Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(9), 1481-1486
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.129161

Hans汉斯

含Causal算子的脉冲微分方程的两度量稳定性

王文丽[1]，**田淑环**[2]

[1]河北大学管理学院，河北 保定
[2]保定学院数学与计算机系，河北 保定

收稿日期：2022年8月13日；录用日期：2022年9月13日；发布日期：2022年9月20日

摘 要

脉冲微分方程理论是微分方程理论的一个重要分支，相对于微分方程理论而言，脉冲微分方程理论有着更为广泛的应用，因此许多研究者对此产生了浓厚的兴趣，其中脉冲微分方程的稳定性是其理论中的重要分支。本文引入函数上拟单调的概念，并建立了新的比较原理，运用这个比较原理和李雅普诺夫函数，从而得到了含有causal算子的脉冲微分系统的两度量稳定性的一些判据，从而丰富了脉冲微分系统的研究结果。

关键词

Causal算子，脉冲微分系统，两度量稳定性

Stability for Impulsive Differential Systems with Causal Operators in Terms of Two Measures

Wenli Wang[1], **Shuhuan Zhang**[2]

[1]School of Management, Hebei University, Baoding Hebei
[2]Deptment of Mathematics and Computer, Baoding University, Baoding Hebei

Received: Aug. 13th, 2022; accepted: Sep. 13th, 2022; published: Sep. 20th, 2022

Abstract

Impulse differential equation theory is an important branch of differential equation theory. Compared with differential equation theory, impulse differential equation theory has a wider range of applications, among which the stability of impulse differential equation is an important branch of its theory, so many researchers have a keen interest in it. In this paper, a new concept of qua-

文章引用: 王文丽，田淑环. 含 Causal 算子的脉冲微分方程的两度量稳定性[J]. 理论数学, 2022, 12(9): 1481-1486.
DOI: 10.12677/pm.2022.129161

si-monotone function is introduced, and a new comparison principle is also established. By using this principle and Lyapunov functions, some criteria about stability for impulsive differential equations with causal operators in terms of two measures are obtained. This enriches the research results of impulsive differential systems.

Keywords

Causal Operators, Impulsive Differential Systems, In Terms of Two Measures

1. 引言

在现实生活中，很多发展过程都会在某一个或者某些时刻，经历一种状态的突然变化，这些突然变化的持续时间也许对于整个系统过程来说是非常短，甚至是可以忽略的。然而这种突变却对整个系统状态的影响是不能忽略的，脉冲就是这种变化的描述。近年来，脉冲微分方程理论发展迅速，引起了很多国内外学者的极大兴趣。

脉冲系统的稳定性研究已有很多结果[1]-[6]，其中李雅普诺夫稳定性的一些相关研究最为广泛，但是除了李雅普诺夫提出的稳定性之外，还有渐进不变集的部分稳定性、条件稳定性、完美稳定性和最终稳定性等等[7] [8] [9]。为了统一各种已知的稳定性和有界性的概念，我们发现采用两种不同的度量并根据两种度量得到稳定的判据是有意义的。

causal 算子是一种非预期算子，它首先是由 Volterra 在其积分方程的研究中提出的，并由 Tonelli 首次给出精确定义。causal 算子可以由几个函数或者泛函来表示，这些函数或泛函出现在许多动态系统的理论中，因此，causal 系统理论的研究就显得十分重要。另外，它的理论统一了诸如常微分方程、积分微分方程、有限或无限时滞微分方程、Volterra 积分方程和中立性微分方程等，这引起了许多学者的关注，相关专著和参考文献，详见专著[10]。

但是，有关脉冲微分系统的两度量稳定性的相关研究并不多见，而对含有 causal 算子的脉冲微分系统的两度量稳定性的研究更是少之又少。本文将脉冲微分系统引入到 causal 系统上，利用新的比较定理和李雅普诺夫函数给出系统两度量稳定性的判别条件，从而丰富了脉冲系统的研究成果。

