**Pure Mathematics** 理论数学, 2022, 12(7), 1262-1268
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.127137

# 稳定向量丛的模空间上的Hecke型有理曲线

**胡金成，刘　敏**

青岛大学，山东 青岛

收稿日期：2022年6月19日；录用日期：2022年7月21日；发布日期：2022年7月28日

## 摘　要

设$C$是亏格为$g \geq 2$的光滑射影曲线，$\mathcal{L}$为$C$上次数为$d$的线丛。令$M := SU_C(r,\mathcal{L})$是$C$上秩为$r$且具有固定行列式$\mathcal{L}$的稳定向量丛的模空间，本文主要研究模空间$M$上的Hecke型有理曲线的次数与其定义向量丛在跳跃直线上的分裂情况和跳跃直线数量之间的关系，并给出一些Hecke型有理曲线的例子。

## 关键词

模空间，跳跃直线，Hecke型有理曲线

# Rational Curves of Hecke Type on Moduli Spaces of Stable Bundles

**Jincheng Hu, Min Liu**

Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Jun. 19th, 2022; accepted: Jul. 21st, 2022; published: Jul. 28th, 2022

## Abstract

**Let $C$ be a smooth projective curve of genus $g \geq 2$ and $\mathcal{L}$ be a line bundle on $C$ of degree $d$. Let $M := SU_C(r,\mathcal{L})$ be the moduli space of stable vector bundles on $C$ of rank $r$ and with the fixed determinant $\mathcal{L}$. In this paper, we mainly study the relationship between the degree of a rational curve of Hecke type on moduli space $M$ and the splitting of vector bundle $E$ on jumping lines as well as that between the degree of a rational curve of Hecke type on moduli space $M$ and the number of jumping lines, where the vector bundle $E$ defines the rational curve of Hecke type. And we**

文章引用: 胡金成, 刘敏. 稳定向量丛的模空间上的 Hecke 型有理曲线[J]. 理论数学, 2022, 12(7): 1262-1268.
DOI: 10.12677/pm.2022.127137

**give some examples of rational curves of Hecke type.**

## Keywords

**Moduli Space, Jumping Line, Rational Curves of Hecke Type**



## 1. 引言

设 $C$ 是亏格为 $g\ge 2$ 的光滑射影曲线，令 $M:=SU_C(r,\mathcal{L})$ 是 $C$ 上秩为 $r$ 次数为 $d$ 且具有固定行列式 $\mathcal{L}$ 的稳定向量丛的模空间。已知模空间 $M$ 是一个光滑的拟射影 Fano 簇，且有 $\mathrm{Pic}(M)=Z\cdot\theta$，$-K_M=2(r,d)\theta$ [1]，此处 $\theta$ 是一个丰沛除子。

作为 Fano 簇，模空间 $M$ 里的一条有理曲线是指一个非常值态射 $\varphi:\mathbb{P}^1\to M$，若 $\deg\varphi^*(\theta)=k$，则称该曲线为 $k$ 次有理曲线。Narasimhan 和 Ramanan [2]研究了 Hecke 闭链的基本性质及秩为 2 的向量丛模空间中的 Hecke 曲线。Sambaiah Kilaru [3]研究了亏格 $g\ge 2$ 的光滑射影曲线上秩为 2 且具有固定行列式的模空间中的 1 次和 2 次曲线空间。Ana-Maria Castravet [4]研究了秩为 2、次数为 1 且具有固定行列式的模空间中任意 $k$ 次有理曲线空间。Hwang [5]根据[2]指出了 Hecke 曲线的次数为 $\frac{r}{(r,d)}$，并提出了问题：Hecke 曲线是否是过 $M$ 一般点的极小有理曲线?反之，一条过 $M$ 一般点的极小有理曲线是否必为 Hecke 曲线?孙在[6]中证明了当 $g\ge 3$ 时，模空间 $M$ 中任意过一般点的有理曲线次数至少为 $\frac{r}{(r,d)}$，且除 $g=3,r=2$ 且 $d$ 为偶数的情形外，次数为 $\frac{r}{(r,d)}$ 当且仅当有理曲线为 Hecke 曲线。当 $g=3,r=2$ 且 $d$ 为偶数时，刘敏[7]证明了对于 $M$ 中的每一点 $[W]$，都有过 $[W]$ 点的不同于 Hecke 曲线的直线通过。Mok Ngaiming 和孙[8]给出了 Hecke 曲线的一般的构造方式，对任意 $r$ 和任意 $d$ 确定了 $M$ 中的全部直线。

