Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(9), 1457-1462
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.129158

定积分与积分和之间的误差讨论

陈春宝

上海海事大学，文理学院，上海

收稿日期：2022年8月9日；录用日期：2022年9月9日；发布日期：2022年9月16日

摘 要

本文主要讨论了定积分与其积分和由于点的取法及分割方法不同导致误差不同的一些问题，借用一元函数的几个中值公式进行推广探讨误差无穷小量的阶数，得到了定积分的点的取法不同及分割不同都可以导致误差的级别不同。

关键词

定积分，积分和，无穷小，误差

Discussion on the Error between Finite Integral and Integral Sum

Chunbao Chen

College of Arts and Sciences, Shanghai Maritime University, Shanghai

Received: Aug. 9th, 2022; accepted: Sep. 9th, 2022; published: Sep. 16th, 2022

Abstract

This paper mainly discusses some problems about the difference between finite integral and its integral sum as well as the error caused by the difference of point selection and segmentation methods. In this paper, we discuss the order of infinitesimal of the error by making use of several Mean Value Theorems appeared in one-variable function, it is found that different points of definite integral and different division can lead to different error levels.

Keywords

Infinite Integral, Integral Sum, Infinitesimal, Error

文章引用: 陈春宝. 定积分与积分和之间的误差讨论[J]. 理论数学, 2022, 12(9): 1457-1462.
DOI: 10.12677/pm.2022.129158

1. 引言

第十三届全国大学生数学竞赛预赛(非数类)第五大题是一个 14 分大题，已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续的导函数，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right] = \frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right]$$

竞赛中有不少同学采用了泰勒公式或者使用定积分定义，但很多同学没有将区间分割，从而在合理的区间上综合使用，或者直接由右边向左边凑，因此导致本题得满分者了了。从本题证明的结论中看到的和式是定积分将区间 n 等分，取点为分割小区间的中点对应的积分和，所以本质上是讨论定积分值与积分和之间的误差，通常采用中值公式来进行估计误差。依据高等数学上册定积分定义得知，定积分的值仅与被积函数及上下限有关，而定积分的积分和不仅与被积函数，上下限有关，还与点的取法以及分割方法有关系，其中定积分的积分和可采用不同的表示法，即点的取法不同，分割法的不同。而积分和不同的表示法都会导致误差有不同的结果，有不少学者研究了定积分的定义在解决数列极限中的应用，如周寿明[1]讨论了定积分求和式极限，高婷婷，张明会[2]讨论了 R (黎曼)积分的特征和意义，但均没研究定积分与积分和的误差，下文就通过点的不同取法以及分割法不同导致误差构成无穷小量的阶数加以讨论。

2. 定积分与积分和之间误差讨论

2.1. 区间分割相同，点的取法不同，导致误差程度不尽相同

高等数学教材上册第五章定积分定义最后一条性则是积分中值定理[3]，本文的使用需要加以推广，积分第一中值定理推广：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积不变号，则至少存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

证明：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，所以存在最大值 M 和最小值 m，即 $m\le f(x)\le M$，不妨假设 $g(x)\ge 0$，由定积分的保号性则得 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\ge 0$，设 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$ 由定积分性则，

$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，所以 $m\le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\le M$

设常数 $c=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$，由于 c 介于 m，M 之间，由闭区间上连续函数介值定理的推论得，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=c$，即至少存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$，则由 $m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 恒为 0，任意 $\xi\in[a,b]$，$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 恒成立，定理得证。

2.1.1. 积分和的取点为每个分割小区间的中点

例 1、已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 具有二阶连续的导数，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right]=\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right].$$

证明：记 $x_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n}$， $\xi_k=\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}=a+\dfrac{2k-1}{2n}(b-a)$，

将 $f(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上利用一阶泰勒公式[3]，其中 x_0 取 ξ_k 得：

$f(x)=f(\xi_k)+f'(\xi_k)(x-\xi_k)+\dfrac{1}{2}f''(\eta_k)(x-\xi_k)^2$， 其 中 $x\in[x_{k-1},x_k]$， η_k 介 于 ξ_k， x 之 间， 记 $S_n=\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left[a+\dfrac{2k-1}{2n}(b-a)\right]$ 为积分和，其中将积分区间 $[a,b]$ 进行了 n 等分，点 ξ_k 取每个分割小区间的中点，即 $\xi_k=\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}=a+\dfrac{2k-1}{2n}(b-a)$，

