Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(1), 15-23
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.131002

Bernoulli泛函空间中截断计数算子的时间算子

杨 婷, 张丽霞, 王才士*

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年12月4日；录用日期：2023年1月5日；发布日期：2023年1月13日

摘 要

本文利用自伴算子的时间算子理论，初步构造了Bernoulli 泛函空间中与量子Bernoulli 噪声有密切联系的计数算子其截断算子的时间算子，且证明该时间算子并不唯一。

关键词

计数算子，时间算子，量子Bernoulli 噪声

The Time Operator of the Truncation Operator of the Number Operator Acting on Bernoulli Functional

Ting Yang, Lixia Zhang, Caishi Wang*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 4th, 2022; accepted: Jan. 5th, 2023; published: Jan. 13th, 2023

* 通讯作者。

文章引用: 杨婷, 张丽霞, 王才士. Bernoulli泛函空间中截断计数算子的时间算子[J]. 理论数学, 2023, 13(1): 15-23.
DOI: 10.12677/pm.2023.131002

Abstract

In this paper, using the time operator theory of self-adjoint operator, we construct the time of the truncation operator of the number operator acting on Bernoulli functional which is closely related to the quantum Bernoulli noise and prove that the the time operator is not unique.

Keywords

Number Operator, Time Operator, Quantum Bernoulli Noise

1. 引言

Bernoulli 泛函是一类重要的泛函 [1], 在数学和物理的许多领域中得到广泛的应用. 定义在Bernoulli 泛函空间上的计数算子在建立Ornstein-Uhlenbeck 半群中扮演着重要的角色 [2]. 它不仅是自伴算子, 而且与量子Bernoulli 噪声有着密切的联系, 能与量子Bernoulli 噪声构造与之相关的Markov 半群 [3], 体现了十分重要的物理意义.

"时间算子" 一词来自于量子理论背景, 在经典相对论力学中, 时间是每个洛伦兹坐标中能量的典则共轭变量 [4]. 但是我们注意到这个名称有一定的误导性, 因为在通常的量子理论中, 时间并不能被观测到, 而是当一个量子事件被观测到时, 所需时间的参数. 过去很长一段时间内, 人们普遍认为在量子理论中不存在时间算子 [5]. 1961 年, Aharonov 和Bohm 构造了一维Hamiltonian H 的时间算子 [6], 2000 年, Asao Arai 等人讨论了具有非退化特征值的Hamiltonian H 的时间算子的存在性 [7]. 2008 年, Asao Arai 在文献 [7]中讨论了M-退化且具有有限维特征子空间的Hamiltonian H 具有时间算子的充分和必要条件. 受文献 [7]中具有离散特征值的Hamiltonian 的时间算子构造的启发, 本文考虑Bernoulli 泛函空间中截断计数算子的时间算子. 本文的组织结构如下: 在第二节中, 首先回忆了Bernoulli 泛函空间和计数算子. 接下来, 介绍了时间算子的定义. 第三节构造了Bernoulli 泛函空间中截断计数算子的时间算子, 并证明该时间算子并不唯一.

2. 预备知识

本节简要介绍关于量子Bernoulli 泛函空间, 计数算子和时间算子的定义, 记号和相关结果, 详细内容详见文献 [3] [8] [9]和 [10].

设$\mathbb{N}$ 表示非负整数集, $\mathbb{C}$ 表示复数集, Γ 为$\mathbb{N}$ 的有限幂集, 即$\Gamma = \{\sigma \mid \Gamma \in \mathbb{N}, \#\sigma < \infty\}$, 其中, $\#(\sigma)$ 指集合σ 的基数. $\mathrm{Dom}\, B$ 表示算子B 的定义域, B^* 表示B 的共轭算子.

