.1}$$

由 $a,b\in\mathbb{C}$ 是 f 的两个 Borel 例外值可知，0 和 ∞ 是亚纯函数 g 的两个 Borel 例外值。利用 Hadamard 分解定理将 g 分解为

$$g(z)=p(z)\mathrm{e}^{h(z)}, \tag{4.2}$$

其中 p 是个满足

$$\sigma(p)=\max\left\{\lambda(g),\lambda\left(\frac{1}{g}\right)\right\}<\sigma(g) \tag{4.3}$$

的亚纯函数，h 是个满足 $\deg h=\sigma(g)=\sigma(f)$ 的多项式。

依定理条件，以下我们将对 f 的级进行分类讨论。

情形 1： $\sigma(f)\geq 2$，此时 $\deg h\geq 2$。

1) 证明对任意的 $n\in\mathbb{N}^+\setminus\{1\}$，有 $T(r,G_n(z))=(n+1)T(r,f)+o(T(r,f))$，$r\notin E$。

根据(4.2)，对任意的 $k\in\{0,1,\cdots,n\}$，有

$$g(z+kc)=p(z+kc)\mathrm{e}^{h(z+kc)}=\left(p(z+kc)\mathrm{e}^{h(z+kc)-h(z)}\right)\mathrm{e}^{h(z)}=a_k(z)\mathrm{e}^{h(z)}, \tag{4.4}$$

其中

$$a_k(z)=p(z+kc)\mathrm{e}^{h(z+kc)-h(z)},\ (k=0,1,\cdots,n) \tag{4.5}$$

若 $a_k(z)\equiv 0$，则 $p(z)\equiv 0$，从而 $g(z)\equiv 0$，矛盾。因此 $a_k(z)\not\equiv 0$ $(k=0,1,\cdots,n)$。结合(4.3)，(4.5)与引理 3.2 得

$$T(r,a_k)=o\left(T\left(r,\mathrm{e}^h\right)\right)\ (k=0,1,\cdots,n),\ r\notin E. \tag{4.6}$$

按文献([19]，定理 1.1)的方法可证明 g 不是周期函数，所以 $g(z+kc)\not\equiv g(z+jc)$，$k\neq j$ $(k,j=0,1,\cdots,n)$。又由(4.4)可知，

$$a_k(z)\not\equiv a_j(z),\ k\neq j\ (k=0,1,\cdots,n;j=0,1,\cdots,n). \tag{4.7}$$

(4.1)式蕴含着

$$f(z)=b+\frac{b-a}{g(z)-1}, \tag{4.8}$$

将此式代入 $P_n(z,f)$ 的表达式，得

$$\begin{aligned}P_n(z,f)&=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k f(z+kc)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\left(b+\frac{b-a}{g(z+kc)-1}\right)=(b-a)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\left(\frac{1}{g(z+kc)-1}\right)\\&=(b-a)\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\prod\limits_{j=0,j\neq k}^{n}\left(g(z+jc)-1\right)}{\prod\limits_{k=0}^{n}\left(g(z+kc)-1\right)}=(b-a)\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\prod\limits_{j=0,j\neq k}^{n}\left(a_j(z)\mathrm{e}^{h(z)}-1\right)}{\prod\limits_{k=0}^{n}\left(a_k(z)\mathrm{e}^{h(z)}-1\right)}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

现将上式右端分式的分子部分改写为关于 e^h 的多项式如下：

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\left(a_j(z)\mathrm{e}^{h(z)}-1\right)=b_n(z)\mathrm{e}^{nh(z)}+b_{n-1}(z)\mathrm{e}^{(n-1)h(z)}+\cdots+b_1(z)\mathrm{e}^{h(z)}+b_0(z), \tag{4.10}$$

其中 $b_0(z)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\alpha_k=0$，

$$b_1(z)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\sum_{j=0,j\neq k}^{n}(-1)^{n-1}a_j(z)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-1}a_j(z)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(-1)^{n-1}a_k(z)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\alpha_k a_k(z),\quad(4.11)$$

$$b_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}a_j(z)=\left(\prod_{j=0}^{n}a_j(z)\right)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\frac{1}{a_k(z)}.\quad(4.12)$$

下证 $b_1(z)\not\equiv 0$。若不然，由(4.5)和(4.11)知 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k p(z+kc)e^{h(z+kc)-h(z)}\equiv 0$，

即

$$\alpha_0 p(z)+\alpha_1 p(z+c)e^{h(z+c)-h(z)}+\cdots+\alpha_n p(z+nc)e^{h(z+nc)-h(z)}\equiv 0.\quad(4.13)$$