记积分和 $S_n=\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left[a+\dfrac{2k-1}{2n}(b-a)\right]=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\mathrm{d}x$，

所以误差 $R_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x)-f(\xi_k)\right]\mathrm{d}x$，将 $f(x)$ 在 ξ_k 处的一阶泰勒公式代入得误差 $R_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f'(\xi_k)(x-\xi_k)+\dfrac{1}{2}f''(\eta_k)(x-\xi_k)^2\right]\mathrm{d}x$， 又 $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k)(x-\xi_k)\mathrm{d}x=0$，所以误差 $R_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[\dfrac{1}{2}f''(\eta_k)(x-\xi_k)^2\right]\mathrm{d}x$， 又因为 $f''(x)$ 连续， $g(x)=(x-\xi_k)^2\geq 0$， 由积分第一中值定理推广得： $\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[\dfrac{1}{2}f''(\eta_k)(x-\xi_k)^2\right]\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2}f''(\tau_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-\xi_k)^2\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{n} f''(\tau_k)\dfrac{(b-a)^3}{24n^3}$， 其中 $x_{k-1}\leq\tau_k\leq x_k$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left[a+\dfrac{2k-1}{2n}(b-a)\right]\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(b-a)^2}{24}\sum\limits_{k=1}^{n} f''(\tau_k)\dfrac{b-a}{n}$ [3]，因为 $f''(x)$ 连续，所以 $f''(x)$ 可积，由定积分定义得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f''(\tau_k)\dfrac{b-a}{n}=\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2R_n=\dfrac{(b-a)^2}{24}\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x=\dfrac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right]$，

那么 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2R_n=\dfrac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right]$， 一般的，当 $f'(a)\neq f'(b)$ 时，为同阶无穷小，说明， ξ_k 取小区间中点，当 $n\to\infty$ 时，误差 R_n 是当 n 趋于无穷大时(n^{-2})的同阶无穷小，即该无穷小量为(n^{-1})的 2 阶无穷小。当然，$f'(a)=f'(b)$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} n^2R_n=0$，误差 R_n 是当 n 趋于无穷大时(n^{-2})的高阶无穷小，如 $f(x)=x$， $f'(x)=1$， 显然 $f'(a)=f'(b)$，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left[a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right]=\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right]=0$$

所以， R_n 当 n 趋于无穷大时为(n^{-1})的任意阶无穷小量。

2.1.2. 积分和的取点为每个分割小区间的端点

例 2、已知函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续的导函数，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k-1}{n}\frac{b-a}{2}\right)\right]=\frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right].$$

证明：分割仍为 n 等分，取点为小区间的左端点， $x_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n}$， $\xi_k=x_{k-1}=a+\dfrac{k-1}{n}(b-a)$，将

$f(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上使用拉格朗日中值公式：$f(x)=f(\xi_k)+f'(\eta_k)(x-\xi_k)$，其中 $x\in[x_{k-1},x_k]$，η_k 介于 ξ_k，x 之间。

记部分和 $S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left[a+\frac{k-1}{n}(b-a)\right]=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(\xi_k)\mathrm{d}x$，

误差 $R_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-S_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x)-f(\xi_k)\right]\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f'(\eta_k)(x-\xi_k)\right]\mathrm{d}x$。

同样因为 $f'(x)$ 连续，而 ξ_k 是分割小区间的左端点，所以 $g(x)=x-\xi_k\ge 0$，由积分第一中值定理推广得：$R_n=\sum_{k=1}^{n}f'(\tau_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-\xi_k)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}f'(\tau_k)\frac{(b-a)^2}{2n^2}$，其中 $x_{k-1}\le\tau_k\le x_k$。

所以 $\lim_{n\to\infty}n\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left[a+\frac{k-1}{n}(b-a)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}f'(\tau_k)\frac{b-a}{n}$

因为 $f'(x)$ 连续，所以 $f'(x)$ 可积，由定积分定义得：$\lim_{n\to\infty}nR_n=\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$，

