Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(7), 1169-1172
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.127128

旋转体的体积计算

罗　柱[1]，史丽萍[2]

[1]广东交通职业技术学院基础教学部，广东 广州
[2]广东东软学院基础学院，广东 佛山

收稿日期：2022年6月5日；录用日期：2022年7月7日；发布日期：2022年7月14日

摘　要

旋转体的体积是数学分析中定积分的重要应用之一，关于曲线绕任意直线所成的旋转体的体积的计算公式已有相关文献利用“微元法”思想进行了讨论。在此基础上，本文利用坐标变换的方法对于空间一般曲线绕直线旋转而成的旋转体体积的计算进行了研究，得出了空间一般曲线绕直线旋转一周而成的旋转体的体积公式。

关键词

旋转体，坐标变换，空间曲线

The Volume Calculation for the Rotating Bodies

Zhu Luo[1], Liping Shi[2]

[1]Basic Courses Department of Guangdong Communication Polytechnic, Guangzhou Guangdong
[2]The Basic College of Neusoft Institute Guangdong, Foshan Guangdong

Received: Jun. 5th, 2022; accepted: Jul. 7th, 2022; published: Jul. 14th, 2022

Abstract

The volume of a rotating body is one of the important applications in mathematical analysis. The calculation formula of the volume of a rotating body formed by a curve around an arbitrary straight line has been discussed in related literatures by using the idea of “micro element method”. Based on this, we use the coordinate transformation to study the calculation of the volume of the revolving body formed by the space general curve rotating around a straight line and obtain the volume formula of the revolving body formed.

文章引用: 罗柱, 史丽萍. 旋转体的体积计算[J]. 理论数学, 2022, 12(7): 1169-1172.
DOI: 10.12677/pm.2022.127128

Keywords

Rotating Bodies, Coordinate Transformation, Space Curves

1. 引言

曲线绕坐标轴旋转生成的旋转体的体积是数学分析课程定积分的重要应用之一。对于平面图形绕坐标轴旋转所成的旋转体体积的计算在数学分析课程中已有清晰的阐述。关于曲线绕任意直线旋转一周而成的旋转体的体积积分公式已有相关文献利用微元法进行了讨论，如：[1] [2]讨论了参数曲线方程绕空间直线旋转一周所成的旋转体的体积计算公式，[3] [4] [5] [6]讨论了空间一类曲线绕任意直线旋转一周生成的旋转体的体积计算方法，[7] [8]从积分的角度讨论了空间曲线绕直线旋转一周而成旋转体的体积计算方法。但对于一般方程的空间曲线

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{1}$$

绕直线旋转一周而成的旋转体没有给出体积计算公式。因此本文研究的一个目的是推导形如(1)的空间曲线绕直线旋转一周而成的旋转体的体积公式。

这里主要讨论位于直线一侧的曲线绕直线旋转一周而成的旋转体的体积，对于其他情形的讨论见[7]。

2. 预备知识

引理1 [9] 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，对于由 $0 \le y \le |f(x)|$ 与 $a \le x \le b$ 所界定的平面图形绕x轴一周所得到的旋转体体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x .$$

引理2 [9] (变量代换公式)

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega'} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

推论1 [10] 正交变换保持体积不变。

3. 主要结论及证明

定理 1 设空间光滑曲线 $C:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，$a \le x \le b$，$F(x,y,z),G(x,y,z)$ 具有连续的偏导数，且 $\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix} \ne 0$，则曲线 C 绕直线 $L:\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$ 旋转一周的体积为

$$V=\frac{\pi}{\left(A^2+B^2+C^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b d_H^2\left|A+By'(x)+Cz'(x)\right|\mathrm{d}x$$

其中

$$d_H^2=\left(\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ B & C \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ A & C \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ A & B \end{vmatrix}\right)^2$$

$$y'=\frac{\begin{vmatrix} F_z' & F_x' \\ G_z' & G_x' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}},z'=\frac{\begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}}$$

