

图的星匹配性质的研究

李培榕^{1*}, 边红^{2†}, 于海征²

¹新疆师范大学, 数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆大学, 数学与信息科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2022年7月24日; 录用日期: 2022年8月24日; 发布日期: 2022年8月31日

摘要

图的匹配理论是图论中的经典问题, 它在实际生活中的应用也非常广泛. 但传统的匹配理论只能解决一对一的人员分配问题, 对于确定组长的多人小组分配问题传统的一对一匹配已无法解决, 由此提出了星匹配的概念. 完全二部图 $K_{1,s}$ 称为星图. 在图 G 中没有公共顶点的两个星子图 $K_{1,s}$ 称之为相互独立的星子图, 图 G 中相互独立的星子图所构成的集合 $M_{K_{1,s}}(G)$ 叫做图 G 的一个 $K_{1,s}$ -匹配, 简称星匹配. 图 G 的所有星匹配中, 含有 $K_{1,s}$ 的最大个数称为图 G 的 $K_{1,s}$ -匹配数, 简称星匹配数, 记为 $m_{K_{1,s}}(G)$, 并称此 $K_{1,s}$ -匹配为图 G 的最大 $K_{1,s}$ -匹配. 若 v 是图 G 的某个最大 $K_{1,s}$ -匹配 $M_{K_{1,s}}(G)$ 中的顶点, 则称 $M_{K_{1,s}}(G)$ 饱和了点 v , 若 $M_{K_{1,s}}(G)$ 饱和了图 G 的所有顶点, 则称 $M_{K_{1,s}}(G)$ 为完美星匹配. 本文利用分类讨论的方法研究了一些特殊图类具有星匹配的充要条件以及星匹配的上、下界; 另外给出了二叉树和 p 叉树有完美星匹配的充分条件, 并且给出了二叉树以及 p 叉树的完美星匹配数的确切值.

关键词

匹配, 星匹配, 星匹配数, 最大星匹配, 完美星匹配

Research on Properties of Star Matchings of Graphs

Peirong Li^{1*}, Hong Bian^{2†}, Haizheng Yu²

¹School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

²College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: Jul. 24th, 2022; accepted: Aug. 24th, 2022; published: Aug. 31st, 2022

* 第一作者.

† 通讯作者.

Abstract

Matching theory in graph is a classical problem in graph theory, and also has very widely applications in real life. However, the traditional matching theory can only solve the problem of one-to-one personnel allocation, and the traditional one-to-one matching can not solve the problem of multi-person group allocation that determines the group leader, thus putting forward the concept of star matching. Complete bipartite graph $K_{1,s}$ is called star graph. Two star graphs $K_{1,s}$ without no common vertex in the graph G are called independent star graphs, and we call that the set $M_{K_{1,s}}(G)$ consisting of mutually independent star graphs $K_{1,s}$ is a $K_{1,s}$ -matching of the graph G , simply star matching. The maximum cardinality of $M_{K_{1,s}}(G)$ is called $K_{1,s}$ -matching number of G , simply star matching number. We call that a vertex v of some maximum star matching $M_{K_{1,s}}(G)$ is saturated by $M_{K_{1,s}}(G)$. If the maximum star matching $M_{K_{1,s}}(G)$ saturated all of vertices of G , then $M_{K_{1,s}}(G)$ is called perfect star matching. In this paper, by using the method of classification discussion, we present some bounds and necessary and sufficient conditions of containing star matchings in some special graphs; Moreover, we give the sufficient conditions of containing perfect star matchings in perfect binary trees and perfect p -ary trees, and give the exactly values of perfect star matching numbers of perfect binary trees and perfect p -ary trees.

Keywords

Matching, Star Matching, Star Matching Number, Maximum Star Matching, Perfect Star Matching

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 介绍

图的匹配理论的研究是图论中的经典问题之一,它在实际生活中的应用十分广泛,如常见的婚配问题等.随着时代和社会的发展,人们对于图的匹配的推广又有了很多新的突破,本文主要描述的星匹配就是近年来图的匹配中的又一新鲜血液.