设多项式

$$h(z)=d_l z^l+d_{l-1}z^{l-1}+\cdots+d_1 z+d_0,$$

其中 $l=\deg h\geq 2$， $d_l(\neq 0),\cdots,d_0$ 是复常数，则

$$h(z+kc)-h(z)=lkcd_l z^{l-1}+h_{l-2}(z),\ (k=1,2,\cdots,n),\quad(4.14)$$

这里 $h_{l-2}(z)$ 是个次数不超过 $l-2$ 的多项式。根据(4.14)，经计算可得， $\sigma\left(e^{h(z+kc)-h(z)}\right)=\deg h-1$， $\tau\left(e^{h(z+kc)-h(z)}\right)=|lkcd_l|\ (k=1,2,\cdots,n)$。注意到 $|nc|>|jc|\ (j=1,2,\cdots,n-1)$，因此，在(4.13)式中， $\tau\left(e^{h(z+nc)-h(z)}\right)=|lncd_l|>\tau\left(e^{h(z+jc)-h(z)}\right)\ (j=1,2,\cdots,n-1)$。借助引理 3.4 可知 $\sigma(p)=\sigma(1/p)\geq(\deg h-1)+1=\deg h=\sigma(g)$，这与(4.3)矛盾。所以 $b_1(z)\not\equiv 0$。类似可证， $b_n(z)\not\equiv 0$。于是，我们有 $P_n(z,f)\not\equiv 0$。

因 $\alpha_k\neq 0\ (k=0,1,\cdots,n)$，且容易看出 $a_k(z)e^{h(z)}-1\ (k=0,1,\cdots,n)$ 均不是 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\left(a_j(z)e^{h(z)}-1\right)$ 的因子，由(4.6)和(4.7)可知， $\dfrac{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\left(a_j(z)e^{h(z)}-1\right)}{\prod_{k=0}^{n}\left(a_k(z)e^{h(z)}-1\right)}$ 是个关于 e^h 的不可约有理函数。因此，由(4.9)和引理 3.3，结合 G_n 的定义，我们知道

$$\begin{aligned}T(r,G_n)&=T(r,P_n(z,f))+o(T(r,f))=(n+1)T(r,e^h)+o(T(r,e^h))+o(T(r,f))\\&=(n+1)T(r,f)+o(T(r,f)),r\notin E\end{aligned}\quad(4.15)$$

2) 证明 $\delta(0,G_n)=0$， $\delta(0,P_n(z,f))=\dfrac{2}{n+1}$， $\delta(\infty,G_n)=\delta(\infty,P_n(z,f))=0$， $n\in\mathbb{N}^+\setminus\{1\}$。

由(4.9)可知

$$\begin{aligned}G_n(z)=P_n(z,f)-\beta(z)&=\frac{(b-a)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(g(z+jc)-1)-\beta(z)\prod_{k=0}^{n}(g(z+kc)-1)}{\prod_{k=0}^{n}(g(z+kc)-1)}\\&=\frac{(b-a)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\left(a_j(z)e^{h(z)}-1\right)-\beta(z)\prod_{k=0}^{n}\left(a_k(z)e^{h(z)}-1\right)}{\prod_{k=0}^{n}\left(a_k(z)e^{h(z)}-1\right)}.\end{aligned}\quad(4.16)$$

结合此式与(4.10)，记

$$Q_{n+1}\left(e^{h(z)}\right)=\prod_{k=0}^{n}\left(g\left(z+kc\right)-1\right)=\prod_{k=0}^{n}\left(a_k\left(z\right)e^{h(z)}-1\right), \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}Q_n\left(e^{h(z)}\right)&=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\left(g\left(z+jc\right)-1\right)\\&=b_n\left(z\right)e^{nh(z)}+b_{n-1}\left(z\right)e^{(n-1)h(z)}+\cdots+b_1\left(z\right)e^{h(z)}\\&=e^{h(z)}Q_{n-1}\left(e^{h(z)}\right),\end{aligned} \tag{4.18}$$

其中 $Q_{n-1}\left(e^{h(z)}\right)$ 是关于 e^h 的 $n-1$ 次多项式。于是，(4.9)和(4.16)意味着

$$P_n\left(z,f\right)=\left(b-a\right)\frac{Q_n\left(e^{h(z)}\right)}{Q_{n+1}\left(e^{h(z)}\right)}, \tag{4.19}$$

$$G_n\left(z\right)=P_n\left(z,f\right)-\beta\left(z\right)=\frac{\left(b-a\right)Q_n\left(e^{h(z)}\right)-\beta\left(z\right)Q_{n+1}\left(e^{h(z)}\right)}{Q_{n+1}\left(e^{h(z)}\right)}. \tag{4.20}$$