孙在[6]中证明了任意一条有理曲线 $\varphi:\mathbb{P}^1\to M$ 都可由直纹面 $X=C\times\mathbb{P}^1$ 上的一个向量丛 $E$ 所定义，并给出了 $\varphi:\mathbb{P}^1\to M$ 的次数与 $E$ 的陈类之间的关系

$$2(r,d)\cdot\deg\varphi^*(\theta)=\deg\varphi^*(-K_M)=2rC_2(E)-(r-1)C_1(E)^2=:\Delta(E)。$$

设有理曲线 $\varphi:\mathbb{P}^1\to M$ 由向量丛 $E$ 所定义，$f:X\to C$，$\pi:X\to\mathbb{P}^1$ 为自然投射。如果 $E$ 在一般纤维 $X_\xi=f^{-1}(\xi)$ 上为半稳定的，与 $\mathbb{P}^1$ 上某个合适线丛的拉回作张量，我们可假设 $E$ 在一般纤维上的限制形如 $\mathcal{O}_{X_\xi}(0)^{\oplus r}$。对于有理曲线 $\varphi:\mathbb{P}^1\to M$ 的定义向量丛 $E$，必 $\exists p\in C$ 使得 $E|_{X_p}$ 不同构于 $\mathcal{O}_{X_\xi}(0)^{\oplus r}$，称 $X_p$ 为跳跃直线，且只有有限多条[6]，从而存在 $C$ 的有限子集 $S$ 和向量丛 $V$ 满足正合列

$$0\to f^*V\to E\to\oplus_{p\in S}\mathcal{Q}_p\to 0，$$

其中 $\mathcal{Q}_p$ 是 $X_p$ 上的向量丛，这样定义的有理曲线称为 Hecke 型曲线([6] [9])。特别地，当 $S$ 只含一个点 $p$ 且 $\mathcal{Q}_p=\mathcal{O}_{X_p}(-1)$ 时，即向量丛 $E$ 满足正合列

$$0 \to f^*V \to E \to \mathcal{O}_{X_p}(-1) \to 0,$$

称由这样的向量从 $E$ 所定义的有理曲线为 Hecke 曲线。

代数簇上的有理曲线是代数几何的一个重要研究课题，稳定向量丛的模空间是一类非常重要的代数簇，研究模空间里的有理曲线不仅有助于研究模空间的性质，也可为研究一般代数簇里的有理曲线提供启发。本文第二节研究了 Hecke 型有理曲线的次数与其定义向量丛 $E$ 在跳跃直线上的分裂情况的关系。对只有一条跳跃直线的情况证明了：

**命题 2.5** 若直纹面 $X$ 上向量丛 $E$ 仅有一条跳跃直线 $X_p$，且 $E|_{X_p} = \oplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X_p}(\beta_i)^{r_i}$，则其定义的有理曲线的次数为 $\frac{r}{(r,d)}(-r_1\beta_1 - \cdots - r_n\beta_n)$。

并对有多条跳跃直线的情况进一步得到了一般结论(推论 2.6)。同时研究了 Hecke 型有理曲线的次数与其跳跃直线数量之间的关系，得到了当 $\deg \varphi^*(\theta) = \frac{ra}{(r,d)}$ 时，向量丛 $E$ 至多有 $a$ 条跳跃直线(命题 2.7)。第三部分给出了一些 Hecke 型有理曲线的例子。

## 2. Hecke 型有理曲线

令 $X = C \times \mathbb{P}^1$， $f = X \to C$ 为投射，曲线 $\varphi : \mathbb{P}^1 \to M$ 由 $X$ 上的向量丛 $E$ 所定义。设 $E$ 在一般纤维 $X_\xi = f^{-1}(\xi)$ 上的形式为

$$E|_{X_\xi} = \oplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X_\xi}(\alpha_i)^{\oplus r_i},$$

该 $n$ 元数组 $\alpha = \left(\alpha_1^{\oplus r_1}, \cdots, \alpha_n^{\oplus r_n}\right)$ 称为 $E$ 的一般分裂型。