星匹配概念正式提出的时间比较晚,是匹配理论中一个比较新颖的研究方向.事实上,早在1986年, Hell [1]研究了完全二部图的 packing 问题,即:给定完全二部图的一个集合 \mathcal{B} , 是否一个图 G 有 \mathcal{B} -因子? 这个问题的特殊情形 \mathcal{B} 是一些星图的集合时,这个最大 \mathcal{B} -packing 问题实质上就是星匹配问题.文献 [2] 设计了一个多项式时间算法来计算,当 $T \geq 2$ 时任意图 G 的 T -星匹配数,并给出了 T -星匹配的一些性质.文献 [3] 基于最大星匹配的难度划分给出了树的最大 T^+ -星匹配的多项式时间算法.文献 [4] 利用星匹配数给出了连通图基于 $K_{1,s}$ 星匹配数的 L -特征值以及 Q -特征值的相关上、下界.文献 [5] 给出了连通图基于 $K_{1,s}$ 星匹配数的图能量的下界.

本文所研究的图都是有限简单图.令 $G = (V(G), E(G))$ 表示一个图.任意两个顶点均相邻的简单图称为完全图, n 个顶点的完全图记作 K_n .如果图 G 每个顶点的度均相同称 G 为正则图.每个

顶点的度为 k 的正则图, 称为 k -正则图. 若一个图 G 的顶点集 $V(G)$ 可以划分为两个互不相交的非空子集 $X(G)$ 和 $Y(G)$, 使得 $X(G) \cup Y(G) = V(G)$, 且对于任意 $e_{ij} = v_i v_j \in E(G) (i \neq j)$, 都有 $v_i \in X(G), v_j \in Y(G)$, 则称图 G 是二部图. 若 $|X(G)| = m, |Y(G)| = n$, 且对 $\forall v_i \in X(G), v_j \in Y(G)$, 都有 $v_i v_j \in E(G)$, 则称图 G 为完全二部图, 记作 $K_{m,n}$.

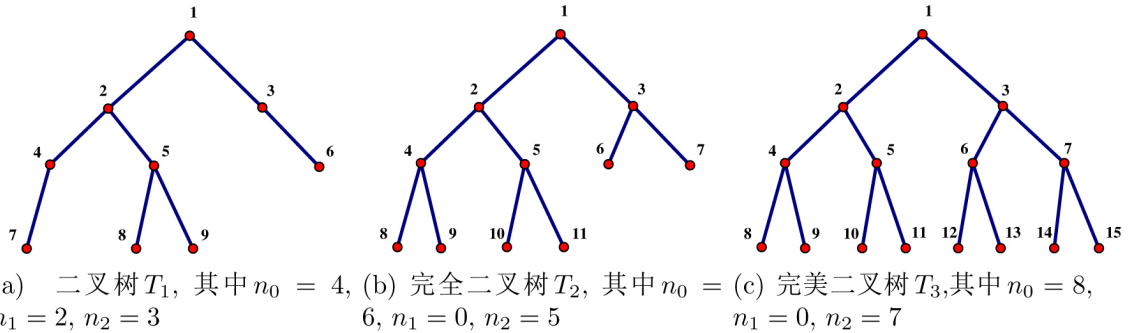


Figure 1. Classification of binary tree

图 1. 二叉树的分类

一个连通简单无圈图称为树 T . 树 T 中度为 1 的点称为叶子点, 用 n_0 和 n_i 分别表示树 T 中叶子点和子树个数为 i 的节点数目. 每个节点至多只有 p 颗子树的树叫做 p 叉树; 当 $p = 2$ 时称为二叉树 (见图1(a)). 如果二叉树中叶子节点只出现在最下层和次下层, 且最下层的叶子节点靠左排列, 这样的二叉树称为完全二叉树 (见图1(b)); 如果在完全二叉树中所有的叶子节点只出现在最后一层, 则称其为完美二叉树 (见图1(c)). 完全 p 叉树和完美 p 叉树类似定义. 显然, 如果一个二叉树的顶点数为 n , 易知, $n_2 = n_0 - 1, n_1 = n - 2n_0 + 1$.