给定一个完备的概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 设$Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ 是$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一列独立的随机变量, 满足条件:

$$\mathbb{P}\{Z_n = \varepsilon_n\} = \theta_n, \mathbb{P}\{Z_n = \frac{-1}{\varepsilon_n}\} = 1 - \theta_n, \quad n \geq 0$$

其中$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{1-\theta_n}{\theta_n}}, 0 < \theta_n < 1$. $\mathcal{F} = \sigma(Z_n, n \in \mathbb{N})$ 是$Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ 生成的σ-代数. 由文献 [8]知, $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ 是$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的离散时间Bernoulli 噪声.

设$\mathfrak{h}$ 表示平方可积Bernoulli 泛函空间, 即

$$\mathfrak{h} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}). \tag{1}$$

定义$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为空间$\mathfrak{h}$ 上的内积, 并约定$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 关于第一个变量共轭线性, 关于第二个变量线性, $\|\cdot\|$ 为相应的范数. 由文献 [1]可知Z 具有混沌表示性质, 从而$\{Z_\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$ 是$\mathfrak{h}$ 的典则标准正交基, 其中$Z_\emptyset = 1$,

$$Z_\sigma = \prod_{j\in\sigma} Z_j, \quad \sigma \in \Gamma, \sigma \neq \emptyset. \tag{2}$$

这就表明$\mathfrak{h}$ 是一个无穷维的复Hilbert 空间.

对每个非负整数$k \geq 0$, 在空间$\mathfrak{h}$ 上存在有界算子$\partial_k \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, 满足$\|\partial_k\| = 1$ 且

$$\partial_k Z_\sigma = \mathbf{1}_\sigma(k) Z_{\sigma\setminus k}, \quad \partial_k^* Z_\sigma = [1 - \mathbf{1}_\sigma(k)] Z_{\sigma\cup k}, \quad \sigma \in \Gamma, \tag{3}$$

其中∂_k^* 表示∂_k 的共轭算子, $\sigma \setminus k = \sigma \setminus \{k\}$, $\sigma \cup k = \sigma \cup \{k\}$, 且$\mathbf{1}_\sigma(k)$ 是σ 作为集合$\mathbb{N}$ 的子集的示性函数.

算子∂_k 及其共轭算子∂_k^* 称为作用于Bernoulli 泛函的湮灭算子和增生算子, 且算子族$\{\partial_k, \partial_k^*\}_{k\geq 0}$ 称为量子Bernoulli 噪声 [8].

量子Bernoulli 噪声满足等时典则反交换关系(CAR), 即

$$\partial_k \partial_l = \partial_l \partial_k, \quad \partial_k^* \partial_l^* = \partial_l^* \partial_k^*, \quad \partial_k^* \partial_l = \partial_l \partial_k^* \quad (l, k \geq 0, k \neq l), \tag{4}$$

且

$$\partial_k \partial_k = \partial_k^* \partial_k^* = 0, \quad \partial_k \partial_k^* + \partial_k^* \partial_k = I, \tag{5}$$

其中I 是$\mathfrak{h}$ 上的单位算子.

在$\mathfrak{h}$ 中定义线性算子N

$$\mathrm{Dom}\, N = \{\xi \in \mathfrak{h} \mid \sum_{\sigma\in\Gamma} (\#\sigma)^2 |\langle Z_\sigma, \xi\rangle|^2 < \infty\}, \tag{6}$$

$$N\xi = \sum_{\sigma\in\Gamma} \#\sigma \langle Z_\sigma, \xi\rangle Z_\sigma, \ \ \xi \in \mathrm{Dom}\, N, \tag{7}$$

其中$\#\sigma$ 表示集合σ 的基数.

定义1 由(6) 和(7) 定义的算子N 叫做作用在Bernoulli 泛函上的计数算子.

由文献 [3] 可得, 对任意的$\xi, \eta \in \mathrm{Dom}\, N$, $\sum_{k=0}^{\infty} \langle \partial_k \xi, \partial_k \eta \rangle$ 是绝对收敛的, 并且有

$$\langle \xi, N\eta \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \partial_k \xi, \partial_k \eta \rangle. \tag{8}$$

从而对任意的$\xi, \eta \in \mathrm{Dom}\, N$, 有

$$\langle \xi, N\eta \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \xi, \partial_k^* \partial_k \eta \rangle, \tag{9}$$

这表明可以将计数算子N 表示为$N = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_k^* \partial_k$.