**引理[6] 2.1** 直纹面 $f : X \to C$ 上任意具有一般分裂型 $\left(0^{\oplus r}\right)$ 的秩为 $r$ 的局部自由层 $\mathcal{E}$，有 $C_2(\mathcal{E}) \ge 0$，且 $C_2(\mathcal{E}) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{E} = f^*V$，其中 $V$ 为 $C$ 上的局部自由层。

**引理 2.2** 若直纹面 $X$ 上向量丛 $E$ 的一般分裂型为 $\left(0^{\oplus r}\right)$，则有 $C_1(E)^2 = 0$。

**证明**首先，$E$ 作为 $X = C \times \mathbb{P}^1$ 上的向量丛，有

$$C_1(E) \in \mathrm{Pic}\left(C \times \mathbb{P}^1\right) = \mathrm{Pic}(C) \times \mathrm{Pic}\left(\mathbb{P}^1\right).$$

因为 $E$ 的一般分裂型为 $\left(0^{\oplus r}\right)$，所以存在线丛 $\mathcal{L}_C$ 使得

$$C_1(E) = f^*\mathcal{L}_C + \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(0).$$

于是有

$$C_1(E)^2 = \left(f^*\mathcal{L}_C + \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(0)\right)^2 = \left(f^*\mathcal{L}_C\right)^2 + 2f^*\mathcal{L}_C\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(0) + \left(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(0)\right)^2 = 0. \ \square$$

设 $X_p\,(p \in C)$ 为 $E$ 的一条跳跃直线，$E|_{X_p} = \oplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X_p}(\beta_i)^{\oplus r_i}$，则有 $\left(\beta_1^{\oplus r_1}, \cdots, \beta_n^{\oplus r_i}\right)$ 不同于 $\left(0^{\oplus r}\right)$。对向量丛 $E$ 沿其跳跃直线 $X_p$ 作初等变换，取 $F$ 为态射 $\phi : E \to E|_{X_p} \to \mathcal{O}_{X_p}(\beta_n)^{\oplus r_n}$ 的核，则有正合列

$$0 \to F \to E \to \mathcal{O}_{X_p}(\beta_n)^{\oplus r_n} \to 0. \tag{1}$$

**注 2.3** 若 $\beta_n = 0$ 时，有 $F \cong E$。

**引理[6] 2.4** $C_1(F) = C_1(E) - r_n X_p$， $C_2(F) = C_2(E) + r_n\beta_n$。

**证明**对(1)式，由正合列上陈类多项式的计算有

$$C_1(E)=C_1(F)+C_1\left(\mathcal{O}_{X_p}(\beta_n)^{\oplus r_n}\right)=C_1(F)+r_nX_p,$$

$$C_2(E)=C_2(F)+C_2\left(\mathcal{O}_{X_p}(\beta_n)^{\oplus r_n}\right)+C_1(F)C_1\left(\mathcal{O}_{X_p}(\beta_n)^{\oplus r_n}\right)=C_2(F)-r_n\beta_n。\square$$

若向量从 $E$ 仅有一条跳跃直线 $X_p$，且 $E|_{X_p}=\oplus_{i=1}^{n}\mathcal{O}_{X_p}(\beta_i)^{\oplus r_i}$，对向量从 $E$ 沿其跳跃直线 $X_p$ 作初等变换，取 $F_1$ 为自同态 $\sigma:E\to E|_{X_p}\to\mathcal{O}_{X_p}(\beta_n)^{\oplus r_n}$ 的核，则有下正合列

$$0\to F_1\to E\to\mathcal{O}_{X_p}(\beta_n)^{\oplus r_n}\to 0,$$

此时 $F_1|_{X_p}=\oplus_{i=1}^{n-1}\mathcal{O}_{X_p}(\beta_i)^{\oplus r_i}\oplus\mathcal{O}_{X_p}(0)^{\oplus r_n}$。继续对向量从 $F_1$ 沿 $X_p$ 作初等变换，有