完全二部图 $K_{1,s}$ 称为星图. 图 G 中无公共顶点的两个星图 $K_{1,s}$ 称为是相互独立的. 图 G 中相互独立的 $K_{1,s}$ 所构成的集合 $M_{K_{1,s}}(G)$ 称为图 G 的一个 $K_{1,s}$ -匹配, 简称星匹配. 显然, $K_{1,1}$ -匹配就是通常意义下的匹配; $K_{1,2}$ -匹配就是 P_3 -匹配. 图 G 的所有星匹配中含有 $K_{1,s}$ 的最大个数称为图 G 的 $K_{1,s}$ -匹配数, 记作 $m_{K_{1,s}}(G)$; 并称此 $K_{1,s}$ -匹配为图 G 的最大 $K_{1,s}$ -匹配. 若 v 是图 G 的某个最大 $K_{1,s}$ -匹配 $M_{K_{1,s}}(G)$ 中的顶点, 则称 $M_{K_{1,s}}(G)$ 饱和顶点 v . 若图 G 的最大 $K_{1,s}$ -匹配饱和图 G 的所有顶点, 则称 $M_{K_{1,s}}(G)$ 为完美星匹配.

目前有关图的匹配理论的研究非常丰富, 但图的匹配的相关应用大多偏向于类似婚配问题的一对一人员分配, 较为局限. 而本文研究的星匹配则可以在图的匹配的基础上缩小诸多限制. 例如在人员分配问题中, 利用星匹配可以很快给出确定组长的多人数小组分配问题等. 基于此本文的主要研究如下:

首先研究了一些特殊图类具有星匹配的充要条件以及星匹配的上、下界; 另外给出了二叉树和 p 叉树有完美星匹配的充分条件, 并且给出了二叉树以及 p 叉树的完美星匹配数的确切值.

2. 主要结果

在本节中首先考虑一些特殊图类, 如: 二部图、完全二部图的星匹配数的上、下界.

定理 2.1 [4] $n (n \geq 2)$ 阶树 T 的星匹配数 $m_{K_{1,s}}(T)$ 必定满足: $1 \leq m_{K_{1,s}}(T) \leq \frac{n}{1+s} (s \leq \Delta(T))$.

定理 2.2 令 $G = (X(G), Y(G))$ 是一个二部图, 其中 $|X(G)| = m, |Y(G)| = n$. 则当 $n < m$ 时, G 的包含 $K_{1,1}$ -匹配的星匹配数 $m_{K_{1,1}}(G)$ 满足: $1 \leq m_{K_{1,1}}(G) \leq n$; 特别地, 当 G 为完全二部图 $K_{n,m}$ 时, 其星匹配数 $m_{K_{1,s}}(K_{m,n})$ 满足: $m_{K_{1,s}}(K_{m,n}) = \min\{\lfloor \frac{m}{s} \rfloor, n\}$, 其中 $1 \leq s \leq m$.

证明: 首先, $1 \leq m_{K_{1,1}}(G)$ 显然成立; 由星图 $K_{1,1}$ 的定义可以知道: 星图 $K_{1,1}$ 中有 2 个顶点, 1 条边, 即星图 $K_{1,1}$ 所构成的集合 $M_{K_{1,1}}(G)$ 中的元素是由 $K_{1,1}$ 中互不相交的边所构成的; 由二部图的

定义可知: 当 $n < m$ 时, 二部图 $G = (X(G), Y(G))$ 中互不相交的边数小于等于 n 条, 所以对于任意星匹配来说有: $|M_{K_{1,1}}(G)| = m_{K_{1,1}}(G) \leq n$, 即可以得到 $1 \leq m_{K_{1,1}}(G) \leq n$.

事实上, 由于 $K_{m,n}$ 为完全二部图, 所以 $X(K_{m,n})$ 中每一个顶点均与 $Y(K_{m,n})$ 中每一个顶点相邻. 当 $n < m$ 时不失一般性, 假设星图 $K_{1,s}$ 中的 1 个顶点在 $X(K_{m,n})$ 中, s 个顶点在 $Y(K_{m,n})$ 中, 则当 $1 \leq s \leq m$ 时, $K_{1,s}$ -匹配一定存在, 又因为星匹配数是指 $K_{m,n}$ 中所能找到的最多的相互独立的星图 $K_{1,s}$ 的个数, 且 $X(K_{m,n})$ 中的顶点互不相邻, 所以星匹配数为 $m_{K_{1,s}}(K_{m,n}) = \min\{\lfloor \frac{m}{s} \rfloor, n\}$ 显然成立. ■

令 T 是 n 个顶点的完全 p 叉树 ($n \geq p + 1$), 下面的定理 2.3 给出了 T 有 $K_{1,s}$ -星匹配的充要条件.