以下是本文的结构：第 2 部分为预备知识，主要介绍函数符号表示，重要的定理以及新的比较定理；第 3 部分是本文的主要部分，主要证明我们的结论，即含有 causal 算子的脉冲微分系统的两度量稳定性。

2. 预备知识

在本文中，定义 $R_+=[0,+\infty)$，$E=C([t_0,T),R^n)$，并定义以下函数类：

$$K=\{a\in C[R_+,R_+]:a(u)\text{是严格单调增的},\ a(0)=0\};$$

$$P_K=\{a\in C[R\times R_+,R_+]:a(t,u)\in K\text{ 对任意的}t\in R\};$$

$$\Gamma=\left\{h\in C[R\times R,R_+]:h(t,x)\text{关于 }x\text{ 是连续的},\ \inf_{x\in R}h(t,x)=0\right\};$$

$$S_\delta=\{h\in C[R\times R,R_+]:h(t,x)<\delta,h\in\Gamma\}.$$

为了能够更好的研究含有 causal 算子的脉冲微分方程的两度量稳定性，我们首先给出有关 causal 算子的概念。

定义 1 如果对于 E 中的每对元素 (x,y)，使得当 $0 \le t_0 \le s \le t$ 时 $x(s)=y(s)$，有 $(Qx)(t)=(Qy)(t)$，$0 \le t_0 \le s \le t$，$t \le T$，T 是任意正实数，则称 $Q:E \to E$ 是 causal 算子。

本文考虑如下带有 causal 算子的脉冲微分系统

$$\begin{cases} x'(t)=(Qx)(t) \\ \Delta x(t_k)=I_k(x) \\ x(t_0)=x_0 \ge 0 \end{cases} \tag{1}$$

以及它的比较系统

$$\begin{cases} u'(t)=g(t,u) \\ \Delta u(t_k)=J_k(u_{t_k}) \\ u(t_0)=u_0 \ge 0 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $E \in C[J,R]$，$Q \in C[E,E]$，$g \in C\left[R_+^2,R_+\right]$ 且在每一个 $(t_{k-1},t_k]\times R$ 上是连续的，并且 $I_k:R \to R$，$J_k:R \to R$，$\Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k^-)$，我们定义的 $x=x(t;t_0,x_0)$ 是方程(1)满足条件的解，类似的可以定义 $u=u(t;t_0,u_0)$。

接下来我们给定两度量稳定性的一些相关概念：等度稳定、一致稳定、等度吸引、一致吸引、等度渐进、一致渐进、等度渐进稳定和一致渐进稳定。

定义 2 设 $h_0,h \in \Gamma$，称系统(1)为：

(a) (h_0,h) 等度稳定的，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，$t_0 \in R_+$，存在一个在 t_0 时关于 ε 连续的正函数 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$，使得当 $h_0(t_0,x_0)<\delta_0$ 时，$h(t,x)<\varepsilon$，$t \ge t_0$；

(b) (h_0,h) 一致稳定的，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在一个关于 ε 的正函数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得当 $h_0(t_0,x_0)<\delta_0$ 时，$h(t,x)<\varepsilon$，$t \ge t_0$；

(c) (h_0,h) 等度吸引的，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，$t_0 \in R_+$，存在一个正函数 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$ 和 $T=(t_0,\varepsilon)$，使得当 $h_0(t_0,x_0)<\delta_0$ 时，$h(t,x)<\varepsilon$，$t \ge t_0+T$；

(d) (h_0,h) 一致吸引的，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在一个正函数 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 和 $T=(\varepsilon)$，使得当 $h_0(t,x)<\delta_0$ 时，$h(t,x)<\varepsilon$，$t \ge t_0+T$；

(e) (h_0,h) 等度渐进的，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，$\alpha>0$，$t_0 \in R_+$，存在一个正数 $T=T(t_0,\varepsilon,\alpha)$ 使得当 $h_0(t_0,x_0)<\alpha$ 时，$h(t,x)<\varepsilon$，$t \ge t_0+T$；