$$0\to F_2\to F_1\to\mathcal{O}_{X_p}(\beta_{n-1})^{\oplus r_{n-1}}\to 0,$$

此时 $F_2|_{X_p}=\oplus_{i=1}^{n-2}\mathcal{O}_{X_p}(\beta_i)^{\oplus r_i}\oplus\mathcal{O}_{X_p}(0)^{\oplus(r_n+r_{n-1})}$。不断对其沿 $X_p$ 进行初等变换直至 $F_n|_{X_p}=\mathcal{O}_{X_p}(0)^{\oplus r}$，则有一系列正合列

$$\begin{gathered}0\to F_1\to E\to\mathcal{O}_{X_p}(\beta_n)^{\oplus r_n}\to 0\\ \vdots\\ 0\to F_n=f^*V\to F_{n-1}\to\mathcal{O}_{X_p}(\beta_1)^{\oplus r_1}\to 0\end{gathered}\tag{2}$$

其中 $V$ 为 $C$ 上的局部自由层。

**命题 2.5** 若直纹面 $X$ 上向量从 $E$ 仅有一条跳跃直线 $X_p$，且 $E|_{X_p}=\oplus_{i=1}^{n}\mathcal{O}_{X_p}(\beta_i)^{r_i}$，则其定义的有理曲线的次数为 $\frac{r}{(r,d)}(-r_1\beta_1-\cdots-r_n\beta_n)$。

**证明** 通过对向量从 $E$ 沿 $X_p$ 进行初等变换可得一系列正合列，即(2)式，由引理 2.4，有

$$C_2(E)=C_2(F_n)-r_1\beta_1-\cdots-r_n\beta_n=-r_1\beta_1-\cdots-r_n\beta_n。$$

再由引理 2.2，有

$$\Delta(E)=2rC_2(E)-(r-1)C_1(E)^2=2r(-r_1\beta_1-\cdots-r_n\beta_n),$$

$$\deg(\varphi^*\theta)=\frac{\Delta(E)}{2(r,d)}=\frac{r}{(r,d)}(-r_1\beta_1-\cdots-r_n\beta_n)。\square$$

**推论 2.6** 设 $X_{p_1},\cdots,X_{p_q}\ (q\ge 1)$ 为 $E$ 的所有跳跃直线，且 $E|_{X_{p_i}}=\oplus_{j=1}^{n_i}\mathcal{O}_{X_{p_i}}\left(\beta_{p_ij}\right)^{r_{p_ij}}$，则由 $E$ 定义的有理曲线的次数为

$$\deg(\varphi^*\theta)=\frac{r}{(r,d)}\left(-\left(r_{p_11}\beta_{p_11}+\cdots+r_{p_1n_1}\beta_{p_1n_1}\right)-\cdots-\left(r_{p_q1}\beta_{p_q1}+\cdots+r_{p_qn_q}\beta_{p_qn_q}\right)\right)。\tag{3}$$

特别地，对 $\frac{r}{(r,d)}$ 次 Hecke 型有理曲线，此时有 $C_2(E)=1$，仅有一条跳跃直线 $X_p$，若 $E|_{X_p}=\oplus_{i=1}^{n}\mathcal{O}_{X_p}(\beta_i)^{\oplus r_i}$，此时不妨取 $\beta_1>\cdots>\beta_n$，对向量从 $E$ 沿其跳跃直线 $X_p$ 作初等变换至 $F_n|_{X_p}=\mathcal{O}_{X_p}(0)^{\oplus r}$，该过程向量从 $E$ 的二阶陈类减小，必有 $\beta_n<0$，因为 $C_2(F_1)=C_2(E)+r_n\beta_n$，必有

$r_n=1,\beta_n=-1$，即向量丛 $E$ 满足正合列

$$0\to f^*V\to E\to\mathcal{O}_{X_p}(-1)\to 0,$$

其定义的曲线 $\varphi:\mathbb{P}^1\to M$ 为 Hecke 曲线，与[6]中 Hecke 曲线的次数一致。

**命题 2.7** 设 $E$ 为 $X=C\times\mathbb{P}^1$ 上的向量丛且一般分裂型为 $\left(0^{\oplus r}\right)$，若 $C_2(E)=a$，$a>0$，则向量丛 $E$ 至多有 $a$ 条跳跃直线，且若 $E$ 恰有 $a$ 条跳跃直线 $X_{p_1},\cdots,X_{p_a}$，则 $E|_{X_{p_i}}\cong\mathcal{O}_{X_{p_i}}(0)^{\oplus r-1}\oplus\mathcal{O}_{X_{p_i}}(-1),0\le i\le a$。