由 $\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right]$，得 $\lim_{n\to\infty}nR_n=\frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right]$，一般的，当 $f(a)\ne f(b)$ 时，为同阶无穷小，即分割仍为 n 等分，点取端点时，当 $f(a)\ne f(b)$ 时，误差 R_n 当 n 趋于无穷大时是(n^{-1})的同阶无穷小，因此当分割相同时，点的位置不同导致误差不同，本例中定积分的积分和的点取中点较端点误差更小。

当 $f(a)=f(b)$ 时，$\lim_{n\to\infty}nR_n=\frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right]=0$，误差 R_n 当 n 趋于无穷大时是(n^{-1})的高阶无穷小，但具体多少阶无法确定，下面有两个具体实例加以说明。

取 $f(x)=1$，$a=-1$，$b=1$，显然端点函数值相等，则 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2$，$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left[a+\frac{k-1}{n}\frac{b-a}{2}\right]=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}1=2$，所以 $R_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left[a+\frac{k-1}{n}\frac{b-a}{2}\right]=0$，任意的 $p>0$，总有 $\lim_{n\to\infty}n^pR_n=0$，那么当 n 趋于无穷大时 R_n 是(n^{-1})的任意阶无穷小量。

取 $f(x)=x^2$，$a=-1$，$b=1$，同样 $f(a)=f(b)$，则 $\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$，

$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left[a+\frac{k-1}{n}\frac{b-a}{2}\right]=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-2k+2}{n}\right)^2=\frac{2}{3}+\frac{4}{3n^2}$，误差 $R_n=-\frac{4}{3n^2}$，$\lim_{n\to\infty}n^2R_n=-\frac{4}{3}$，那么当 n 趋于无穷大时 R_n 是(n^{-1})的 2 阶无穷小量，由此可见，尽管都满足端点函数值相等，不同的函数得到的阶数未必相同，但都是(n^{-1})的高阶无穷小量。

2.2. 取点相同，即 ξ_k 取端点，但分割不同时，R_n 对应的无穷小量也有不同变化

定积分的积分和不仅点的取法可以多样，其积分区间的分割也可以不同，当被积函数可积时通常采用的是平均分割积分区间

2.2.1. 分割法为 $2n$ 等分

将积分区间 $[a,b]$ 进行 $2n$ 等分，记 $x_k=a+\frac{k(b-a)}{2n}$，取点 $\xi_k=x_{k-1}=a+\frac{k-1}{2n}(b-a)$，部分和 $S_n=\frac{b-a}{2n}f\left[a+\frac{k-1}{2n}(b-a)\right]=\sum_{k=1}^{2n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(\xi_k)\mathrm{d}x$，

误差 $R_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{2n}f\left[a+\frac{k-1}{2n}(b-a)\right]=\sum_{k=1}^{2n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x)-f(\xi_k)\right]\mathrm{d}x$，

同样将 $f(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上利用拉格朗日中值公式：

$f(x)=f(\xi_k)+f'(\eta_k)(x-\xi_k)$，其中 $x\in[x_{k-1},x_k]$，η_k 介于 ξ_k，x 之间。

误差 $R_n=\sum_{k=1}^{2n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f'(\eta_k)(x-\xi_k)\right]\mathrm{d}x$，

同样因为 $f'(x)$ 连续，ξ_k 是分割小区间的左端点，$g(x)=x-\xi_k\ge 0$，由积分第一中值定理推广得：

$R_n=\sum_{k=1}^{2n}f'(\tau_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-\xi_k)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{2n}f'(\tau_k)\frac{(b-a)^2}{8n^2}$，其中 $x_{k-1}\le\tau_k\le x_k$，

所以 $\lim_{n\to\infty}n^2R_n=\frac{b-a}{4}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{4}\left[f(b)-f(a)\right]$，$\lim_{n\to\infty}nR_n=\frac{b-a}{4}\left[f(b)-f(a)\right]$，一般的，当 $f(a)\ne f(b)$ 时，为同阶无穷小，