定理 2.3 令 T 是 n 个顶点的完全 p 叉树 ($n \geq p + 1$). 则 T 有 $K_{1,s}$ -星匹配当且仅当 $1 \leq s \leq p + 1$.

证明: 由完全 p 叉树的定义可以知道 $\Delta(T) = p + 1$, 所以如果 T 有 $K_{1,s}$ -星匹配, 则 $1 \leq s \leq p + 1$;

又因为 p 叉树每一个顶点 v_i (非叶子点) 至多与其它 $p + 1$ 个顶点相邻, 所以 $1 \leq s \leq p + 1$ 时, T 有 $K_{1,s}$ -星匹配. ■

下面给出完全图 K_n 的星匹配数的确切值.

定理 2.4 对于完全图 K_n , 则 $m_{K_{1,s}}(K_n) = \lfloor n/(1+s) \rfloor$.

证明. 由完全图 K_n 的定义可以知道 K_n 的每一个顶点 v_i 的度均为 $d_{K_n}(v_i) = n - 1$, 所以 $1 \leq s \leq n - 1$ 时 K_n 均有 $K_{1,s}$ -匹配且 $m_{K_{1,s}}(K_n)$ 的大小至少为 1.

下面分为两种情况证明完全图的最大星匹配数; 不妨设 $k = n/(1+s)$, 当 $k \in N^*$ (N^* 代表自然数集去掉 0) 时, 由星图 $K_{1,s}$ 的定义可知: $|V(K_{1,s})| = 1 + s$; 不妨假设 K_n 的最大星匹配数为 $m_{K_{1,s}}(K_n)$, 则 K_n 的最大星匹配中包含的顶点个数为 $(1+s)m_{K_{1,s}}(K_n)$;

对于每一个 $n = (1+s)k$, 当 $k \in N^*$ 时可以理解为: 总能在 K_n 中找到 k 个不同的且都包含 $1+s$ 个顶点的子图 $G_i (i = 1, 2, \dots, k)$, 又因为 K_n (其中 $n = 1+s$) 的每一个顶点总与其余的 s 个顶点相邻, 所以 G_i 中星匹配数为 $m_{K_{1,s}}(G_i) = 1$, 因此 $m_{K_{1,s}}(K_n) = k$, 即此时最大星匹配数为 $m_{K_{1,s}}(K_n) = k$.

当 $k \in R^* \setminus N^*$ (R^* 代表实数集去掉 0) 时, 同理证明. 对于每一个 $n = (1+s)k$ 可以理解为: 总能在 K_n 中找到 $\lfloor k \rfloor$ 个不相同的且都包含 $1+s$ 个顶点的子图 $G_i (i = 1, 2, \dots, \lfloor k \rfloor)$, 所以 $m_{K_{1,s}}(G_i) = \lfloor k \rfloor$, 即此时最大星匹配数 $m_{K_{1,s}}(K_n) = \lfloor k \rfloor$. 综上所述, 即可得对于每一个 $n = (1+s)k$ (其中 $k \in R^*$), 完全图 K_n 的最大星匹配数为 $m_{K_{1,s}}(K_n) = \lfloor k \rfloor$, 即 $m_{K_{1,s}}(K_n) = \lfloor n/(1+s) \rfloor$. ■

下面给出有固定顶点以及叶子点数的二叉树的星匹配数上、下界, 以及该星匹配数上界存在的充要条件.



Figure 2. Binary tree T

图 2. 二叉树 T

定理 2.5 令 T 是顶点数为 n , 叶子点数为 n_0 的二叉树. 则 $1 \leq m_{K_{1,3}}(T) \leq n_2 - 1 (n > 4)$; 经过顶点的适当排列可满足: $m_{K_{1,3}}(T) = n_2 - 1$ 当且仅当 $\frac{n_0 + n_1 + 1}{3} \geq n_2 - 1$.