下面给出时间算子的定义, 详细内容参考文献 [10].

设$\mathcal{H}$ 是Hilbert 空间, H 是$\mathcal{H}$ 上的自伴算子, T 是$\mathcal{H}$ 上的对称算子, 若存在$\mathcal{H}$ 的子空间$\mathcal{D} \neq \{0\}$ (不一定稠密), 使得$\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}\ (TH) \bigcap \mathrm{Dom}\ (HT)$ 且在$\mathcal{D}$ 上满足典则交换关系(CCR)

$$[T, H] := TH - HT = i, \tag{10}$$

则称T 为H 的一个时间算子, 或称T 为H 的典则共轭, 其中子空间$\mathcal{D}$ 是算子对(T, H) 的CCR-域, i 是虚单位算子.

3. 主要结果

本节主要考虑截断计数算子的时间算子及其相关结论.

设$\mathfrak{h}_n = \mathrm{Span}\{Z_\sigma \mid \sigma \in \Gamma_n\}$, 其中$\Gamma_n = \{\sigma \mid \sigma \subset \{0, 1, 2, \cdots, n\}\}$, n 为非负整数. 显然$\mathfrak{h}_n \subset \mathfrak{h}$, 且$\{Z_\sigma \mid \sigma \in \Gamma_n\}$ 是有限维Hilbert 空间$\mathfrak{h}_n$ 的一个标准正交基. 取算子N_n 为计数算子N 的截断算子, 即

$$N_n = \sum_{k=0}^{n} \partial_k^* \partial_k. \tag{11}$$

定理1 对于任意非负整数$n \geq 0$, N_n 是$\mathfrak{h}_n$ 上的有界自伴算子.

证明 设$\xi \in \mathfrak{h}_n$, 我们有

$$\|N_n \xi\|^2 = \Big\| \sum_{\sigma \in \Gamma_n} \langle Z_\sigma, \xi \rangle N_n Z_\sigma \Big\|^2 = \Big\| \sum_{\sigma \in \Gamma_n} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_\sigma(k) \langle Z_\sigma, \xi \rangle Z_\sigma \Big\|^2 \leq \sum_{\sigma \in \Gamma_n} \Big| \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_\sigma(k) |^2 |\langle Z_\sigma, \xi \rangle \Big|^2 \leq (n+1)^2 |\langle Z_\sigma, \xi \rangle|^2 = (n+1)^2 \|\xi\|^2,$$

则$\|N_n\| \leq n+1$, 从而N_n 是有界的. 下证算子N_n 是对称的.

$$\begin{aligned}\langle N_nZ_\sigma,\xi\rangle =&\Big\langle N_n\sum_{\tau\in\Gamma_n}\langle Z_\tau,Z_\sigma\rangle Z_\tau,\xi\Big\rangle = \Big\langle \sum_{\tau\in\Gamma_n}\langle Z_\tau,Z_\sigma\rangle N_nZ_\tau,\xi\Big\rangle = \\ &\Big\langle \sum_{\tau\in\Gamma_n}\#_n\tau\langle Z_\tau,Z_\sigma\rangle Z_\tau,\xi\Big\rangle = \langle \#_n\sigma Z_\sigma,\xi\rangle = \langle Z_\sigma,\#_n\sigma\xi\rangle = \\ &\Big\langle Z_\sigma,\#_n\sigma\sum_{\sigma\in\Gamma_n}\langle Z_\sigma,\xi\rangle Z_\sigma\Big\rangle = \Big\langle Z_\sigma,\sum_{\sigma\in\Gamma_n}\#_n\sigma\langle Z_\sigma,\xi\rangle Z_\sigma\Big\rangle = \\ &\Big\langle Z_\sigma,\sum_{\sigma\in\Gamma_n}\langle Z_\sigma,\xi\rangle N_nZ_\sigma\Big\rangle = \langle Z_\sigma,N_n\xi\rangle.\end{aligned}$$

综上, N_n 是有界自伴算子. □

定理2 对于$\mathfrak{h}_n$ 上的算子N_n,

$$\sigma(N_n)=\{0,1,2,\cdots,n+1\},$$

且各特征值的重数依次为$C^0_{n+1},\cdots,C^k_{n+1},\cdots,C^{n+1}_{n+1}$.