由(4.4)和(4.6)可知，

$$N\left(r,g\left(z+kc\right)-1\right)=N\left(r,g\left(z+kc\right)\right)=N\left(r,a_k\left(z\right)\right)=o\left(T\left(r,e^h\right)\right),\ r\notin E,\ \left(k=0,1,\cdots,n\right). \tag{4.21}$$

进一步，我们有 $N\left(r,Q_{n+1}\left(e^h\right)\right)=o\left(T\left(r,e^h\right)\right)$， $N\left(r,Q_n\left(e^h\right)\right)=o\left(T\left(r,e^h\right)\right)$， $r\notin E$。

$\left(b-a\right)Q_n\left(e^h\right)-\beta Q_{n+1}\left(e^h\right)$ 和 $Q_{n+1}\left(e^h\right)$ 的公共零点，必为 $Q_n\left(e^h\right)$ 的零点，因而也是 $Q_n\left(e^h\right)$ 和 $Q_{n+1}\left(e^h\right)$ 的公共零点。现设 z_0 是 $Q_n\left(e^h\right)$ 和 $Q_{n+1}\left(e^h\right)$ 的一个公共零点，但不是 $g\left(z+kc\right)$ $\left(k=0,1,\cdots,n\right)$ 的极点，由于 $Q_{n+1}\left(e^{h(z_0)}\right)=\prod_{k=0}^{n}\left(g\left(z_0+kc\right)-1\right)=0$，可知存在某个 $p\in\{0,1,\cdots,n\}$，使得 $g\left(z_0+pc\right)=1$。此时 $Q_n\left(e^{h(z_0)}\right)=\alpha_p\prod_{j=0,j\neq p}^{n}\left(g\left(z_0+jc\right)-1\right)=0$，于是存在某个 $q\in\{0,1,\cdots,n\}\setminus\{p\}$，使得 $g\left(z_0+qc\right)=1$，这时有 $g\left(z_0+pc\right)=g\left(z_0+qc\right)$。记 $\left(b-a\right)Q_n\left(e^h\right)-\beta Q_{n+1}\left(e^h\right)$ 和 $Q_{n+1}\left(e^h\right)$ 的公共零点的积分计数函数为 $N_1\left(r\right)$， $Q_n\left(e^h\right)$ 和 $Q_{n+1}\left(e^h\right)$ 的公共零点的积分计数函数为 $N_1\left(r\right)$。由以上分析，结合(4.4)，(4.6)，(4.21)可得

$$\begin{aligned}N_1\left(r\right)\le N_2\left(r\right)&\le\sum_{\substack{p\neq q\\p,q\in\{0,1,\cdots,n\}}}N\left(r,\frac{1}{g\left(z+pc\right)-g\left(z+qc\right)}\right)+\sum_{k=0}^{n}N\left(r,g\left(z+kc\right)\right)\\&=\sum_{\substack{p\neq q\\p,q\in\{0,1,\cdots,n\}}}N\left(r,\frac{1}{\left(a_p\left(z\right)-a_q\left(z\right)\right)e^{h(z)}}\right)+o\left(T\left(r,e^h\right)\right)\\&\le\sum_{\substack{p\neq q\\p,q\in\{0,1,\cdots,n\}}}T\left(r,a_p-a_q\right)+o\left(T\left(r,e^h\right)\right)=o\left(T\left(r,e^h\right)\right),r\notin E.\end{aligned} \tag{4.22}$$

为便于对 $G_n\left(z\right)$ 的零点进行估计，现将(4.20)右端分式的分子部分改写为关于 e^h 的多项式如下

$$\left(b-a\right)Q_n\left(e^{h(z)}\right)-\beta\left(z\right)Q_{n+1}\left(e^{h(z)}\right)=u_{n+1}\left(z\right)e^{(n+1)h(z)}+u_n\left(z\right)e^{nh(z)}+\cdots+u_1\left(z\right)e^{h(z)}+u_0\left(z\right), \tag{4.23}$$

其中 $u_{n+1}\left(z\right)=-\beta\left(z\right)\prod_{k=0}^{n}a_k\left(z\right)$， $u_0\left(z\right)=0-\left(-1\right)^{n+1}\beta\left(z\right)=\left(-1\right)^n\beta\left(z\right)$，

$$u_1(z)=(-1)^n(b-a)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k a_k(z)+(-1)^{n+1}\beta(z)\sum_{k=0}^{n}a_k(z),$$

$$u_n(z)=(b-a)\left(\prod_{j=0}^{n}a_j(z)\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{a_k(z)}+\beta(z)\left(\prod_{j=0}^{n}a_j(z)\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k(z)}.$$

