Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(8), 1341-1345
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.128147

Hans汉斯

$\tilde{\rho}$混合阵列加权和的若干收敛性质

林　影

宁德师范学院数理学院，福建 宁德

收稿日期：2022年7月14日；录用日期：2022年8月15日；发布日期：2022年8月23日

摘　要

在Cesàro一致可积等较宽泛的条件下，利用$\tilde{\rho}$混合序列的矩不等式和截尾法，研究了$\tilde{\rho}$混合随机阵列加权和的L^r收敛性和弱收敛性，所得到的结果推广了独立情形相应的极限定理。

关键词

$\tilde{\rho}$混合序列，Cesàro一致可积，L^r收敛性，弱收敛性

Some Convergence Properties for Weighted Sums of $\tilde{\rho}$-Mixing Random Arrays

Ying Lin

College of Mathematics and Physics, Ningde Normal University, Ningde Fujian

Received: Jul. 14th, 2022; accepted: Aug. 15th, 2022; published: Aug. 23rd, 2022

Abstract

Using the moment inequality of $\tilde{\rho}$-mixing sequences and truncation method, we investigated the L^r convergence and weak convergence for the weighted sums of $\tilde{\rho}$-mixing random arrays under mild conditions such as Cesàro uniform integrability. The results obtained generalize the corresponding limit theorems for independent case.

Keywords

$\tilde{\rho}$-Mixing Sequence, Cesàro Uniform Integrability, L^r Convergence, Weak Convergence

文章引用: 林影. $\tilde{\rho}$混合阵列加权和的若干收敛性质[J]. 理论数学, 2022, 12(8): 1341-1345.
DOI: 10.12677/pm.2022.128147

1. 引言与引理

设$\{X_n, n\ge 1\}$是概率空间$(\Omega,\mathcal{A},P)$上的随机变量序列，$\mathcal{F}_S=\sigma(X_i, i\in S\subset \boldsymbol{N})$为$\sigma$域，在$\mathcal{A}$中给定$\sigma$域$\mathcal{F},\mathcal{R}$，令

$$\rho(\mathcal{F},\mathcal{R})=\sup\left\{\left|\operatorname{corr}(X,Y)\right|: X\in L_2(\mathcal{F}), Y\in L_2(\mathcal{R})\right\},$$

其中$\operatorname{corr}(X,Y)=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{\operatorname{Var}X\operatorname{Var}Y}}$为相关系数，$L_2(\mathcal{F})$和$L_2(\mathcal{R})$分别为所有$\mathcal{F}$和$\mathcal{R}$可测且 2 阶矩有限的随机变量全体。Kolmogorov 在 1960 年引入了上面的ρ相依系数，在此基础上，Bradley 又在 1990 年提出了以下的$\tilde{\rho}$相依系数。对$k\ge 0$，令

$$\tilde{\rho}(k)=\sup\left\{\rho(\mathcal{F}_S,\mathcal{F}_T): \text{有限子集 } S,T\subset \boldsymbol{N}, \text{且} \operatorname{dist}(S,T)\ge k\right\},$$

其中$\operatorname{dist}(S,T)$表示集合S,T的距离。显然$0\le\tilde{\rho}(k+1)\le\tilde{\rho}(k)\le 1$，$\tilde{\rho}(0)=1$。

定义 1 [1]：对随机变量序列$\{X_n, n\ge 1\}$，若存在$k\ge 1$，使$\tilde{\rho}(k)<1$，则称随机变量序列$\{X_n, n\ge 1\}$是$\tilde{\rho}$混合序列。

显然独立随机变量序列是$\tilde{\rho}$混合序列，因为对独立列而言有$\tilde{\rho}(k)=0<1$，$\forall k\ge 1$。在定义 1 中，$\tilde{\rho}(k)<1$的要求是很弱的，这导致$\tilde{\rho}$混合序列是一类广泛的相依序列。对$\tilde{\rho}$混合序列的极限理论的研究取得了一系列重要的成果，如文[1]-[6]。本文主要研究$\tilde{\rho}$混合阵列的加权和，并且加权的矩阵是一类较为一般的实数矩阵。在$\tilde{\rho}$混合阵列满足比一致可积性等条件更为宽松的要求下，获得了其L^r收敛性和弱收敛性。以下约定正常数C与n无关，且在不同之处可以表示不同的值；I_A表示A的示性函数。

定义 2：若随机变量阵列$\{X_{ni}, 1\le i\le k_n\uparrow\infty, n\ge 1\}$的每一行，即$\{X_{ni}, 1\le i\le k_n\}$均是$\tilde{\rho}$混合序列，则称$\{X_{ni}, 1\le i\le k_n\uparrow\infty, n\ge 1\}$为$\tilde{\rho}$混合阵列。