证明 由(7) 式和(11) 式可知

$$N_nZ_\sigma=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{1}_\sigma(k)Z_\sigma=\#_n(\sigma)Z_\sigma,$$

其中$\#_n(\sigma)=\sum_{k=0}^n\mathbf{1}_\sigma(k)$. 由于$Z_\sigma$ 是$\mathfrak{h}_n$ 的一个标准正交基, 则由上式可知, $\#_n(\sigma)$ 是N_n 的特征值, Z_σ 为特征值$\#_n(\sigma)$ 对应的特征向量. 又N_n 是$\mathfrak{h}_n$ 上的有界线性算子, 从而N_n 只有纯点谱, 故$\sigma(N_n)=\{0,1,2,\cdots,n+1\}$. 下证$N_n$ 特征值的重数.

根据特征值重数的定义可知, 特征值λ 的重数m 等于其特征子空间的维数, 即$m=\dim\Big\{\mathrm{Span}\{Z_\sigma\mid\sigma\in\Gamma_n\}\Big\}$. 于是, 当$\#_n(\sigma)=0$, 即$\sigma=\emptyset$, 特征值0 的重数$m=\dim\Big\{\mathrm{Span}\{Z_\emptyset\}\Big\}=C^0_{n+1}=1$, 当$\#_n(\sigma)=1$, 特征值1 的重数$m=\dim\Big\{\mathrm{Span}\{Z_\sigma\mid\sigma\in\Gamma_n\}\Big\}=C^1_{n+1}$, 同理, 当$\#_n(\sigma)=2$, 特征值2 的重数$m=C^2_{n+1}$, 以此类推, 当$\#_n(\sigma)=k$, 特征值$k$ 对应的重数$m=C^k_{n+1}, k\in\{0,1,2,\cdots,n+1\}$. 从而, 特征值$0,\cdots,k,\cdots,n+1$ 的重数依次为$C^0_{n+1},\cdots,C^k_{n+1},\cdots,C^{n+1}_{n+1}$. □

因为Γ 是可数无穷维的, 可表示$\{Z_\sigma\mid\sigma\in\Gamma\}$ 为$(e_j)_{n\geq1}$, 使得

$$\{e_1,e_2,\ldots,e_{j^n}\}=\{Z_\sigma\mid\sigma\in\Gamma_n\},n\geq1$$

其中$j^n=2^{n+1}$, 则对每个$n\geq1$ 有

$$\mathfrak{h}_n=\mathrm{Span}\{e_1,e_2,\cdots,e_{j^n}\},\quad j^n=2^{n+1},$$

因此, $\{e_1,e_2,\cdots,e_{j^n}\}$, $j^n=2^{n+1}$ 是$\mathfrak{h}_n$ 的一个标准正交基.

为了方便计算, 设$\{E_k\}_{k=0}^{n+1}$ 表示N_n 的特征值, $\{e_{km}\mid k\in(0,1,\ldots,n+1),m\in(1,2,\ldots,M_k)\}$ 表示特征值E_k 所对应的特征向量, 其中m 表示特征值E_k 的重数, $M_k=\max\{C^k_{n+1}\mid k=0,\cdots,n+1\}$. 由此可得$N_ne_{km}=E_ke_{km}$.