注意到 $u_0(z)u_{n+1}(z)=(-1)^{n+1}\beta^2(z)\prod_{k=0}^{n}a_k(z)\not\equiv 0$，结合(4.20)，(4.22)，(4.23)与引理 3.7，我们有

$$\begin{aligned}N\left(r,\frac{1}{G_n}\right)&=N\left(r,\frac{1}{(b-a)Q_n(e^h)-\beta Q_{n+1}(e^h)}\right)-N_1(r)+o\left(T\left(r,e^h\right)\right)\\&=N\left(r,\frac{1}{u_{n+1}e^{(n+1)h}+\cdots+u_1e^h+u_0}\right)+o\left(T\left(r,e^h\right)\right)\\&=(n+1)T\left(r,e^h\right)+o\left(T\left(r,e^h\right)\right)\\&=(n+1)T(r,f)+o\left(T(r,f)\right),r\notin E.\end{aligned}\tag{4.24}$$

于是，由(4.15)，(4.24)可得

$$\delta(0,G_n)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,1/G_n)}{T(r,G_n)}=0.$$

注意到 $b_1(z)\not\equiv 0$，用上述方法估计 $P_n(z,f)$ 的零点，类似可证

$$\begin{aligned}N\left(r,\frac{1}{P_n(z,f)}\right)&=N\left(r,\frac{1}{Q_n(e^h)}\right)-N_2(r)+o\left(T\left(r,e^h\right)\right)=N\left(r,\frac{1}{Q_{n-1}(e^h)}\right)+o\left(T\left(r,e^h\right)\right)\\&=(n-1)T\left(r,e^h\right)+o\left(T\left(r,e^h\right)\right)=(n-1)T(r,f)+o\left(T(r,f)\right),r\notin E,\end{aligned}$$

从而 $\delta(0,P_n(z,f))=\dfrac{2}{n+1}$。

接下来对 $G_n(z)$，$P_n(z,f)$ 的极点进行估计。结合(4.4)，(4.6)与引理 3.2，对 $g(z+kc)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 应用 Nevanlinna 第二基本定理，有

$$\begin{aligned}T(r,g(z+kc))&\le N(r,g(z+kc))+N\left(r,\frac{1}{g(z+kc)}\right)+N\left(r,\frac{1}{g(z+kc)-1}\right)+o\left(T(r,g(z+kc))\right)\\&=N\left(r,a_k(z)e^{h(z)}\right)+N\left(r,\frac{1}{a_k(z)e^{h(z)}}\right)+N\left(r,\frac{1}{g(z+kc)-1}\right)+o\left(T(r,g)\right)\\&=N(r,a_k)+N\left(r,\frac{1}{a_k}\right)+N\left(r,\frac{1}{g(z+kc)-1}\right)+o\left(T(r,g)\right)\\&\le T(r,g(z+kc))+o\left(T(r,g)\right),r\notin E.\end{aligned}$$

此式意味着，对任意的 $k\in\{0,1,\cdots,n\}$，有

$$\begin{aligned}N\left(r,\frac{1}{g(z+kc)-1}\right)&=T(r,g(z+kc))+o\left(T(r,g)\right)\\&=T\left(r,a_k(z)e^{h(z)}\right)+o\left(T(r,g)\right)\\&=T(r,f)+o\left(T(r,f)\right),r\notin E.\end{aligned}\tag{4.25}$$

由(4.15)，(4.17)，(4.19)，(4.22)和(4.25)，我们知道

$$\begin{aligned}N\left(r,P_n\left(z,f\right)\right)&=N\left(r,\frac{1}{Q_{n+1}\left(\mathrm{e}^h\right)}\right)-N_2\left(r\right)+o\left(T\left(r,\mathrm{e}^h\right)\right)\\&=N\left(r,\frac{1}{\prod_{k=0}^{n}\left(g\left(z+kc\right)-1\right)}\right)+o\left(T\left(r,f\right)\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}N\left(r,\frac{1}{g\left(z+kc\right)-1}\right)+o\left(T\left(r,f\right)\right)\\&=\left(n+1\right)T\left(r,f\right)+o\left(T\left(r,f\right)\right)\\&=T\left(r,P_n\left(z,f\right)\right)+o\left(T\left(r,P_n\left(z,f\right)\right)\right),r\notin E.\end{aligned}\tag{4.26}$$

因此，

$$\delta\left(\infty,P_n\left(z,f\right)\right)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,P_n\left(z,f\right)\right)}{T\left(r,P_n\left(z,f\right)\right)}=0.$$

