Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 2737-2743
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310281

Hans汉斯

关于三类基本初等函数的拉格朗日中值点的渐近性

张传芳，杨春玲

广东石油化工学院理学院，广东 茂名

收稿日期：2023年8月30日；录用日期：2023年9月30日；发布日期：2023年10月7日

摘　要

本文讨论了三种基本初等函数的拉格朗日中值点的渐近性问题，结果表明：除幂函数当区间左端点为0时，中值取定值外，其余情况的幂函数、指数函数、对数函数当区间右端点趋向于区间左端点时，拉格朗日中值点均趋向于区间中点。

关键词

渐近性，中值点，拉格朗日中值定理，基本初等函数

On the Asymptotic Property of the Mediate Point in the Lagrange's Mean Value Theorem of Three Basic Elementary Functions

Chuanfang Zhang, Chunling Yang

School of Science, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming Guangdong

Received: Aug. 30th, 2023; accepted: Sep. 30th, 2023; published: Oct. 7th, 2023

Abstract

In this paper, the asymptotic behavior of the Lagrange median points of three basic elementary functions is discussed. The results show that, except for the power functions where the left end-

文章引用: 张传芳, 杨春玲. 关于三类基本初等函数的拉格朗日中值点的渐近性[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 2737-2743.
DOI: 10.12677/pm.2023.1310281

point of the interval is 0 and the median value is fixed, the power functions, exponential functions, and logarithmic functions of median points tend to the midpoint of the interval, when the right endpoint of the interval tends to the left endpoint.

Keywords

Asymptotic Property, Median Point, Lagrange's Mean Value Theorem, Basic Elementary Functions

1. 引言

在高等数学中微分中值定理的重要性是不言而喻的，它们是沟通函数与其导数关系的桥梁，是讨论导数应用的理论基础。但微分中值定理中只肯定了中值点的存在性，没有给出中值点的数量、位置等信息。当然，这并不影响其重要的应用价值。关于微分中值定理的中值点的渐近性始于 1982 年 AlfonsoG. Azpeitia 在文献[1]中对带有拉格朗日型余项的泰勒定理中的中值点的渐近性的研究。此后，有许多学者对该问题进行了改进和推广，如文献[2]-[7]考虑了柯西中值定理的中值点的渐近性，文献[8] [9]讨论了高阶拉格朗日中值定理的中值点的渐近性问题。现将文献中与本文有关的结论列举如下：

泰勒定理[1] [10] [11] [12]若 $f(x)$ 在点 r 的某邻域 $U(r)$ 内有 n 阶导数，则 $\forall x \in \overset{\circ}{U}(r)$，$\exists \xi$ 介于 r 与 x 之间，使得

$$f(x)=f(r)+f'(r)(x-r)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(r)(x-r)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-r)^{n}.$$

定理 1 [1]设在点 r 的某邻域 $U(r)$ 内 $f^{(n+p)}(x)(n\geq 1, p\geq 1)$ 存在且在 r 点连续，$f^{(n+j)}(r)=0(1\leq j<p)$，$f^{(n+p)}(r)\neq 0$，则对于泰勒定理中的 ξ 有

$$\lim_{x\to r}\frac{\xi-r}{x-r}=\left(C_{n+p}^{n}\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

记：$\theta=\dfrac{\xi-r}{x-r}$，则 $0<\theta<1$ 且 θ 与 x 有关，即 $\theta=\theta(x)$，此时(1)式可改为

$$\lim_{x\to r}\theta=\left(C_{n+p}^{n}\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

众所周知，拉格朗日中值定理是泰勒定理当 $n=1$ 时的特殊情况：

拉格朗日中值定理[10] [11] [12]设函数 $f(t)$ 在 $[r,x]$ 上连续，在 (r,x) 内可导，则存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)(x-r)=f'(r+\theta(x-r))(x-r)=f(x)-f(r). \tag{3}$$