(f) (h_0,h) 一致渐进的，如果(e)中的 $T=T(\varepsilon,\alpha)$，即 T 与 t_0 无关；

(g) (h_0,h) 等度渐进稳定的，如果(a)和(c)同时成立；

(h) (h_0,h) 一致渐进稳定的，如果(b)和(d)同时成立。

为了证明本文的主要结果，我们给出“好于、一致好于、渐进好于”的概念，以及关于李雅普诺夫函数的一些相关定义。

定义 3 设 $h_0,h \in \Gamma$，我们称：

(a) h_0 好于 h，如果对于给定的 $r>0$ 和函数 $\phi \in P_K$，当 $h_0(t_0,x_0)<r$ 时，使得 $h(t,x)\le \phi(t,h_0(t,x))$；

(b) h_0 一致好于 h，如果对于给定的 $r>0$ 和函数 $\phi \in K$，当 $h_0(t_0,x_0)<r$ 时，使得 $h(t,x)\le \phi(h_0(t,x))$；

(c) h_0 渐进好于 h，如果对于给定的 $r>0$ 和函数 $\phi \in K$，当 $h_0(t_0,x_0)<r$ 时，使得 $h(t,x)\le \phi(h_0(t,x),t)$。

定义 4 设函数 $V \in C[R_+ \times S_\delta,R_+]$，$h_0,h \in \Gamma$ 我们称

(a) $V(t,x)$为h正定的，如果对给定的$r>0$和函数$\phi\in K$，当$h(t,x)\in S_\delta$时，使得$b(h(t,x))\le V(t,x)$；

(b) $V(t,x)$为h减少的，如果对给定的$r>0$和函数$\phi\in P_K$，当$h(t,x)\in S_\delta$时，使得$V(t,x)\le a(t,h(t,x))$；

(c) $V(t,x)$为h一致减少的，如果对给定的$r>0$和函数$\phi\in K$，当$h(t,x)\in S_\delta$时，$V(t,x)\le a(h(t,x))$。

定义 5 我们称函数$g(t,u):R_+\times R_+\to R_+$为关于$u$是上拟单调增的，如果对于$R$中的二元$v,w$，当有不等式$u\le wv$成立时，则有$g(t,u)\le g(t,w)v(t)$成立。

引理 2.1 [10]设有以下条件成立：

(i) 设函数$V:R_+\times S_\delta\to R_+$，$V(t,x)$关于$x$满足局部的李普希兹条件；

(ii) 对于$t\ge t_0$和$x\in E$，$D^+V(t,x)\le g(t,V(t,x(t)))$；其中

$$D^+V(t,x)=\lim_{h\to 0^+}\sup\frac{1}{h}\Big[V\big(t+h,x(t)+h(Qx)(t)\big)-V(t,x)\Big],$$

(iii) $r(t)=r(t;t_0,x_0)$是微分系统$u'=g(t,u)$，$u(t_0)=u_0\ge 0$，$t\ge t_0$的最大解，

则如果$x(t)=x(t;t_0,x_0)$，$t\ge t_0$是含有 causal 算子的微分系统$x'=(Qx)(t)$，$x(t_0)=x_0$，$t\ge t_0$的解，当$V(t_0,x_0)\le u_0$时，意味着$V(t,x(t))\le r(t;t_0,x_0)$，$t\ge t_0$。

引理 2.2 假设引理 2.1 中的条件都成立，此外：

(i) 对于$t\ge t_0$和$x\in E$，$D^+V(t,x)\le g(t,V(t,x(t)))$，$t\ne t_k$；

(ii) J_k是拟单调非减的，且$V(t,x+I_k(x))\le J_k(V(t,x(t)))$，$t=t_k$；

(iii) $r(t)=r(t;t_0,x_0)$是脉冲微分系统(2)在$t\ge t_0$上的最大解。

则如果$x(t)=x(t;t_0,x_0)$，$t\ge t_0$是含有 causal 算子的脉冲微分系统(1)的解，当$V(t_0,x_0)\le u_0$时，意味着$V(t,x(t))\le r(t;t_0,x_0)$，$t\ge t_0$。