定义 3 [6]：若对$r>0$，随机变量阵列$\{X_{ni}, 1\le i\le k_n\uparrow\infty, n\ge 1\}$满足：

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\ge 1} k_n^{-1}\sum_{i=1}^{k_n} E\left|X_{ni}\right|^r I_{(|X_{ni}|\ge x)}=0,$$

则称阵列$\{X_{ni}, 1\le i\le k_n\uparrow\infty, n\ge 1\}$为$r$阶 Cesàro 一致可积的。

定义 4 [7]：设$\{a_{ni}, 1\le i\le k_n\uparrow\infty, n\ge 1\}$是实数阵列，$r>0$，若满足：(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ni}=0\ (i\ge 1)$；(2) $\sum\limits_{i=1}^{k_n}\left|a_{ni}\right|^r\le M\ (n\ge 1)$，$M$为常数，则称$\{a_{ni}, 1\le i\le k_n\uparrow\infty, n\ge 1\}$为$l_r$-Toeplitz 矩阵。

引理 1 [6]：设$\{X_n, n\ge 1\}$是$\tilde{\rho}$混合零均值随机变量序列，$E\left|X_i\right|^q<\infty\ (i\ge 1)$，则对$0<q\le 2$，存在仅依赖于$\tilde{\rho}$和$q$的正常数$C$，使$\forall n\ge 1$，有$E\left|\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right|^q\le C\sum\limits_{i=1}^{n} E\left|X_i\right|^q$。

引理 2：设$f: R\to R^+$，且$0\le f\le 1$，若$\lim\limits_{x\to\infty} x^r f(x)=0\ (0<r<2)$，则有

$$\lim_{y\to\infty} y^{-(2-r)}\int_0^y x f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证明：由洛必达法则，

$$\lim_{y\to\infty} y^{-(2-r)}\int_0^y x f(x)\mathrm{d}x=\lim_{y\to\infty}\frac{y f(y)}{(2-r)y^{1-r}}=\frac{1}{2-r}\lim_{y\to\infty} y^r f(y)=0.$$

2. $\tilde{\rho}$ 混合阵列加权和的 L^r 收敛性

定理 1：设 $\tilde{\rho}$ 混合阵列 $\{X_{ni}, 1\le i\le k_n\uparrow\infty, n\ge 1\}$ 是 r 阶 Cesàro 一致可积的（$1\le r<2$），且 $EX_{ni}=0$，$1\le i\le k_n$，$n\ge 1$，$\{a_{ni}, 1\le i\le k_n, n\ge 1\}$ 是 l_r-Toeplitz 矩阵，且 $\max_{1\le i\le k_n}|a_{ni}|^r k_n=O(1)$，则 $\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}X_{ni}\xrightarrow{L^r}0$。

证明：对任意固定的 $a>0$，对每一 $n\ge 1$，$1\le i\le k_n$，令

$$X'_{ni}=X_{ni}I_{(|X_{ni}|<a)}-E\left(X_{ni}I_{(|X_{ni}|<a)}\right),$$

$$X''_{ni}=X_{ni}I_{(|X_{ni}|\ge a)}-E\left(X_{ni}I_{(|X_{ni}|\ge a)}\right),$$

则 $X_{ni}=X'_{ni}+X''_{ni}$，且对每一 $n\ge 1$，$\{X'_{ni}, 1\le i\le k_n\}$ 和 $\{X''_{ni}, 1\le i\le k_n\}$ 均为 $\tilde{\rho}$ 混合零均值随机变量序列。由引理 1 和 C_r-不等式有

$$\begin{aligned}E\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}X'_{ni}\right|^2&\le C\sum_{i=1}^{k_n}|a_{ni}|^2 E|X'_{ni}|^2\le 2^2Ca^2\sum_{i=1}^{k_n}|a_{ni}|^2=4Ca^2\sum_{i=1}^{k_n}|a_{ni}|^r|a_{ni}|^{2-r}\\&\le 4Ca^2M\max_{1\le i\le k_n}|a_{ni}|^{2-r}\to 0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

从而 $E\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}X'_{ni}\right|^r\to 0\ (n\to\infty)$。

由引理 1、C_r-不等式及 r 阶 Cesàro 一致可积性，有

$$\begin{aligned}E\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}X''_{ni}\right|^r&\le C\sum_{i=1}^{k_n}|a_{ni}|^r E|X''_{ni}|^r\le 2^rC\sum_{i=1}^{k_n}|a_{ni}|^r E|X_{ni}|^r I_{(|X_{ni}|\ge a)}\\&\le 2^rC\max_{1\le i\le k_n}|a_{ni}|^r\sum_{i=1}^{k_n}E|X_{ni}|^r I_{(|X_{ni}|\ge a)}\\&=2^rC\max_{1\le i\le k_n}|a_{ni}|^r k_n\left(k_n^{-1}\sum_{i=1}^{k_n}E|X_{ni}|^r I_{(|X_{ni}|\ge a)}\right)\end{aligned}$$