推论 1 [1] [2] [3]当 $n=p=1$ 时，则(2)式化为

$$\lim_{x\to r}\theta=\frac{1}{2}. \tag{4}$$

上式表明，随着区间长度无限地缩短，中值点越来越接近于区间的中点[2]。

定理 2 [4] [5] [6] [7] [13] [14]设函数 $f(t)$ 在点 r 的某邻域 $U(r)$ 内具有直到 n 阶导数，$f^{(n)}(t)$ 在 r 点连续，且 $f^{(i)}(r)=0(i=2,3,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(r)\neq 0$，则(3)式中的中值点 θ 满足

$$\lim_{x\to r}\theta=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{5}$$

特别需要强调：条件 $f^{(n)}(r)\neq 0$ 是不可缺少的[1] [2] [3]。文献[1] [2] [3]中均有实例表明当条件 $f^{(n)}(r)\neq 0$ 不成立时，该定理的结论不一定成立。本文旨在考虑三类基本初等函数——幂函数、指数函数、对数函数的拉格朗日中值点的渐近性问题，其中仅有幂函数在区间左端点为零时满足定理 2 条件，其余情形并不满足该定理条件，而指数函数和对数函数在任何区间上均不满足定理 2 的条件，说明定理 2 的条件仅是充分条件，而非必要条件。

2. 主要结论

2.1. 幂函数

(一) 幂指数 $\mu>0$ 且 $\mu\neq 1$

定理 3 设 $0\le r<x<+\infty$，幂函数 $f(t)=t^{\mu}$，$t\in[r,x]$。

1) 若 $r=0$，则 $f(t)$ 的拉格朗日中值定理中的 θ 满足

$$\theta=\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}.$$

2) 若 $r>0$，则 $f(t)$ 的拉格朗日中值定理中的 θ 满足

$$\lim_{x\to r}\theta=\frac{1}{2}.$$

证明 不妨设 $\mu>1$，由拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned}x^{\mu}-r^{\mu}&=\mu\xi^{\mu-1}(x-r)\\&=\mu\left[r+\theta(x-r)\right]^{\mu-1}(x-r)\end{aligned}$$

类似于文献[13]有

$$\theta=\frac{\left[\frac{x^{\mu}-r^{\mu}}{\mu(x-r)}\right]^{\frac{1}{\mu-1}}-r}{x-r}$$

1) 若 $r=0$，显然有

$$\theta=\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}$$

2) 若 $r>0$，因为是考虑 x 趋向于 r 时的极限，故此不妨设 $\frac{|x-r|}{r}<1$，由幂级数展开式及洛必达法则可得

$$\lim_{x\to r}\theta=\lim_{x\to r}\frac{\left(\dfrac{x^\mu-r^\mu}{\mu(x-r)}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}-r}{x-r}=\lim_{x\to a}\frac{\left(x^\mu-r^\mu\right)^{\frac{1}{\mu-1}}-r\mu^{\frac{1}{\mu-1}}(x-r)^{\frac{1}{\mu-1}}}{(x-r)\mu^{\frac{1}{\mu-1}}(x-r)^{\frac{1}{\mu-1}}}$$

$$=\lim_{x\to r}\frac{r^{\frac{\mu}{\mu-1}}\left[\left(1+\dfrac{x-r}{r}\right)^\mu-1\right]^{\frac{1}{\mu-1}}-r\mu^{\frac{1}{\mu-1}}(x-r)^{\frac{1}{\mu-1}}}{(x-r)\mu^{\frac{1}{\mu-1}}(x-r)^{\frac{1}{\mu-1}}}$$

$$=\lim_{x\to r}\frac{r^{\frac{\mu}{\mu-1}}\left[\dfrac{\mu}{r}(x-r)+\dfrac{\mu(\mu-1)}{2!r^2}(x-r)^2+\cdots\right]^{\frac{1}{\mu-1}}-r\mu^{\frac{1}{\mu-1}}(x-r)^{\frac{1}{\mu-1}}}{(x-r)\mu^{\frac{1}{\mu-1}}(x-r)^{\frac{1}{\mu-1}}}$$

$$=\lim_{x\to r}\frac{r^{\frac{\mu}{\mu-1}}\left[\dfrac{\mu}{r}+\dfrac{\mu(\mu-1)}{2!r^2}(x-r)+\cdots\right]^{\frac{1}{\mu-1}}-r\mu^{\frac{1}{\mu-1}}}{(x-r)\mu^{\frac{1}{\mu-1}}}$$

$$=\lim_{x\to r}\frac{\dfrac{r^{\frac{\mu}{\mu-1}}}{\mu-1}\left[\dfrac{\mu}{r}+\dfrac{\mu(\mu-1)}{2!r^2}(x-r)+\cdots\right]^{\frac{2-\mu}{\mu-1}}\left[\dfrac{\mu(\mu-1)}{2!r^2}+\dfrac{2\prod_{i=0}^{2}(\mu-i)}{3!r^3}(x-r)+\cdots\right]}{\mu^{\frac{1}{\mu-1}}}$$

$$=\frac{r^{\frac{\mu}{\mu-1}}\cdot\dfrac{1}{\mu-1}\cdot\left(\dfrac{\mu}{r}\right)^{\frac{2-\mu}{\mu-1}}\cdot\dfrac{\mu(\mu-1)}{2!r^2}}{\mu^{\frac{1}{\mu-1}}}=\frac{1}{2}.$$