令$\overline{e}_k=\frac{1}{\sqrt{M_k}}\sum_{m=1}^{M_k}e_{km}$, 则$N_n\overline{e}_{km}=E_k\overline{e}_{km}$, 显然$\{\overline{e}_k\}$ 也是$\mathfrak{h}_n$ 的标准正交系, $\langle\overline{e}_k,\overline{e}_l\rangle=\delta_{kl}$. 其

中δ_{kl} 为Dirac 函数. 下面定义$\mathfrak{h}_n$ 上的线性算子T_n 如下:

$$T_n\varphi := i\sum_{k=1}^{n+1}(\sum_{l\neq k}^{n+1}\frac{\langle\overline{e}_l,\varphi\rangle}{E_k-E_l})\overline{e}_k, \tag{12}$$

记

$$\|T_n\varphi\|^2 = \sum_{k=0}^{n+1}\left|\sum_{l\neq k}^{n+1}\frac{\langle\overline{e}_l,\varphi\rangle}{E_k-E_l}\right|^2. \tag{13}$$

对一个子集$D\subset\mathcal{H}$, Span$\{D\}$ 是由D 中的有限多个向量的线性组合张成的线性子空间, 下面令

$$\mathcal{D}_0 = \mathrm{Span}\Big\{\overline{e}_k-\overline{e}_l \mid k,l\in\{0,1,\cdots,n+1\}\Big\}\subset\mathfrak{h}_n. \tag{14}$$

定理3 算子$\hat{T}_n := T_n|_{\mathcal{D}_0}$ 是对称的.

证明 只需证对任意的$\varphi\in\mathcal{D}_0$, 有$\langle\varphi,\hat{T}_n\varphi\rangle$ 是实的即可.

$$\begin{aligned}\langle\varphi,\hat{T}_n\varphi\rangle =&\Big\langle\varphi, i\sum_{k=0}^{n+1}(\sum_{l\neq k}^{n+1}\frac{\langle\overline{e}_l,\varphi\rangle}{E_k-E_l})\overline{e}_k\Big\rangle = \\ & i\sum_{k=0}^{n+1}\langle\varphi,\overline{e}_k\rangle\sum_{l\neq k}^{n+1}\frac{\langle\overline{e}_l,\varphi\rangle}{E_k-E_l}, \\ \langle\varphi,\hat{T}_n\varphi\rangle^* =& i\sum_{k=0}^{n+1}\langle\overline{e}_k,\varphi\rangle\sum_{l\neq k}^{n+1}\frac{\langle\varphi,\overline{e}_l\rangle}{E_k-E_l}) = \\ & \sum_{l=0}^{n+1}\langle\varphi,\overline{e}_l\rangle\sum_{l\neq k}^{n+1}\frac{\langle\overline{e}_k,\varphi\rangle}{E_l-E_k} = \langle\varphi,\hat{T}_n\varphi\rangle,\end{aligned}$$

从而$\langle\varphi,\hat{T}_n\varphi\rangle$ 是实的. □

下面的定理证明$\hat{T}_n$ 是N_n 的时间算子.

定理4 对称算子T_n 是N_n 的一个时间算子, 其中$\mathcal{D}_0$ 是$(\hat{T}_n,N_n)$ 的CCR-域. 即$\mathcal{D}_0\subset\mathrm{Dom}(\hat{T}_nN_n)\cap\mathrm{Dom}(N_n\hat{T}_n)$ 且有

$$[\hat{T}_n,N_n] = i,\ \ \forall\varphi\in\mathcal{D}_0. \tag{15}$$

证明 由于$N_n,\hat{T}_n$ 是$\mathfrak{h}_n$ 上的有界线性算子, 显然$\mathcal{D}_0$ 是$(\hat{T}_n,N_n)$ 的CCR- 域, 即$\mathcal{D}_0\subset\mathrm{Dom}(\hat{T}_nN_n)\cap\mathrm{Dom}(N_n\hat{T}_n)$. 下证对任意的$\varphi\in\mathcal{D}_0$, $[\hat{T}_n,N_n]=i$.