**证明** 因为 $a>0$，所以可设 $X_{p_1},\cdots,X_{p_q}$ 为向量丛 $E$ 的所有跳跃直线，且设 $E|_{X_{p_i}}=\oplus_{j=1}^{n_i}\mathcal{O}_{X_{p_i}}\left(\beta_{p_ij}\right)^{r_{p_ij}}$。由推论 2.6，可得

$$C_2(E)=-\left(r_{p_11}\beta_{p_11}+\cdots+r_{p_1n_1}\beta_{p_1n_1}\right)-\cdots-\left(r_{p_q1}\beta_{p_q1}+\cdots+r_{p_qn_q}\beta_{p_qn_q}\right)。$$

由引理 2.1，必有 $-\left(r_{p_i1}\beta_{p_i1}+\cdots+r_{p_in_i}\beta_{p_in_i}\right)>0$，$1\le i\le q$ (否则，若存在 $i_0$ 使 $-\left(r_{p_{i0}1}\beta_{p_{i0}1}+\cdots+r_{p_{i0}n_{i0}}\beta_{p_{i0}n_{i0}}\right)\le 0$，不妨取 $i_0=q$，沿着 $X_{p_1},\cdots,X_{p_{q-1}}$ 作初等变换直至得到向量丛 $F'$，使得对 $\forall m\ne q$，$F'|_{X_{p_m}}=\mathcal{O}_{X_{p_m}}(0)^{\oplus r}$，则有 $C_2(F')=-\left(r_{p_q1}\beta_{p_q1}+\cdots+r_{p_qn_q}\beta_{p_qn_q}\right)\le 0$，与引理 2.1 矛盾)。当 $C_2(E)=a$ 时，有

$$-\left(r_{p_11}\beta_{p_11}+\cdots+r_{p_1n_1}\beta_{p_1n_1}\right)-\cdots-\left(r_{p_q1}\beta_{p_q1}+\cdots+r_{p_qn_q}\beta_{p_qn_q}\right)=a,$$

因此 $q\le a$，即至多有 $a$ 条跳跃直线。且若有 $a$ 条跳跃直线，即 $q=a$ 时，$-\left(r_{p_i1}\beta_{p_i1}+\cdots+r_{p_in_i}\beta_{p_in_i}\right)=1$, $i=1,\cdots,q$，即 $\forall i,E|_{X_{p_i}}\cong\mathcal{O}_{X_{p_i}}(0)^{\oplus r-1}\oplus\mathcal{O}_{X_{p_i}}(-1)$。□

**命题 2.7'** 设 $\varphi:\mathbb{P}^1\to M$ 是一条 Hecke 型有理曲线，若其定义向量丛 $E$ 有 $a$ 条跳跃直线，则该曲线的次数至少为 $\frac{ra}{(r,d)}$。

## 3. Hecke 型有理曲线的例子

由推论 2.6 可知模空间 $M$ 上 Hecke 型有理曲线的次数 $k$ 满足

$$k\left(\mathrm{mod}\frac{r}{(r,d)}\right)\equiv 0。\tag{4}$$

**例 3.1** 对 $r=3,k=2r,(r,d)=1$ 的情况，下述其仅有一条跳跃直线 $X_p$ 时在其跳跃直线上的分裂情况。由推论 2.6，向量丛有下列分裂形式：

A. $r_1=2,r_2=1$，

B. $r_1=1,r_2=2$，

C. $r_1=1,r_2=1,r_3=1$。

对情形 A，$E|_{X_p}=\mathcal{O}_{X_p}(\beta_1)^{\oplus 2}\oplus\mathcal{O}_{X_p}(\beta_2)$，其中 $2\beta_1+\beta_2=-2$，$\beta_1>\beta_2$，$\beta_1,\beta_2\in Z$。

对情形 B，$E|_{X_p}=\mathcal{O}_{X_p}(\beta_1)\oplus\mathcal{O}_{X_p}(\beta_2)^{\oplus 2}$，其中 $\beta_1+2\beta_2=-2$，$\beta_1>\beta_2$，$\beta_1,\beta_2\in Z$。