证明: 首先证明 $1 \leq m_{K_{1,3}}(T) \leq n_2 - 1$. 事实上, 当 $n > 4$ 时, 显然有 $m_{K_{1,3}}(T) \geq 1$;

现用反证法证明 $m_{K_{1,3}}(T) \leq n_2 - 1$. 假设 $m_{K_{1,3}}(T) > n_2 - 1$, 由星图 $K_{1,3}$ 的定义可以知道星图 $K_{1,3}$ 有 4 个顶点, 且 4 个顶点中 $\Delta(K_{1,3}) = 3$, 所以若 $m_{K_{1,3}}(T) > n_2 - 1$, 则二叉树 T 的最大 $K_{1,3}$ -匹配数中度为 3 的顶点个数大于 $n_2 - 1$ 个. 又由二叉树的定义可知二叉树最大度为 3, 且二叉树 T 中有两颗子树的顶点数为 n_2 , 因此最大度为 3 的顶点个数为 $n_2 - 1$ 与假设矛盾, 即 $m_{K_{1,3}}(T) \leq n_2 - 1$,

综上所述可知 $1 \leq m_{K_{1,3}}(T) \leq n_2 - 1 (n > 4)$.

下面证明经过顶点的适当排列后可满足: $m_{K_{1,3}}(T) = n_2 - 1$ 当且仅当 $\frac{n_0+n_1+1}{3} \geq n_2 - 1$.

必要性: 当 $m_{K_{1,3}}(T) = n_2 - 1$, 则一定有 $4(n_2 - 1) \leq n$, 又因为 $n_0 * 0 + n_1 * 1 + n_2 * 2 = n - 1$, 所以 $4(n_2 - 1) \leq 2n_2 + n_1 + 1$, 即 $n_2 - 1 \leq \frac{n_0+n_1+1}{3}$.

充分性: 由二叉树的概念可知度为3的顶点数恰为 $n_2 - 1$, 且与其余三个不同顶点相邻. 由于二叉树是连通无圈图且最大度为3, 所以可以将任意二叉树以下图2的形式进行绘制, 需通过顶点的适当排列排除 $n_2 - 1$ 个3度顶点两两相距两个顶点的情况(如图1(a)中的情况已排除), 因此在已知度为3的顶点数恰为 $n_2 - 1$ 的情况下只需二叉树中1度点和2度点数之和大于 $3(n_2 - 1)$, 且通过顶点的适当排列排除 $n_2 - 1$ 个3度顶点两两相连的情况等(如图1(a)中的情况已排除), 即可得出 $m_{K_{1,3}}(T) = n_2 - 1$. 由于 $n_2 - 1 \leq \frac{n_0+n_1+1}{3}$, 即 $3(n_2 - 1) \leq n_0 + n_1 + 1$, 而二叉树中1度点和2度点数分别为 n_0 和 $n_1 + 1$, 所以可以得出 $m_{K_{1,3}}(T) = n_2 - 1$. ■

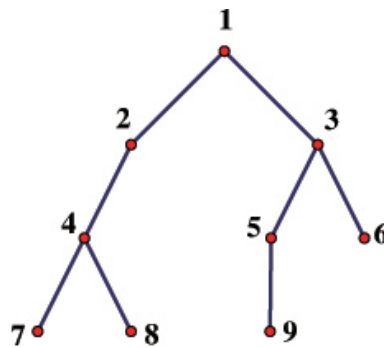


Figure 3. Binary tree T'_1

图 3. 二叉树 T'_1

图1(b)中 $n_2 - 1 = 4$, $\frac{n_0+n_1+1}{3} = \frac{7}{3}$, 即 $n_2 - 1 \geq \frac{n_0+n_1+1}{3}$, 显然 $m_{K_{1,3}}(T_2) = 2$; 图1(c)中 $n_2 - 1 = 6$, $\frac{n_0+n_1+1}{3} = 3$, 即 $n_2 - 1 \geq \frac{n_0+n_1+1}{3}$, 显然 $m_{K_{1,3}}(T_2) = 2$; 图3即为图1(a)经过顶点的适当排列后所形成的图, 显然满足 $m_{K_{1,3}}(T'_1) = n_2 - 1 = 2$.

下面的定理 2.6 和推论 2.7 给出了完美 p 叉树和完美二叉数分别有完美 $K_{1,p}$ -星匹配和完美 $K_{1,2}$ -星匹配的充分条件, 并在完美 p 叉树和完美二叉数分别有完美 $K_{1,p}$ -星匹配和完美 $K_{1,2}$ -星匹配时, 给出了完美 $K_{1,p}$ -星匹配和完美 $K_{1,2}$ -星匹配数的确切值.