令$\varphi_{kl}=\overline{e}_k-\overline{e}_l$, 有

$$\hat{T}_n\overline{e}_k = i\sum_{p=0}^{n+1}(\sum_{q\neq p}^{n+1}\frac{\langle\overline{e}_q,\overline{e}_k\rangle}{E_p-E_q})\overline{e}_p = i\sum_{p\neq k}^{n+1}\frac{1}{E_p-E_k}\overline{e}_p.$$

于是, 通过仔细的计算,可得

$$\begin{aligned}\hat{T}_n\varphi_{kl} =&\hat{T}_n(\overline{e}_k-\overline{e}_l) = \\ & i\sum_{p\neq k}^{n+1}\frac{1}{E_p-E_k}\overline{e}_p - i\sum_{p\neq l}^{n+1}\frac{1}{E_p-E_l}\overline{e}_p = \\ & i\frac{1}{E_l-E_k}\overline{e}_l + i\sum_{p\neq k,l}^{n+1}\frac{1}{E_p-E_k}\overline{e}_p - (i\frac{1}{E_k-E_l}\overline{e}_k + i\sum_{p\neq l,k}^{n+1}\frac{1}{E_p-E_l}\overline{e}_p) = \\ & i\frac{1}{E_l-E_k}\overline{e}_l - i\frac{1}{E_k-E_l}\overline{e}_k + i\sum_{p\neq k,l}^{n+1}\frac{1}{E_p-E_k}\overline{e}_p - i\sum_{p\neq l,k}^{n+1}\frac{1}{E_p-E_l}\overline{e}_p = \\ & i\sum_{p\neq k,l}^{n+1}(\frac{1}{E_p-E_k}-\frac{1}{E_p-E_l})\overline{e}_p + \frac{i}{E_l-E_k}\overline{e}_l - \frac{i}{E_k-E_l}\overline{e}_k = \\ & i(E_k-E_l)\sum_{p\neq k,l}^{n+1}\frac{1}{(E_p-E_k)(E_p-E_l)}\overline{e}_p + \frac{i}{E_l-E_k}\overline{e}_l - \frac{i}{E_k-E_l}\overline{e}_k,\end{aligned}$$

进一步地,

$$\begin{aligned}N_n\hat{T}_n\varphi_{kl} =&N_n[i(E_k-E_l)\sum_{p\neq k,l}^{n+1}\frac{1}{(E_p-E_k)(E_p-E_l)}\overline{e}_p + \frac{i}{E_l-E_k}\overline{e}_l - \frac{i}{E_k-E_l}\overline{e}_k] = \\ & i(E_k-E_l)\sum_{p\neq k,l}^{n+1}\frac{1}{(E_p-E_k)(E_p-E_l)}E_p\overline{e}_p + \frac{i}{E_l-E_k}E_l\overline{e}_l - \frac{i}{E_k-E_l}E_k\overline{e}_k.\end{aligned}$$

另一方面,

$$N_n\varphi_{kl} = E_k\overline{e}_k - E_l\overline{e}_l,$$

进而,

$$\begin{aligned}\hat{T}_nN_n\varphi_{kl} =&\hat{T}_n(E_k\overline{e}_k - E_l\overline{e}_l) = E_k\hat{T}_n\overline{e}_k - E_l\hat{T}_n\overline{e}_l = \\ & E_ki\sum_{p\neq k}^{n+1}\frac{1}{E_p-E_k}\overline{e}_p - E_li\sum_{p\neq l}^{n+1}\frac{1}{E_p-E_l}\overline{e}_p = \\ & iE_k(\sum_{p\neq k,l}^{n+1}\frac{1}{E_p-E_k}\overline{e}_p + \frac{1}{E_l-E_k}\overline{e}_k) - iE_l(\sum_{p\neq l,k}^{n+1}\frac{1}{E_p-E_l}\overline{e}_p + \frac{1}{E_k-E_l}\overline{e}_l) = \\ & i(E_k-E_l)\sum_{p\neq k,l}^{n+1}\frac{E_p}{(E_p-E_k)(E_p-E_l)}\overline{e}_p + \frac{i}{E_l-E_k}E_k\overline{e}_l - \frac{i}{E_k-E_l}E_l\overline{e}_k.\end{aligned}$$