对于 $0<\mu<1$ 时，类似可得结论，在此省略其证明。证毕

注 ① 当 $r=0$ 时，由 $\theta=\left(\dfrac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}$ 可知，此时 θ 与 x 无关，仅与幂函数的指数 μ 有关。特别地，当 $\mu=2$ 时，$\theta=\dfrac{1}{2}$，此时 $\xi=\dfrac{1}{2}x$，即无论 x 取何值，中值点均为区间 $[0,x]$ 的中点；当 μ 取大于 1 的正整数 n 时，$\theta=\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$，此时与(5)式的结论相同，且满足定理 2 条件 $f^{(n)}(0)\neq 0$；但当 μ 不取正整数时，例如 $\mu=\dfrac{3}{2}$，则 $\theta=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$，并不满足定理 2 条件 $f^{(2)}(0)\neq 0$，此时 $f^{(2)}(0)$ 不存在[3]。

由 θ 与幂指数 μ 的函数关系，再利用取整函数 $[\cdot]$ 的性质可得 $\lim\limits_{\mu\to+\infty}\theta=1$。事实上，由 $[\mu]\le\mu<[\mu]+1$，有

$$\left([\mu]+1\right)^{\frac{1}{[\mu]+1}}\le(\mu+1)^{\frac{1}{\mu}}<\left([\mu]+2\right)^{\frac{1}{[\mu]}}$$

再由

$$\lim_{\mu\to+\infty}([\mu]+1)^{\frac{1}{[\mu]+1}}=\lim_{[\mu]\to+\infty}([\mu]+1)^{\frac{1}{[\mu]+1}}=\lim_{[\mu]\to+\infty}([\mu]+2)^{\frac{1}{[\mu]}}=1$$

故

$$\lim_{\mu\to+\infty}\theta=\lim_{\mu\to+\infty}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}=\lim_{\mu\to+\infty}\left(\frac{1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{\mu}}=1.$$

由幂函数在第一象限的单调性知道，此时的中值点θ是唯一的。θ随着μ的增大而单调递增趋于1，即θ是μ的增函数。由于此时有$\xi=\theta x$，故此$\xi\to x(\mu\to+\infty)$，即随着幂指数的增加，ξ单调递增趋向于区间右端点x。

② 若$r>0$，此时$f(t)=t^{\mu}$，$t\in[r,x]$并不满足推论1中的条件，但此时仍有(4)式成立。

(二) 幂指数$\mu<0$

推论2 设$0<r<x<+\infty$，幂函数$f(t)=t^{\mu},t\in[r,x]$，则$f(t)$的拉格朗日中值定理中的θ满足

$$\lim_{x\to r}\theta=\frac{1}{2}.$$

2.2. 指数函数

定理4 设$0\le r<x<+\infty$，指数函数$f(t)=a^{t}(a>0,a\ne1)$，$t\in[r,x]$，则$f(t)$的拉格朗日中值定理中的θ满足

$$\lim_{x\to r}\theta=\frac{1}{2}.$$

证明 由拉格朗日中值定理有

$$a^{x}-a^{r}=a^{\xi}(x-r)\ln a=a^{r+\theta(x-r)}(x-r)\ln a$$

类似于文献[13]有

$$\theta=\frac{\log_a^{\frac{a^{x-r}-1}{(x-r)\ln a}}}{x-r}$$

再由对数运算性质及洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to r}\theta&=\lim_{x\to r}\frac{\log_a^{\frac{a^{x-r}-1}{(x-r)\ln a}}}{x-r}=\lim_{x\to r}\frac{\ln\frac{a^{x-r}-1}{(x-r)\ln a}}{(x-r)\ln a}\\&=\lim_{x\to r}\frac{a^{x-r}(x-r)\ln a-a^{x-r}+1}{(a^{x-r}-1)(x-r)\ln a}\\&=\lim_{x\to r}\frac{a^{x-r}(x-r)\ln a}{a^{x-r}(x-r)\ln a+a^{x-r}-1}\\&=\lim_{x\to r}\frac{(x-r)\ln a+1}{(x-r)\ln a+2}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