对情形 C，$E|_{X_p}=\mathcal{O}_{X_p}(\beta_1)\oplus\mathcal{O}_{X_p}(\beta_2)\oplus\mathcal{O}_{X_p}(\beta_3)$，其中 $\beta_1+\beta_2+\beta_3=-2$，$\beta_1>\beta_2>\beta_3$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3\in Z$。

**定义 3.2** $C$ 上的向量丛 $V$ 称为 $(k,l)$ 半稳定的($(k,l)$ 稳定的)，若对任意的真子丛 $W\subset V$，有

$$\frac{\deg(W)+k}{rk(W)}\le(<)\frac{\deg(V)+k-l}{rk(V)}。$$

回忆 Hecke 型曲线的构造，对任意 $(1,1)$ 稳定的向量丛 $[W]\in M$，令 $\mathbb{P}(W)$ 为包含过每个纤维原点的

直线的射影丛，对 $\forall p \in C$， $\zeta \in \mathbb{P}\left(W_p^\vee\right)$，有正合列

$$0 \to \zeta \to W_p^\vee \to W_p^\vee / \zeta \to 0,$$

其中 $\zeta$ 为 $W_p^\vee$ 的一维子空间。通过下列正合列定义向量丛 $W^\zeta$

$$0 \to W^\zeta \to W \to \left(W_p / \zeta^\perp\right) \otimes \mathcal{O}_p \to 0, \tag{5}$$

其中 $\zeta^\perp$ 表示 $W_p$ 中被 $\zeta$ 零化的 $n-1$ 维子空间，且 $\det\left(W^\zeta\right) \otimes \mathcal{O}_p = \mathcal{L}$。令 $\iota : W_p^\zeta \to W_p$ 为内射 $W^\zeta \to W$ 在 $p$ 处的纤维所诱导， $\iota$ 的核 $\ker(\iota)$ 为 $W_p^\zeta$ 的一维子空间。对 $\forall l \in \mathbb{P}\left(W_p^\zeta\right)$，通过下列正合列定义向量丛 $\tilde{W}^l$

$$0 \to \tilde{W}^l \to \left(W^\zeta\right)^\vee \to \left(\left(W^\zeta\right)_p^\vee / l^\perp\right) \otimes \mathcal{O}_p \to 0, \tag{6}$$

这里 $l^\perp$ 表示零化 $l$ 的超平面。由 $[W] \in M$ 且 $(1,1)$ 稳定及(5) (6)式， $\tilde{W}^l$ 为秩为 $r$ 次数为 $-d$ 的稳定向量丛，即 $\left(\tilde{W}^l\right)^\vee$ 为秩为 $r$ 次数为 $d$ 的稳定向量丛。因为 $\det\left(W^\zeta\right) \otimes \mathcal{O}_p = \mathcal{L}$ 及(5)式有 $\det\left(\tilde{W}^l\right)^\vee = \left(\det\left(\tilde{W}^l\right)\right)^{-1} = \mathcal{L}$，即

$$\left\{\left(\tilde{W}^l\right)^\vee ; l \in \mathbb{P}\left(W_p^\zeta\right)\right\}$$

为一族被 $\mathbb{P}\left(W_p^\zeta\right)$ 参数化的秩为 $r$ 次数为 $d$ 且具有固定行列式 $\mathcal{L}$ 的稳定向量丛，给出了态射

$$\psi : \mathbb{P}\left(W_p^\zeta\right) \to M。 \tag{7}$$

由 [2] 知 $\psi$ 为闭浸入且 $-K_M|_{\mathbb{P}\left(W_p^\zeta\right)} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}\left(W_p^\zeta\right)}(2r)$。当 $l = \ker(\iota)$ 时， $\left(\tilde{W}^{\ker(\iota)}\right)^\vee \cong W$，若有理曲线 $\alpha : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}\left(W_p^\zeta\right)$ 过点 $[\ker(\iota)]$，则 $\alpha : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}\left(W_p^\zeta\right)$ 在 $\psi$ 下的像为 $M$ 中过点 $[W]$ 的有理曲线。

**命题 3.3** 如果 $\alpha : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}\left(W_p^\zeta\right) = P$ 为一条 $k$ 次有理曲线，则 $\psi \circ \alpha : \mathbb{P}^1 \to M$ 为 $M$ 中的一条 $\dfrac{rk}{(r,d)}$ 次有理曲线。