证明：令$x(t)=x(t;t_0,x_0),t\ge t_0$是含有 causal 算子的脉冲微分系统(1)的任意解，我们定义$m(t)=V(t,x(t))$，容易得到

$$D^+m(t)\le g(t,m(t)),t\in[t_0,t_1] \tag{3}$$

因此，$m(t_0)=V(t_0,x(t_0))\le u_0$，由引理 2.1 可知$m(t)\le r^0(t,t_0,u_0)$，其中$r^0(t,t_0,u_0)$为脉冲微分系统(2)关于$r^0(t_0^+,t_0,u_0)=u_0$的最大解。由于$J_1$是拟单调非减的，由条件(ii)可知

$$m(t_1)\le J_1(m(t_1))\le r^0(t_1,t_0,u_0)=u_1^+ \tag{4}$$

其中$u_1^+\le J_1(r^0(t_1,t_0,u_0))$，由(3)和(4)以及引理 2.1 可得

$$m(t)\le r^1(t,t_1,u_1^+),\ t\in(t_1,t_2]$$

其中$r^1(t,t_0,u_0)$为脉冲微分系统(2)关于$r^1(t_1^+,t_1,u_1^+)=u_1$的最大解，重复这个过程我们就可以得到

$$m(t)\le r^k(t,t_k,u_k^+),\ t\in(t_k,t_{k+1}]$$

其中$r^k(t,t_k,u_k^+)=u_k^+$，$k=0,1,2,\cdots$定义

$$u(t)=\begin{cases}u_0, & t=t_0\\ r^0(t,t_0,u_0), & t\in(t_0,t_1]\\ r^1(t,t_1,u_1^+), & t\in(t_1,t_2]\\ \vdots & \\ r^k(t,t_k,u_1^k), & t\in(t_k,t_{k+1}]\end{cases}$$

显然，$u(t)$是脉冲微分系统(2)的解，且$m(t)\le r(t,t_0,u_0)$，$t\ge t_0$，因此有

$$V(t,x(t)) \le r(t;t_0,x_0),\ t \ge t_0.$$

3. 主要结果

下面利用上述引理给出本文的主要结果，即含有 causal 算子的脉冲微分方程的两度量稳定性判据。

定理 3.1 设定理 2.2 中的条件均成立，进一步假设

(i) 设 $h_0, h \in \Gamma$， h_0 (一致)细于 h；

(ii) $V: R_+ \times S_\delta \to R_+$， V 是 h_0 (一致)减少的，h 正定的；

若系统(2)的解等度(一致)稳定的，则系统的(1)的解是 (h_0, h) 等度(一致)稳定的。

证明：已知由条件(i)知 h_0 (一致)细于 h，则存在 $\delta_0 > 0$， $\phi \in P_K$ $(\phi \in K)$ 使得当 $h_0(t,x) < \delta_0$ 时，

$$h(t,x) \le \phi(t, h_0(t,x)) \ (\phi(h_0(t,x))) \tag{5}$$

由条件(ii) $V: R_+ \times S_\delta \to R_+$ 是 h_0 (一致)减少的，则存在 $\delta_1 > 0$， $a \in P_K$ $(a \in K)$，当 $h_0(t,x) < \delta_1$ 时，

$$V(t,x) \le a(t, h_0(t,x)) \ (V(t,x) \le a(h_0(t,x))) \tag{6}$$

又由于 V 是 h 正定的，则存在 $\delta_2 > 0, b \in K$，使得当 $h(t,x) < \delta_2$ 时，

$$b(h(t,x)) \le V(t,x) \tag{7}$$

若系统(2)的解等度(一致)稳定，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_3(t_0,\varepsilon) > 0$ $(\delta_3(\varepsilon) > 0)$，当 $u_0 < \delta_3$，

$$|u| < b(\varepsilon) \tag{8}$$

由 $\phi \in K$ 可知存在 $\delta_4 > 0$，使得 $\phi(\delta_4) < \delta_2$， $a(\delta_4) < b(\delta_4)$。