再由(4.15)，(4.26)和 $N\left(r,G_n\right)=N\left(r,P_n\left(z,f\right)\right)+o\left(T\left(r,f\right)\right)$ 立即得到 $\delta\left(\infty,G_n\right)=0$。

3) 证明 $\lambda\left(\frac{f}{P_n\left(z,f\right)}\right)=\sigma\left(f\right)$，$n\in\mathbb{N}^+\setminus\{1\}$。

借助引理 3.1 易得

$$T\left(r,\frac{P_n\left(z,f\right)}{f}\right)=N\left(r,\frac{P_n\left(z,f\right)}{f}\right)+m\left(r,\frac{P_n\left(z,f\right)}{f}\right)=N\left(r,\frac{P_n\left(z,f\right)}{f}\right)+o\left(T\left(r,f\right)\right),\quad r\notin E.\tag{4.27}$$

另一方面，由(4.2)，(4.8)，(4.18)和(4.19)知道，

$$\frac{P_n\left(z,f\right)}{f}=\left(b-a\right)\frac{Q_n\left(\mathrm{e}^h\right)}{Q_{n+1}\left(\mathrm{e}^h\right)}\frac{1}{b+\frac{b-a}{g-1}}=\left(b-a\right)\mathrm{e}^h\frac{Q_{n-1}\left(\mathrm{e}^h\right)}{Q_{n+1}\left(\mathrm{e}^h\right)}\frac{p\mathrm{e}^h-1}{bp\mathrm{e}^h-a},$$

对上式用引理 3.3，可得

$$T\left(r,\frac{P_n\left(z,f\right)}{f}\right)=MT\left(r,\mathrm{e}^h\right)+o\left(T\left(r,\mathrm{e}^h\right)\right)=MT\left(r,f\right)+o\left(T\left(r,f\right)\right),\quad r\notin E,\tag{4.28}$$

其中 $M\in\{1,2,\cdots,n+2\}$。由(4.27)和(4.28)立即推出 $\lambda\left(\frac{f}{P_n\left(z,f\right)}\right)=\sigma\left(f\right)$。

情形 2： $\sigma\left(f\right)<2$，且 a,b 都不是 f 的 Picard 例外值。

这时，由(4.1)，0 和 ∞ 仍然是亚纯函数 g 的两个 Borel 例外值，但不是 g 的 Picard 例外值，且 $\sigma\left(g\right)=\sigma\left(f\right)<2$。所以 $\sigma\left(g\right)=1$。由 Hadamard 分解定理，g 具有表达式

$$g\left(z\right)=p\left(z\right)\mathrm{e}^{\eta z},\tag{4.29}$$

其中 $\eta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 是个常数，$p\left(z\right)$ 是至少有一个零点和一个极点的亚纯函数，满足 $\sigma\left(p\right)<1$。

将(4.29)代入 $P_n\left(z,f\right)$ 的表达式，结合(4.8)与 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k=0$，有

$$\begin{aligned}P_n(z,f)&=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k f(z+kc)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\left(b+\frac{b-a}{g(z+kc)-1}\right)\\&=(b-a)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\left(\frac{1}{g(z+kc)-1}\right)\\&=(b-a)\frac{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\left(g(z+jc)-1\right)}{\prod_{k=0}^{n}\left(g(z+kc)-1\right)}\\&=(b-a)\frac{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\left(p(z+jc)e^{\eta(z+jc)}-1\right)}{\prod_{k=0}^{n}\left(p(z+kc)e^{\eta(z+kc)}-1\right)}\\&=(b-a)\frac{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\left(e^{\eta jc}p(z+jc)e^{\eta z}-1\right)}{\prod_{k=0}^{n}\left(e^{\eta kc}p(z+kc)e^{\eta z}-1\right)}.\end{aligned}\tag{4.30}$$

将上式右端分式的分子部分改写为关于 $e^{\eta z}$ 的多项式如下：

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\left(e^{\eta jc}p(z+jc)e^{\eta z}-1\right)=b_n(z)e^{n\eta z}+b_{n-1}(z)e^{(n-1)\eta z}+\cdots+b_1(z)e^{\eta z}+b_0(z)\tag{4.31}$$