证 在曲线C上任取一点$M=(x,y,z)$，根据隐函数定理，在M的某一邻域内曲线C可由参数曲线

$$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$$

表示。取坐标变换

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-N \tag{2}$$

其中，

$$M=\begin{pmatrix} \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \frac{-(B^2+C^2)}{\sqrt{B^2+C^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{AB}{\sqrt{B^2+C^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{AC}{\sqrt{B^2+C^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ 0 & \frac{-C}{\sqrt{B^2+C^2}} & \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} \end{pmatrix},$$

$$N=\begin{pmatrix} \frac{x_0+y_0+z_0}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \frac{-(B^2+C^2)x_0+ABy_0+ACz_0}{\sqrt{B^2+C^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \frac{-Cy_0+Bz_0}{\sqrt{B^2+C^2}} \end{pmatrix}.$$

注1 在变换(2)下，直线L即为X轴。

由引理2，推论1，在变换(2)下，旋转体在新坐标系下保持体积不变。在坐标变换(2)下，点M的横坐标为

$$\frac{Ax+By(x)+Cz(x)-(x_0+y_0+z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\triangleq X(x)$$

点M到直线L的距离为

$$d^2=\frac{1}{A^2+B^2+C^2}\left[\left(\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ B & C \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ A & C \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ A & B \end{vmatrix}\right)^2\right]$$

根据引理1，旋转体体积为

$$V=\frac{\pi}{\left(A^2+B^2+C^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b d_H^2\left|A+By'(x)+Cz'(x)\right|\mathrm{d}x$$

4. 应用

例[3]：求曲线 $\begin{cases}y=x^2\\x+z=0\end{cases}$ 在 $x\in[0,1]$ 上的一段绕直线 $L:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ 旋转一周成的旋转体体积。

解 将曲线方程化为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=x^2-y=0\\G(x,y,z)=x+z=0\end{cases}$$

则

$$y'=\frac{\begin{vmatrix}F'_z & F'_x\\G'_z & G'_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\G'_y & G'_z\end{vmatrix}}=2x,z'=\frac{\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\G'_x & G'_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\G'_y & G'_z\end{vmatrix}}=-1$$

$$d_H^2=\left(2x+x^2\right)^2+\left(2x\right)^2+\left(2x-x^2\right)^2$$

旋转体体积为

$$V=\frac{\pi}{6^{\frac{3}{2}}}\int_0^1\left[\left(2x+x^2\right)^2+\left(2x\right)^2+\left(2x-x^2\right)^2\right]\left|1+4x+(-1)\right|\mathrm{d}x=\frac{10\sqrt{6}}{27}\pi .$$

基金项目

广东东软学院教育教学改革研究项目(2021167)。

参考文献

[1] 王林芳，马亚琴. 空间情形下旋转体体积的计算[J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(5): 304-307.

[2] 陈凌. 旋转体体积的一个积分公式[J]. 贵阳学院学报：自然科学版, 2013, 8(2): 11-12.

[3] 梁建莉，汤龙. 旋转体的体积计算[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(2): 240-244.

[4] 李艳丽，王逸迅. 旋转体体积的计算方法[J]. 西安理工大学学报, 2008, 24(3): 362-365.

[5] 朱雄才，杨志芳. 关于旋转体的二个积分公式[J]. 云南师范大学学报, 2004, 24(4): 6-7.

[6] 孙成金，张建军，李战国. 旋转轴为任意直线时旋转体体积的计算[J]. 河南教育学院学报：自然科学版，2015, 24(4): 62-64.

[7] 张健. 旋转体体积计算中的微元法思想应用[J]. 大学数学, 2017, 33(4): 104-110.

[8] 谢时新，李辉，蒋灵芝. 用定积分计算旋转体体积的教学探讨[J]. 商丘职业技术学院学报, 2012, 11(2): 16-18.

[9] 陈纪修. 数学分析[M]. 第3版. 北京：高等教育出版社, 2019.

[10] 梅加强. 数学分析[M]. 第3版. 北京：高等教育出版社, 2011.