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$，当 $h_0(t_0,x_0) < \delta$ 时，由(5)~(8)可得

$$b(h(t_0,x_0)) \le V(t_0,x_0) \le a(h_0(t_0,x_0)) < b(\varepsilon) \tag{9}$$

故我们可得 $h(t_0,x_0) < \varepsilon$，从而 $h(t,x) < \varepsilon$， $t > t_0$，如若不然，假设系统(2)存在解 $x(t) = x(t,t_0,x_0)$，$t^* > t_0$， $t^* \in (t_{k-1}, t_k]$ 使得

$$h(t,x(t)) < \varepsilon, t_0 \le t \le t^* \tag{10}$$

令 $u_0 = V(t_0,x_0)$，故由(9)~(10)以及引理 2.2 得 $b(\varepsilon) \le b(h(t^*,x^*)) \le V(t^*,x^*) \le r(t^*,t_0,y_0) < b(\varepsilon)$ 矛盾，从而有 $h(t,x) < \varepsilon$， $t > t_0$ 成立。

综上所述，系统(2)的解是等度 (h_0,h) (一致)稳定的。

4. 结论

本文主要研究了含有 causal 算子的脉冲微分方程的两度量稳定性，由于含有 causal 算子的微分方程统一了诸如常微分方程、积分微分方程、有限或无限时滞微分方程、Volterra 积分方程和中立性微分方程等，因此本文研究的方程更具有一般性。另外，两度量稳定性统一了部分已知的稳定性和有界性的概念，故本文较之前的研究具有更广泛的意义。

基金项目

河北省高等学校科学技术研究“含 causal 算子的非线性微分方程解的性态分析”(QN2020507)。

参考文献

[1] 廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000: 4, 67-70.

[2] 彭临平. 具有扰动的脉冲微分系统的稳定性[J]. 山西大学学报(自然科学版), 1994, 17(1): 5-8.

[3] Lakshmikantham, V. and Liu, X.Z. (1998) Stability for Impulsive Differential Systems in Terms of Two Measures, *Applied Mathematics and Computation*, **29**, 89-98.

[4] 鲍俊艳, 高春霞, 周彩丽. 脉冲微分方程的两度量实用稳定性[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(9): 166-171.

[5] 田淑环. 时间尺度上脉冲微分系统的两度量稳定性[J]. 保定学院学报, 2011, 24(3): 12-14.

[6] Liu, C., Liu, X., Yang, Z., Yang, H. and Huang, J. (2022) New Stability Results of Generalized Impulsive Functional Differential Equations. Science China. *Information Sciences*, **65**, 244-246. https://doi.org/10.1007/s11432-019-2711-4

[7] Bao, J.Y., Wang, P.G. and Li, Y. (2020) Practical Stability and Integral Stability for Singular Differential Systems with Maxima. *Mathematical Problems in Engineering*, **2020**, Article ID 4792183. https://doi.org/10.1155/2020/4792183

[8] Wang, P.G. and Bao, J.Y. (2020) Asymptotic Stability of Neutral Set-Valued Functional Differential Equation by Fixed Point Method. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2020**, Article ID 6569308. https://doi.org/10.1155/2020/6569308

[9] Mchiri, L., Mohsen, B. and Caraballo, T. (2022) η-Stability of Hybrid Neutral Stochastic Differential Equations with Infinite Delay. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **32**, 1973-1989. https://doi.org/10.1002/rnc.5931

[10] Lakshmikantham, V., Leela, S., Drici, Z. and McRae, F.A. (2009) Theory of Causal Differential Equations. World Scientific, Singapore.