先令 $n\to\infty$，再令 $a\to\infty$，立即得 $E\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}X''_{ni}\right|^r\to 0\ (n\to\infty)$。

于是

$$E\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}X_{ni}\right|^r\le 2^{r-1}\left(E\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}X'_{ni}\right|^r+E\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}X''_{ni}\right|^r\right)\to 0\quad(n\to\infty).$$

推论 1：设 $\tilde{\rho}$ 混合阵列 $\{X_{ni}, 1\le i\le k_n\uparrow\infty, n\ge 1\}$ 是 r 阶 Cesàro 一致可积的（$1\le r<2$），且 $EX_{ni}=0$，$1\le i\le k_n$，$n\ge 1$，则 $k_n^{-1/r}\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}\xrightarrow{L^r}0$。

证明：取 $a_{ni}=k_n^{-1/r}$，$1\le i\le k_n$，$n\ge 1$，则

$$\lim_{n\to\infty} a_{ni}=\lim_{n\to\infty} k_n^{-1/r}=0\quad(1\le i\le k_n)，且\ \sum_{i=1}^{k_n}|a_{ni}|^r\le\sum_{i=1}^{k_n}k_n^{-1}=1\quad(n\ge 1),$$

即 $\{a_{ni}, 1 \le i \le k_n, n \ge 1\}$ 是 l_r-Toeplitz 矩阵。又 $\max_{1 \le i \le k_n} |a_{ni}|^r k_n = 1\ (n \ge 1)$，所以定理 1 中的条件都满足，故有

$$\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni} X_{ni} = k_n^{-1/r} \sum_{i=1}^{k_n} X_{ni} \xrightarrow{L^r} 0.$$

推论 2： 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是 r 阶 Cesàro 一致可积的 $\tilde{\rho}$ 混合零均值随机变量序列，$1 \le r < 2$，则 $n^{-\frac{1}{r}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{L^r} 0$。

证明： 在推论 1 中取 $X_{ni} = X_i$，$1 \le i \le k_n$，再取 $k_n = n$，$n \ge 1$，由推论 1 立即知推论 2 成立。

3. $\tilde{\rho}$ 混合阵列加权和的弱收敛性

在弱于 r 阶 Cesàro 一致可积性的条件下，有下面的弱收敛性结果。

定理 2： 设 $\tilde{\rho}$ 混合零均值随机变量阵列 $\{X_{ni}, 1 \le i \le k_n \uparrow \infty, n \ge 1\}$ 和实数阵列 $\{a_{ni}, 1 \le i \le k_n, n \ge 1\}$ 分别满足：

(1) $\lim_{x \to \infty} x^r \sup_{n \ge 1} k_n^{-1} \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| \ge x) = 0$，$1 \le r < 2$；

(2) $\lim_{n \to \infty} \max_{1 \le i \le k_n} |a_{ni}| = 0$ 且 $\max_{1 \le i \le k_n} |a_{ni}|^r k_n = O(1)$，$\forall n \ge 1$，$1 \le r < 2$，

则 $\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni} X_{ni} \xrightarrow{P} 0$。

证明： 不妨设 $a_{ni} > 0$，$1 \le i \le k_n$，$n \ge 1$。对 X_{ni} 截尾，令

$$X'_{ni} = X_{ni} I_{(|a_{ni} X_{ni}| < 1)} \text{ 和 } X''_{ni} = X_{ni} I_{(|a_{ni} X_{ni}| \ge 1)},$$

则 $X_{ni} = X'_{ni} + X''_{ni}$。$\forall \varepsilon > 0$，有

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni} X_{ni}\right| \ge \varepsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}\left(X'_{ni} - EX'_{ni}\right)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}\left(X''_{ni} - EX''_{ni}\right)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right) =: A_1 + A_2.$$