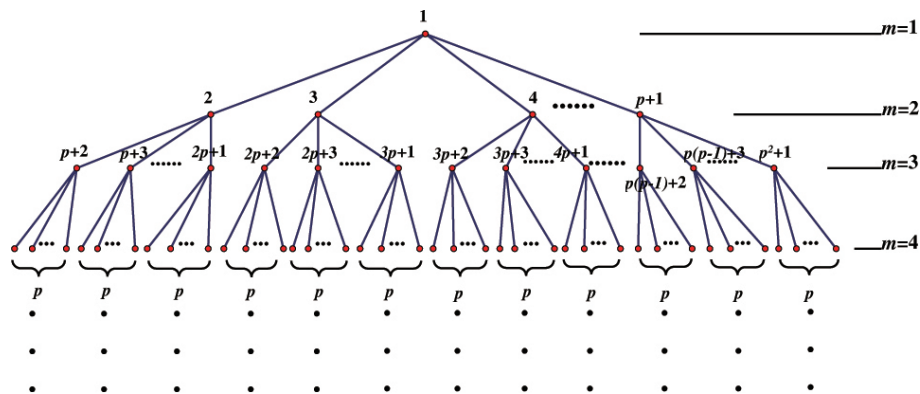


Figure 4. Perfect p -ary tree T

图 4. 完美 p 叉树 T

定理 2.6 令 T 是 n 个顶点的完美 p 叉树. 则对于任意的 $m = \log_p[1 + (p - 1)n] (m \in N^*)$ 有:

(i) 当 $m = \log_p[1 + (p - 1)n]$ 为奇数时, 树 T 中没有完美 $K_{1,p}$ - 匹配;

(ii) 当 $m = \log_p[1 + (p - 1)n]$ 为偶数时, 树 T 中有完美 $K_{1,p}$ - 匹配, 且 $m_{K_{1,p}}(T) = \frac{p^m - 1}{p^2 - 1}$.

证明: (i) 不妨设 m 为 n 阶完美 p 叉树 (见图4) 的层数, 则顶点个数 n 与层数 m 之间有如下关系: $n = p^0 + p^1 + p^2 + \dots + p^{m-1}$, 即 $m = \log_p[1 + (p - 1)n]$. 又由完美 p 叉树的定义可知 $\Delta(T) = 1 + p$, 所以对于任意一颗完美 p 叉树来说一定有 $K_{1,p}$ - 匹配.

因为 $n = p^0 + p^1 + p^2 + \dots + p^{m-1} = 1 + (p^1 + 1) + (p^2 - 1) + \dots + (p^{m-2} + 1) + (p^{m-1} - 1)$, 且当 x, y 分别为奇数和偶数时, $p^x + 1 = (p + 1)(p^{x-1} - p^{x-2} + p^{x-3} - \dots + 1)$, $p^y - 1 = (p + 1)(p - 1)(p^{y-2} + p^{y-4} + \dots + 1)$. 所以当 m 为奇数时, $n_i \equiv n_j \equiv 1 \pmod{p + 1}$, 其中 $n_i = \frac{p^{m_i} - 1}{p - 1}, n_j = \frac{p^{m_j} - 1}{p - 1}; m_i, m_j$ 为任意两个不同的奇数. 又因为 $K_{1,p}$ - 匹配中包含的顶点数为 $p + 1$, 所以完美 $K_{1,p}$ - 匹配中饱和的顶点数为 $n' = (p + 1)m_{K_{1,p}}(T)$, 这与 $n_i \equiv n_j \equiv 1 \pmod{p + 1}$ 矛盾. 即当 m 为奇数时, 完美 p 叉树无完美 $K_{1,p}$ - 匹配.

(ii) 因为 $n = p^0 + p^1 + p^2 + \dots + p^{m-1} = \frac{p^m - 1}{p - 1}$, 当 m 为偶数时, 可以写作 $n = \frac{p^{2k} - 1}{p - 1}$ (其中 $m = 2k, k = 0, 1, 2, \dots$), 又因为 $\frac{p^{2k} - 1}{p - 1} = (p + 1)(p^0 + p^2 + p^4 + \dots + p^{2k-2})$, 所以 $(p + 1) | \frac{p^{2k} - 1}{p - 1}$ 即 $(p + 1) | n$, 因此存在一个整数 q 使得 $n = \frac{p^m - 1}{p - 1} = (p + 1)q$, 所以可以知道当 m 为偶数时 n 阶完美 p 叉树一定有 q 个不同的包含 $p + 1$ 个顶点的子图. 又因为完美 p 叉树除叶子点外的每个顶点 v_i 均至少与不同的 p 个顶点相邻且 $K_{1,p}$ - 匹配中包含的顶点数为 $p + 1$, 所以当 $m = \log_p[1 + (p - 1)n]$ 为偶数时有完美 $K_{1,p}$ - 匹配.