因此当 $f(a)\ne f(b)$ 时误差 R_n 当 n 趋于无穷大时也为(n^{-1})的 1 阶无穷小量，与将区间 n 等分时的误差阶数相同，即当取点方法相同，而分割类型也相同时，误差为同阶无穷小，即分割方法与 n 等分同数量级时，误差都为同阶无穷小量，当端点函数值相等时，误差对应的无穷小量阶数将增加。

2.2.2. 分割法为 n^2 等分

将积分区间 $[a,b]$ 进行 n^2 等分，记 $x_k=a+\frac{k(b-a)}{n^2}$，取点 $\xi_k=x_{k-1}=a+\frac{k-1}{n^2}(b-a)$，

部分和 $S_n=\frac{b-a}{n^2}f\left[a+\frac{k-1}{n^2}(b-a)\right]=\sum_{k=1}^{n^2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(\xi_k)\mathrm{d}x$，

误差 $R_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n^2}\sum_{k=1}^{n^2}f\left[a+\frac{k-1}{n^2}(b-a)\right]=\sum_{k=1}^{n^2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x)-f(\xi_k)\right]\mathrm{d}x$，

$f(x)=f(\xi_k)+f'(\eta_k)(x-\xi_k)$，其中 $x\in[x_{k-1},x_k]$，η_k 介于 ξ_k，x 之间，

代入误差 $R_n=\sum_{k=1}^{n^2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f'(\eta_k)(x-\xi_k)\right]\mathrm{d}x$。

同样因为 $f'(x)$ 连续，ξ_k 是分割小区间的左端点，$g(x)=x-\xi_k\ge 0$，由积分第一中值定理推广得：

$R_n=\sum_{k=1}^{n^2}f'(\tau_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-\xi_k)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n^2}f'(\tau_k)\frac{(b-a)^2}{2n^4}$，其中 $x_{k-1}\le\tau_k\le x_k$。由定积分定义推得

$\lim_{n\to\infty}n^2R_n=\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right]$，$\lim_{n\to\infty}n^2R_n=\frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right]$，一般的，当 $f(a)\ne f(b)$ 时，为同阶无穷小，所以当分割方法为 n^2 等分时，误差 R_n 当 n 趋于无穷大时为(n^{-1})的 2 阶无穷小量，当分割数提高一个数量级，无穷小量也增加一阶，可以看出，如果将区间 n^3 等分时，其误差 R_n 当 n 趋于无穷大时至少为(n^{-3})的同阶无穷小量，即为(n^{-1})的 3 阶无穷小量，即当分割类型更为精细时，误差 R_n 为更高阶无穷小量。当区间端点函数值相等时，得到的误差将比不等时得到的误差至少更高一阶的无穷小量。

3. 结论

由于例题讨论过程中均用到了定积分第一中值定理的推广，而定理的使用均用到了被积函数导数的连续性，如果被积函数的导数不符合连续的要求，结论可能不真，所以，被积函数的导函数连续，或者二阶导函数连续，是得出本文结论的一个充分条件，当被积函数满足一定要求后，定积分的值与积分和之间的误差与分法及点的取法有较大关联，点取在小区间中点较端点好，同时分割得越细误差就越小。当然，还可以比较点的取法，分割方法均发生变化时定积分与其积分和的误差估计，如分割法为 n^2 等分，取点为小区间的中点时，误差当 n 趋于无穷大时应至少为(n^{-1})的四阶无穷小量，同时，本文举例中有附

加要求，如端点函数值或者一阶导数值不相等，如果相等，则为更高阶无穷小量。如果积分区间的分割不是均分，或者取点的方法更为复杂时，定积分与其积分和的误差估计将十分复杂，本文未加以讨论。另外本文不仅讨论了定积分与其积分和的误差估计，还给出了这一类证明题型的解题方法，如果是讨论定积分与一个和式的极限关系的题型，一般都是将其化为同小区间的积分，并采用拉格朗日中值公式或泰勒公式以及积分中值定理，选择合理的点及分割加以解决。

参考文献

[1] 周寿明. 利用定积分求和式极限的教学研究[J]. 才智, 2018(10): 63.

[2] 高婷婷, 张明会. R (黎曼)积分的特征和意义分析[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2022(5): 155-158.

[3] 同济大学应用数学系. 高等数学(上册) [M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.