由 Markov 不等式、引理 1 及 C_r-不等式，有

$$\begin{aligned} A_1 &\le CE\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}\left(X'_{ni} - EX'_{ni}\right)\right|^2 \le C\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^2 E\left|X'_{ni}\right|^2 = C\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^2 EX_{ni}^2 I_{(|a_{ni} X_{ni}| < 1)} \\ &\le C\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^2 \int_0^{a_{ni}^{-1}} xP(|X_{ni}| \ge x)\mathrm{d}x = C\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^{2-r} a_{ni}^r \int_0^{a_{ni}^{-1}} xP(|X_{ni}| \ge x)\mathrm{d}x \quad . \\ &\le C \max_{1 \le i \le k_n} a_{ni}^{2-r} \int_0^{a_{ni}^{-1}} x \sup_{n \ge 1} k_n^{-1} \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| \ge x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \to \infty} \max_{1 \le i \le k_n} |a_{ni}| = 0$，所以 $a_{ni}^{-1} \to \infty\ (n \to \infty)$。于是在引理 2 中，取

$$f(x) = \sup_{n \ge 1} k_n^{-1} \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| \ge x) = 0,$$

则由(1)知，$\lim_{x \to \infty} x^r f(x) = 0$。再取 $y = a_{ni}^{-1}$，由引理 2 的结论知，

$$a_{ni}^{2-r} \int_0^{a_{ni}^{-1}} x \sup_{n \ge 1} k_n^{-1} \sum_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| \ge x)\mathrm{d}x \to 0 \quad (n \to \infty),$$

对每一 $1 \le i \le k_n$ 成立，故 $A_1 \to 0$。

由 Markov 不等式及 C_r-不等式，有

$$A_2 \le C\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni} E\left|X''_{ni}\right| = C\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}\int_{a_{ni}^{-1}}^{\infty} P\left(\left|X_{ni}\right| \ge x\right)\mathrm{d}x \le C\max_{1\le i\le k_n} a_{ni}k_n\int_{a_{ni}^{-1}}^{\infty}\sup_{n\ge1} k_n^{-1}\sum_{i=1}^{k_n} P\left(\left|X_{ni}\right| \ge x\right)\mathrm{d}x,$$

由(1)，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x \ge a_{ni}^{-1} \ge \delta$ 时，有 $\sup_{n\ge1} k_n^{-1}\sum_{i=1}^{k_n} P\left(\left|X_{ni}\right| \ge x\right) \le \varepsilon x^{-r}$，因此

$$A_2 \le C\max_{1\le i\le k_n} a_{ni}k_n\int_{a_{ni}^{-1}}^{\infty}\varepsilon x^{-r}\mathrm{d}x \le C\varepsilon\max_{1\le i\le k_n} a_{ni}k_n a_{ni}^{r-1} \le C\varepsilon\max_{1\le i\le k_n} a_{ni}^{r}k_n \le C\varepsilon,$$

由 ε 的任意性，知 $A_2 \to 0$，定理 2 得证。

推论 3： 设 $\{X_n, n\ge1\}$ 为 $\tilde{\rho}$ 混合零均值随机变量序列，$1 \le r < 2$，若

$$\lim_{x\to\infty} x^r \sup_{n\ge1} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} P\left(\left|X_i\right| \ge x\right) = 0,$$

则 $n^{-1/r}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} 0$。

证明： 在定理 2 中，令 $k_n = n$，$n \ge 1$，取 $X_{ni} = X_i$，$a_{ni} = n^{-1/r}$，$1 \le i \le n$，显然定理 2 中的(1)满足，又

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le i\le k_n}\left|a_{ni}\right| = \lim_{n\to\infty} n^{-1/r} = 0 \text{ 且 } \max_{1\le i\le n}\left|a_{ni}\right|^r n = 1,$$

故推论 3 得证。

注： 经典的独立随机变量序列的概率极限理论中有以下弱大数定律：设随机变量序列 $\{X_n, n\ge1\}$ 独立同分布，且 $E\left|X_1\right|^r < \infty$，$0 < r \le 2$，则 $n^{-1/r}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} 0$。因此，上述推论 3 是独立情形的弱收敛性在 $\tilde{\rho}$ 混合序列中的推广与改进。

参考文献

[1] Bradley, R.C. (1990) Equivalent Mixing Condition for Random Fields. Technical Report No. 336, Center for Stochastic Processes, Univ. of North Carolina, Chapel Hill.

[2] 杨善朝. 一类随机变量部分和的矩不等式及其应用[J]. 科学通报, 1998, 43(17): 1823-1827.

[3] 吴群英. $\tilde{\rho}$ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性[J]. 应用数学, 2002, 15(1): 1-4.

[4] 邓小芹, 吴群英. $\tilde{\rho}$ 混合序列完全矩收敛的精确渐近性[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(6): 32-40.

[5] 费丹丹, 付宗魁, 黄琼敖. $\tilde{\rho}$ 混合序列移动平均过程的完全矩收敛[J]. 应用数学, 2022, 35(3): 533-543.

[6] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[7] 万成高. 鞅的极限理论[M]. 北京: 科学出版社, 2002.