其中 $b_0(z)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\alpha_k=0$， $b_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\left(e^{\eta jc}p(z+jc)\right)=\prod_{j=0}^{n}e^{\eta jc}p(z+jc)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\frac{1}{e^{\eta kc}p(z+kc)}$，

$$\begin{aligned}b_1(z)&=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\sum_{j=0,j\neq k}^{n}(-1)^{n-1}e^{\eta jc}p(z+jc)\\&=(-1)^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\sum_{j=0}^{n}e^{\eta jc}p(z+jc)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e^{\eta kc}p(z+kc)\right]\\&=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e^{\eta kc}p(z+kc)\end{aligned}\tag{4.32}$$

下证 $b_1(z)\not\equiv 0$， $b_n(z)\not\equiv 0$。若不然，假设 $b_1(z)\equiv 0$，则由(4.32)可得

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e^{\eta kc}p(z+kc)=\alpha_n e^{\eta nc}p(z+nc)+\cdots+\alpha_1 e^{\eta c}p(z+c)+\alpha_0 p(z)\equiv 0,$$

亦即

$$\alpha_n e^{\eta nc}zp(z+nc)+\cdots+\alpha_1 e^{\eta c}zp(z+c)+\alpha_0 zp(z)\equiv 0.\tag{4.33}$$

当 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e^{\eta kc}=0$ 时，由于 p 至少有一个极点，且 $\alpha_n e^{-\eta nc}z\cdot\alpha_0 z=\alpha_n\alpha_0 e^{-\eta nc}z^2\not\equiv 0$，结合(4.33)与引理 3.6 可知 $\sigma(p)\geq 1$，矛盾。当 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e^{\eta kc}\neq 0$ 时，有 $\alpha_n e^{\eta nc}z+\cdots+\alpha_1 e^{\eta c}z+\alpha_0 z=\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e^{\eta kc}\right)z\not\equiv 0$，这表明 $\deg\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e^{\eta kc}\right)z\right)=1$，结合(4.33)与引理 3.5 可得 $\sigma(p)\geq 1$，矛盾。所以 $b_1(z)\not\equiv 0$。类似可证 $b_n(z)\not\equiv 0$。

又由(4.30)，(4.31)我们有 $P_n(z,f)\not\equiv 0$。应用讨论情形 1 时的方法，可完成本定理的证明。

4.2. 定理 2 的证明

令

$$g(z)=f(z)-a, \tag{4.34}$$

由 $a\in\mathbb{C}$，∞ 是 f 的两个 Borel 例外值知道，0 和 ∞ 是 g 的两个 Borel 例外值。

以下我们对 f 的级进行分类讨论。

情形 1： $\sigma(f)\geq 2$。如同定理 1 证明过程的分析，这时也能得到(4.2)~(4.7)及(4.14)，且多项式 h 满足 $\deg h\geq 2$。

1) 证明 $T(r,G_n)=T(r,f)+o(T(r,f))$，$r\notin E$，$n\in\mathbb{N}^+$。

(4.34)式意味着 $f(z)=g(z)+a$，将此式代入 $P_n(z,f)$ 的表达式，结合(4.4)与 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k=0$ 可得

$$P_n(z,f)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k f(z+kc)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k g(z+kc)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k p(z+kc)\mathrm{e}^{h(z+kc)}=\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k a_k(z)\right)\mathrm{e}^{h(z)}. \tag{4.35}$$

若 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k a_k(z)\equiv 0$，则

$$\alpha_0 p(z)+\alpha_1 p(z+c)\mathrm{e}^{h(z+c)-h(z)}+\cdots+\alpha_n p(z+nc)\mathrm{e}^{h(z+nc)-h(z)}\equiv 0 \tag{4.36}$$

通过计算知道，$\sigma\left(\mathrm{e}^{h(z+kc)-h(z)}\right)=\deg h-1$，$\tau\left(\mathrm{e}^{h(z+kc)-h(z)}\right)=|lkcd_l|$ $(k=1,2,\cdots,n)$。而 $|nc|>|jc|$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$。可见，在(4.36)式中，$\tau\left(\mathrm{e}^{h(z+nc)-h(z)}\right)=|lncd_l|>\tau\left(\mathrm{e}^{h(z+jc)-h(z)}\right)$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$。由引理 3.4 可得 $\sigma(p)\geq(\deg h-1)+1=\deg h=\sigma(g)$，这与(4.3)矛盾。因此 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k a_k(z)\not\equiv 0$，这也表明 $P_n(z,f)\not\equiv 0$。

观察(4.35)，立即得到

$$T(r,G_n)=T(r,P_n(z,f))+o(T(r,f))=T(r,f)+o(T(r,f)),\ r\notin E. \tag{4.37}$$

2) 证明 $\delta(0,G_n)=0$，$\delta(0,P_n(z,f))=\delta(\infty,P_n(z,f))=\delta(\infty,G_n)=1$，$n\in\mathbb{N}^+$。