证毕

注 指数函数在任何区间上均不满足推论 1 或者定理 2 的条件，但随着 x 趋向于 r，中值点依然趋向于区间中点。

2.3. 对数函数

定理 5 设 $0 \le r < x < +\infty$，对数函数 $f(t) = \log_a t\,(a > 0, a \ne 1)$，$t \in [r, x]$，则 $f(t)$ 的拉格朗日中值定理中的 θ 满足

$$\lim_{x \to r} \theta = \frac{1}{2}.$$

证明 由拉格朗日中值定理有

$$\log_a x - \log_a r = \frac{x-r}{\xi \ln a} = \frac{x-r}{\left(r + \theta(x-r)\right)\ln a}$$

故

$$\theta = \frac{x - r - r(\ln x - \ln r)}{(x-r)(\ln x - \ln r)}$$

再由洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \to r} \theta &= \lim_{x \to r} \frac{x-r}{x(\ln x - \ln r) + x - r} \\ &= \lim_{x \to r} \frac{1}{\ln x - \ln r + 2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

证毕

注 对数函数在任何区间上均不满足推论 1 或者定理 2 的条件，但随着区间左端点 x 趋向于区间右端点 r 时，中值点依然趋向于区间中点。

3. 结束语

本文讨论了三种基本初等函数——幂函数、指数函数、对数函数的拉格朗日中值点的渐近性问题。除幂函数当左端点为 0 时，中值 θ 取定值外，其余情形的幂函数、指数函数、对数函数中值点的渐近性结果均相似，即随着区间右端点 x 趋向于左端点 r 时，拉格朗日中值点趋向于区间的中点。这一结果也与文献中的结果类似，但除幂函数中当幂指数取正整数且左端点为 0 时满足文献中的定理条件外，其余情形的幂函数、指数函数、对数函数均不满足文献中定理要求的条件，可见文献中的定理条件仅是充分条件，而非必要条件。

致　谢

在此对参考文献给予的启发与思考以及审稿人提出的宝贵意见表示衷心感谢！

基金项目

1) 国家自然基金项目编号：11961037。
2) 广东石油化工学院科研基金人才引进项目，项目编号：2019rc101。

参考文献

[1] Azpeitia, A.G. (1982) On the Lagrange Remainder of the Taylor Formula. *The American Mathematical Monthly*, **89**,

311-312. https://doi.org/10.1080/00029890.1982.11995444

[2] 李文荣. 关于中值定理“中间点”的渐近性[J]. 数学的实践与认识, 1985(2): 53-57.

[3] 张广梵. 关于微分中值定理的一个注记[J]. 数学的实践与认识, 1988(1): 87-89.

[4] 戴立辉. 微分中值定理 ξ 的变化趋势[J]. 工科数学, 1994, 10(4): 178-181.

[5] 任立顺, 安玉坤. 关于“中值点”渐近性的一般结果[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 1995, 31(3): 31-34.

[6] 高国成. 微分中值定理“中间点”的渐近性[J]. 工科数学, 2001, 17(5): 102-104.

[7] 程希旺. 微分中值定理中值点渐进性研究的新进展[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(14): 229-233.

[8] 李元中, 冯汉桥. Onthe Asymptotic Behavior of the Intermediate Point in the Higher-Order Lagrange Mean Value Theorem [J]. 数学杂志, 1991, 11(3): 298-300.

[9] 苑倩倩, 路振国, 任立顺. 高阶 Lagrange 中值定理“中值点”的渐近性[J]. 大学数学, 2021, 37(2): 78-84.

[10] 华东师范大学数学系. 数学分析: 上册[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 123, 141.

[11] 刘名生, 冯伟贞, 韩彦昌. 数学分析(一) [M]. 第 3 版. 北京: 科学出版社, 2019: 156, 141.

[12] 同济大学数学科学学院. 高等数学: 上册[M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023: 133, 124.

[13] 李治远. 拉格朗日中值定理中值点的确定与渐进性[J]. 通化师范学院学报, 2016, 37(6): 27-28.

[14] 吴艳. 拉格朗日中值定理“中值点”的注记[J]. 高等数学研究, 2022, 25(4): 22-23+27.