综上所述完美 p 叉树 T 的完美 $K_{1,p}$ - 匹配数 $m_{K_{1,p}}(T)$ 与 m 之间有以下关系:

$$m_{K_{1,p}}(T) = p^0 + p^2 + p^4 + \dots + p^{m-2} = \frac{p^m - 1}{p^2 - 1}.$$

■

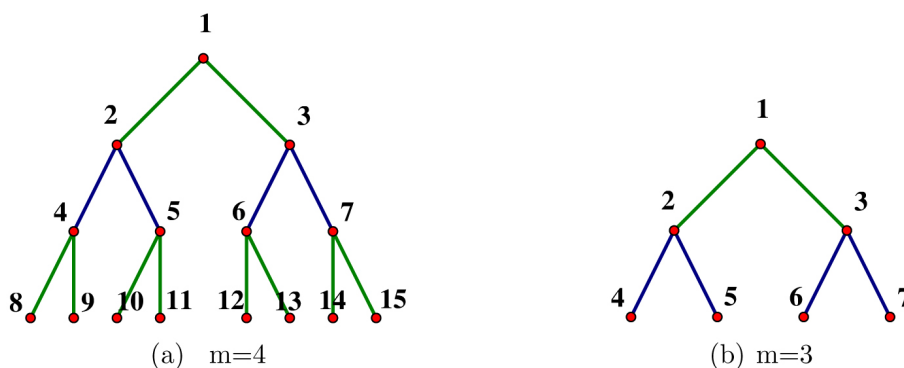


Figure 5. Perfect binary tree T (where green edges denote by a star matching of T)

图 5. 完美二叉树 T (其中绿色的边代表 T 的星匹配)

在完美 p 叉树中当 $p = 2$ 时, 根据定理2.6可以得到下面的推论2.7:

推论 2.7 令 T 是 n 个顶点的完美二叉树. 则对于任意的 $m = \log_2(1 + n) (m \in \mathbb{N}^*)$ 有:

(i) 当 $m = \log_2(1 + n)$ 为奇数时, 树 T 中没有完美 $K_{1,2}$ - 匹配;

(ii) 当 $m = \log_2(1 + n)$ 为偶数时, 树 T 中有完美 $K_{1,2}$ - 匹配, 且 $m_{K_{1,2}}(T) = \frac{2^m - 1}{3}$.

图5(a)中, 当 $m = 4$ 为偶数时, 显然有完美 $K_{1,2}$ - 匹配; 图5(b)中当 $m = 3$ 为奇数时, 显然无完美 $K_{1,2}$ - 匹配.

基金项目

国家自然科学基金项目(No.11761070, 61662079); 2021年新疆维吾尔自治区自然基金联合项目(2021D01C078); 新疆师范大学2020年一流专业、2021年一流课程项目资助.

参考文献

- [1] Hell, P. and Kirkpatrick, D.G. (1986) Packing by Complete Bipartite Graphs. *SIAM Journal on Algorithm Discrete Mathematics*, **7**, 199-209. <https://doi.org/10.1137/0607024>
- [2] Lin, W. and Lam, P.C.B. (2009) Star Matching and Distance Two Labelling. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **13**, 211-224. <https://doi.org/10.11650/twjm/1500405279>
- [3] 李梦雅. 团队指派与星匹配问题[D]: [硕士学位论文]. 南京: 东南大学, 2019. <https://doi.org/10.27014/d.cnki.gdnau.2019.000170>
- [4] 何常香, 刘世琼. 星匹配数与(无符号)拉普拉斯特征值[J]. 高校应用数学学报A辑, 2015, 30(3): 333-339.
- [5] 王蒙蒙, 何常香. 关于星匹配数的图能量下界[J]. 上海理工大学学报, 2020, 42(4): 317-319+367.