**证明** 因为 $\alpha : \mathbb{P}^1 \to P$ 为 $k$ 次有理曲线，所以 $\alpha^* \mathcal{O}_P(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$，记 $\varphi = \psi \circ \alpha$，则

$$\deg\left(\varphi^*(\theta)\right) = \deg\left(\alpha^*\left(\theta|_P\right)\right) = \deg\left(\alpha^*\left(\mathcal{O}_P\left(\frac{r}{(r,d)}\right)\right)\right) = \frac{rk}{(r,d)},$$

即 $\psi \circ \alpha : \mathbb{P}^1 \to M$ 为 $M$ 中 $\dfrac{rk}{(r,d)}$ 次有理曲线。□

**引理 3.4** 令 $\alpha : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}\left(W_p^\zeta\right) = P$ 为 $P$ 中 $a_2$ 次有理曲线的 $a_1$ 次覆盖，则 $\alpha : \mathbb{P}^1 \to P$ 满足 $\alpha^* \mathcal{O}_P(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$，其中 $a = a_1 a_2$。

**证明** 令 $Y := \alpha\left(\mathbb{P}^1\right)$ 为 $P$ 的具有诱导概型结构的子簇， $\rho : \tilde{Y} \to Y$ 为其正规化， $\rho : \tilde{Y} \to Y$ 为 $a_2$ 次有理曲线， $\alpha' : \mathbb{P}^1 \to \tilde{Y}$ 为 $a_1$ 次态射满足 $\alpha = \rho \circ \alpha'$。因此

$$\deg\left(\alpha^* \mathcal{O}_P(1)\right) = \deg(\alpha') \cdot \deg\left(\rho^*\left(\mathcal{O}_P(1)|_Y\right)\right) = a,$$

即有 $\alpha^* \mathcal{O}_P(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$。□

由引理我们得到下边更一般的结论。

**命题 3.5** 若 $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}\left(W_p^\zeta\right) = P$ 为一条 $k_2$ 次有理曲线的 $k_1$ 次覆盖，则 $\psi\left(\mathbb{P}^1\right)$ 为 $M$ 中的一条 $\dfrac{rk}{(r,d)}$ 次有理

曲线，其中 $k = k_1 k_2$ 。

## 参考文献

[1] Ramanan, S. (1973) The Moduli Spaces of Vector Bundles over an Algebraic Curve. *Mathematische Annalen*, **200**, 69-84. https://doi.org/10.1007/BF01578292

[2] Narasimhan, M.S. and Ramanan, S. (1978) Geometry of Hecke Cycles I. In: Ramanujam-Atribute, C.P., Ed., Springer-Verlag, New York, 291-345.

[3] Kilaru, S. (1998) Rational Curves on Moduli Spaces of Vector Bundles. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences—Mathematical Sciences*, **108**, 217-226. https://doi.org/10.1007/BF02844479

[4] Castravet, A.M. (2004) Rational Families of Vector Bundles on Curves. *International Journal of Mathematics*, **15**, 13-45. https://doi.org/10.1142/S0129167X0400220X

[5] Hwang, J.M. (2001) Hecke Curves on the Moduli Space of Vector Bundles over an Algebraic Curve. *Proceedings of the Symposium Algebraic Geometry in East Asia*, World Scientific, Kyoto, 155-164.

[6] Sun, X.T. (2005) Minimal Rational Curves on the Moduli Spaces of Stable Bundles. *Mathematische Annalen*, **331**, 925-937. https://doi.org/10.1007/s00208-004-0614-2

[7] Liu, M. (2016) Remarks on Minimal Rational Curves on Moduli Spaces of Stable Bundles. *Comptes Rendus Mathematique*, **354**, 1013-1017. https://doi.org/10.1016/j.crma.2016.08.007

[8] Mok, N.M. and Sun, X.T. (2009) Remarks on Lines and Minimal Rational Curves. *Science in China*, *Series A*, **52**, 617-630. https://doi.org/10.1007/s11425-009-0038-2

[9] 刘敏. 稳定向量丛模空间中的有理曲线[J]. Scientia Sinica: Mathematica, 2017(47): 1441-1466.