由(4.35)可得

$$G_n(z)=P_n(z,f)-\beta(z)=\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k a_k(z)\right)\mathrm{e}^{h(z)}-\beta(z), \tag{4.38}$$

又有 $-\beta(z)\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k a_k(z)\right)\not\equiv 0$。对(4.39)应用引理 3.7 即得 $\delta(0,G_n)=0$。

再次利用(4.35)，结合(4.37)，不难发现

$$N\left(\frac{1}{P_n(z,f)}\right)=o(T(r,f))=o(T(r,P_n(z,f))),\ r\notin E;$$

$$N(r,P_n(z,f))=o(T(r,f))=o(T(r,P_n(z,f))),\ r\notin E;$$

$$N(r,G_n)=N(r,P_n(z,f))+o(T(r,f))=o(T(r,f)),\ r\notin E,$$

这就意味着 $\delta(0,P_n(z,f))=\delta(\infty,P_n(z,f))=\delta(\infty,G_n)=1$，$n\in\mathbb{N}^+$。

3) 证明 $a\neq 0$ 时，$\lambda\left(\frac{f}{P_n(z,f)}\right)=\sigma(f)$，$n\in\mathbb{N}^+$。

由(4.2)，(4.34)和(4.35)，有

$$\frac{P_n(z,f)}{f}=\frac{\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k a_k\right)\mathrm{e}^h}{p\mathrm{e}^h+a},$$

而 $a\neq 0$，对上式用引理 3.3 可得

$$T\left(r,\frac{P_n(z,f)}{f}\right)=T\left(r,\mathrm{e}^h\right)+o\left(T\left(r,\mathrm{e}^h\right)\right)=T(r,f)+o\left(T(r,f)\right),\quad r\notin E.$$

再由引理 3.1 知道

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{P_n(z,f)}{f}\right)+o\left(T(r,f)\right)=N\left(r,\frac{P_n(z,f)}{f}\right)+o\left(T(r,f)\right),\quad r\notin E,$$

这就表明 $\lambda\left(\frac{f}{P_n(z,f)}\right)=\sigma(f)$。

情形 2： $\sigma(f)<2$。这时 $\sigma(g)=\sigma(f)<2$，且 0 和 ∞ 仍然是亚纯函数 g 的两个 Borel 例外值。于是 $\sigma(g)=1$。由 Hadamard 分解定理，g 可分解为

$$g(z)=p(z)\mathrm{e}^{\eta z},\tag{4.39}$$

其中 $\eta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 是个常数，p 是个满足 $\sigma(p)<1$ 的亚纯函数。因 ∞ 不是 f 的 Picard 例外值，故 ∞ 也不是 g 的 Picard 例外值，从而 p 至少有一个极点。

将(4.39)代入 $P_n(z,f)$ 的表达式，结合(4.34)和 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k=0$，我们有

$$P_n(z,f)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k f(z+kc)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k g(z+kc)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k p(z+kc)\mathrm{e}^{\eta(z+kc)}=\mathrm{e}^{\eta z}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k p(z+kc)\mathrm{e}^{\eta kc}.\tag{4.40}$$

当 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\mathrm{e}^{\eta kc}=0$ 时，假设 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k p(z+kc)\mathrm{e}^{\eta kc}=\alpha_n\mathrm{e}^{\eta nc}p(z+nc)+\cdots+\alpha_1\mathrm{e}^{\eta c}p(z+c)+\alpha_0 p(z)\equiv 0$，

即

$$\alpha_n\mathrm{e}^{\eta nc}zp(z+nc)+\cdots+\alpha_1\mathrm{e}^{\eta c}zp(z+c)+\alpha_0 zp(z)\equiv 0.\tag{4.41}$$

注意到 p 至少有一个极点，而 $\alpha_n\mathrm{e}^{\eta nc}z\cdot\alpha_0 z=\alpha_n\alpha_0\mathrm{e}^{\eta nc}z^2\not\equiv 0$，结合(4.41)与引理 3.6 可知 $\sigma(p)\geq 1$，矛盾。所以此时 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k p(z+kc)\mathrm{e}^{\eta kc}\not\equiv 0$，进一步由(4.40)有 $P_n(z,f)\not\equiv 0$。