综合上述关系, 可得

$$N_n\hat{T}_n\varphi_{kl} - \hat{T}_nN_n\varphi_{kl} = i\varphi_{kl},$$

这意味着对任意的$\varphi\in\mathcal{D}_0$, $N_n\hat{T}_n - \hat{T}_nN_n = i$. 综上, $\hat{T}_n$ 是N_n 的时间算子. □

定理5 通过对称扰动,讨论N_n 的时间算子并不是唯一的.

定理5 设T_1 是$\mathfrak{h}_n$ 上的对称算子, 满足$\mathcal{D}_0 \subset \mathrm{Dom}(T_1N_n) \cap \mathrm{Dom}(N_nT_1)$, 并且对任意的$\varphi \in \mathcal{D}_0$, 有$T_1N_n\varphi = N_nT_1\varphi$, 即$[T_1, N_n] = 0$, 则$\hat{T}_n + T_1$ 是N_n 的时间算子.

证明 显然$\mathcal{D}_0$ 是$(\hat{T}_n + T_1, N_n)$ 的CCR-域. 通过简单计算可得

$$\begin{aligned}[T_n + T_1, N_n] =& (\hat{T}_n + T_1)N_n - N_n(\hat{T}_n + T_1) = \\ & \hat{T}_nN_n + T_1N_n - N_n\hat{T}_n - N_nT_1 = i.\end{aligned}$$

于是, $\hat{T}_n + T_1$ 是N_n 的时间算子. □

基金项目

国家自然科学基金项目(No. 12261080).

参考文献

[1] Privault, N. (2008) Stochastic Analysis of Bernoulli Processes. *Probability Surveys*, **5**, 435-483. https://doi.org/10.1214/08-PS139

[2] Wang, C.S., Lu, Y.C. and Chai, H.F. (2011) An Alternative Approach to Privault's Discrete-Time Chaotic Calculus. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **373**, 643-654. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.08.021

[3] Wang, C.S. and Chen, J.S. (2016) Quantum Markov Semigroups Constructed from Quantum Bernoulli Noises. *Journal of Mathematical Physics*, **57**, Article ID: 023502. https://doi.org/10.1063/1.4939920

[4] Arai, A. and Matsuzawa, Y. (2008) Time Operators of a Hamiltonian with Purely Discrete Spectrum. *Reviews in Mathematical Physics*, **20**, 951-978. https://doi.org/10.1142/S0129055X08003481

[5] Pauli, W. (2012) General Principles of Quantum Mechanics. Springer Science Business Media, Berlin.

[6] Aharonov, Y. and Bohm, D. (1961) Time in the Quantum Theory and the Uncertainty Relation for Time and Energy. *Physical Review*, **122**, 1649-1658. https://doi.org/10.1103/PhysRev.122.1649

[7] Arai, A. (2009) Necessary and Sufficient Conditions for a Hamiltonian with Discrete Eigenvalues to Have Time Operators. *Letters in Mathematical Physics*, **87**, 67-80. https://doi.org/10.1007/s11005-008-0286-z

[8] Wang, C.S., Chai, H.F. and Lu, Y.C. (2010) Discrete-Time Quantum Bernoulli Noises. *Journal of Mathematical Physics*, **51**, Article ID: 053528. https://doi.org/10.1063/1.3431028

[9] Wang, C.S. and Ye, X.J. (2016) Quantum Walk in Terms of Quantum Brnoulli Noises. *Quantum Information Process*, **15**, 1897-1908. https://doi.org/10.1007/s11128-016-1259-2

[10] Arai, A. (2020) Inequivalent Representations of Canonical Commutation and Anti-Commutation Relations: Representation-theoretical Viewpoint for Quantum Phenomena. Springer Nature, Berlin.