当 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\mathrm{e}^{\eta kc}\neq 0$ 时，若 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k p(z+kc)\mathrm{e}^{\eta kc}=\alpha_n\mathrm{e}^{\eta nc}p(z+nc)+\cdots+\alpha_1\mathrm{e}^{\eta c}p(z+c)+\alpha_0 p(z)\equiv 0$，即(4.41)成立，则由于 $\alpha_n\mathrm{e}^{\eta nc}z+\cdots+\alpha_1\mathrm{e}^{\eta c}z+\alpha_0 z=\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\mathrm{e}^{\eta kc}\right)z\not\equiv 0$，有 $\deg\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\mathrm{e}^{\eta kc}\right)z\right)=1$。再由(4.41)和引理 3.5 可得，$\sigma(p)\geq 1$，矛盾。所以此时 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k p(z+kc)\mathrm{e}^{\eta kc}\not\equiv 0$，进一步有 $P_n(z,f)\not\equiv 0$。仿照情形 1 的讨论，即可完成本定理的证明。

基金项目

国家自然科学基金(12171050)。

参考文献

[1] Gundersen, G. (1998) Estimates for the Logarithmic Derivative of a Meromorphic Function, plus Similar Estimates. *Journal of the London Mathematical Society*, **37**, 88-104. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-37.121.88

[2] Hayman, W.K. (1959) Picard Values of Meromorphic Functions and Their Derivatives. *Annals of Mathematics*, **70**, 9-42. https://doi.org/10.2307/1969890

[3] Laine, I. (1993) Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. De Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110863147

[4] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3626-8

[5] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[6] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2006) Difference Analogue of the Lemma on the Logarithmic Derivative with Applications to Difference Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **314**, 477-487. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.010

[7] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of f(z+η) and Difference Equations in the Complex Plane. *Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1

[8] Bergweiler, W. and Langley, J.K. (2007) Zeros of Differences of Meromorphic Functions. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **142**, 133-147. https://doi.org/10.1017/S0305004106009777

[9] Chen, Z.X. (2014) Complex Differences and Difference Equations. Science Press, Beijing. https://doi.org/10.1155/2014/124843

[10] Chen, Z.X. (2011) Growth and Zeros of Meromorphic Solutions of Some Linear Difference Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **373**, 235-241. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.06.049

[11] Chen, Z.X. and Shon, K.H. (2009) Estimates for the Zeros of Differences of Meromorphic Functions. *Science in China* (*Series A*: *Mathematics*), **52**, 2447-2458. https://doi.org/10.1007/s11425-009-0159-7

[12] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2006) Nevanlinna Theory for the Difference Operator. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*. *Mathematica*, **31**, 463-478. https://www.acadsci.fi/mathematica/Vol31/halburd.html

[13] Laine, I. and Yang, C.C. (2007) Clunie Theorems for Difference and Q-Difference Polynomials. *Journal of the London Mathematical Society*. *Second Series*, **76**, 556-566. https://doi.org/10.1112/jlms/jdm073

[14] Laine, I. and Yang, C.C. (2007) Value Distribution of Difference Polynomials. *Proceedings of the Japan Academy*, *Series A*, *Mathematical Sciences*, **83**, 148-151. https://doi.org/10.3792/pjaa.83.148

[15] Langley, J.K. (2011) Value Distribution of Differences of Meromorphic Functions. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **41**, 275-291. https://doi.org/10.1216/RMJ-2011-41-1-275

[16] Hu, P.C. and Thin, N.V. (2021) Difference Analogue of Second Main Theorems for Meromorphic Mapping into Algebraic Variety. *Analysis Mathematica*, **47**, 811-842. https://doi.org/10.1007/s10476-021-0089-3

[17] Cao, T.B. and Korhonen, R.J. (2020) Value Distribution of Q-Differences of Meromorphic Functions in Several Complex Variables. *Analysis Mathematica*, **46**, 699-736. https://doi.org/10.1007/s10476-020-0058-2

[18] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[19] Lan, S.T. and Chen, Z.X. (2014) On Value Distribution of $\Delta^n f$. *Acta Mathematica Sinica* (*English Series*), **30**, 1795-1809. https://doi.org/10.1007/s10114-014-3382-2

[20] 王品玲，刘丹，方明亮. 亚纯函数差分的亏量与值分布[J]. 数学学报, 2016, 59(3): 357-362.

[21] Lan, S.T. and Chen, Z.X. (2020) Growth, Zeros and Fixed Points of Differences of Meromorphic Solutions of Difference Equations. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, **35**, 16-32. https://doi.org/10.1007/s11766-020-3582-8

[22] 张然然，陈宗煊. 亚纯函数差分多项式的值分布[J]. 中国科学: 数学, 2012, 42(11): 1115-1130.

[23] Mohon'ko, A.Z. (1971) The Nevanlinna Characteristics of Certain Meromorphic Functions. *Theory of Functions, Functional Analysis and Their Applications*, **14**, 83-87. (In Russian)