Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 2780-2793
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310286

时变延迟随机微分方程的稳定性和有界性

吴承业

南京财经大学应用数学学院，江苏 南京

收稿日期：2023年9月3日；录用日期：2023年10月3日；发布日期：2023年10月11日

摘　要

本文研究了时变延迟随机微分方程的稳定性和有界性问题。本文分别讨论了当延迟函数为常数、有界函数和无界函数等三种情况的稳定性和有界性问题，利用李雅普诺夫函数和时变伊藤公式，得出了三种情况下相应解的稳定性和有界性的判别准则。最后，本文列举了一些例子来说明所得结果的有效性。

关键词

时变延迟随机微分方程，李雅普诺夫方法，时变伊藤公式

Stability and Boundedness of Time-Changed Delay Stochastic Differential Equations

Chengye Wu

School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing Jiangsu

Received: Sep. 3rd, 2023; accepted: Oct. 3rd, 2023; published: Oct. 11th, 2023

Abstract

In this paper, we study the stability and boundedness of time-changed delay stochastic differential equations. Three cases of the stability and boundedness of time-changed delay stochastic differential equations are discussed separately, that is, the delay function is constant, bounded function and unbounded function. Using Lyapunov function method and time-changed Ito's formula, the criteria of stability and boundedness of these three cases are obtained. Finally, three examples are listed to illustrate the effectiveness of our conclusion.

文章引用: 吴承业. 时变延迟随机微分方程的稳定性和有界性[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 2780-2793.
DOI: 10.12677/pm.2023.1310286

Keywords

Time-Changed Delay Stochastic Differential Equation, Lyapunov Method, Time-Changed Itó's Formula

1. 引言

随机系统是一类描述现实世界具体行为的数学模型，它可以对于不确定的模型运行环境进行有效的分析。随着随机微分方程的不断发展，它的理论在物理学、机械工程、控制理论和经济学等各个科学领域的应用不断渗透。随机系统的稳定性和有界性的研究一直是随机微分方程中的研究热点(例如[1]-[11])。

现实中的影响因素大都随着时间的改变而变化，为能更精确描述现实中的复杂系统，时变随机微分方程的应运而生，并在近几年逐渐成为学者的研究焦点。金融分析师常会运用 Black-Scholes 模型，并通过建立由布朗运动驱动的随机微分方程的模型进行股票与期权的定价。由于不是所有股票的交易行为都足够活跃，常有股票在短期内价格保持不变，在这种情况下，普通的随机微分方程描述的价格误差相对较大，但是时变随机微分方程可以较为精确的处理这类问题，参见[12]。在[13]中，Kobayashi 发现在半鞅和时变的条件下，任何由时变半鞅驱动的随机积分都是由原始半鞅驱动的时变随机积分，同时建立了时变伊藤公式。在[14]中，Wu 得到了时变随机微分方程的随机稳定，随机渐进稳定和全局随机渐进稳定的必要条件。在[15]中，朱敏等人建立了时变随机微分方程的指数稳定性判别依据。

由于现代科学与工业不仅依赖于当前的状态，还取决于过去的状态，延迟随机微分方程逐渐被运用于这类系统的建模之中，它的稳定性也逐渐成为当前的研究热点问题之一。延迟时变随机微分方程相较于时变随机微分方程多考虑了延迟项的因素，新的模型不仅可以收集现在的信息，还可以收集在过去一段时间内的信息，在进行期权定价等行为中可以提高结果的准确性。在[16]中，胡等人通过细化延迟函数类型的方式，对混合随机微分方程的稳定性和有界性进行了研究，为后人的研究提供了理论基础。在[17]中，侯志刚等人研究了具有马尔可夫切换的中立型延迟随机微分方程的分布稳定性。在[18]中，谭等人运用弱收敛的方法研究了中立型随机泛函微分方程的分布稳定性。在[19]中，Bao 等人运用常数变易公式得到了不需要满足耗散条件的延迟随机微分方程的平稳分布，并证明其是存在且唯一的。在[20]中，Hu 等人运用李雅普诺夫函数与半鞅收敛定理等方法得到了延迟函数为不可导情况下延迟随机微分方程的稳定性和有界性的结论。

然而，目前对于时变延迟随机微分方程的稳定性和有界性等问题仍未有结果，本文在前人理论研究的基础上对该问题进行讨论。本文证明中主要借助的数学工具有：李雅普诺夫函数、半鞅收敛定理、时变伊藤公式等。李雅普诺夫函数方法在稳定性以及控制等结论中的运用极其广泛，其主要思想为根据方程的特性构造适当的函数，从而得到对应方程解的稳定性所需要的条件。本文针对不同的延迟函数构造相应的李雅普诺夫函数得到方程解稳定性的充分条件。本文的主要贡献是对延迟函数分别为常数、有界函数、无界函数等三种情况都进行了讨论，并得到了三种情况下时变延迟随机微分方程的稳定性和有界性的判别准则。本文内容安排如下：第二节，介绍了基本模型和一些预备知识；第三节，分别讨论了延迟函数为常数、有界函数、无界函数等三种情况下时变延迟随机微分方程的稳定性和有界性的结果；第

四节，举了几个例子来论证我们的结论的有效性。

2. 模型介绍和预备知识

设$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$是关于流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$的完备概率空间，也就是说它是右连续的，且$\mathcal{F}_0$包含所有的零概率集，设$\{B(t)\}_{t\geq 0}$是在完备带流的概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$上定义的实值布朗运动。从属项$\{U_t\}_{t\geq 0}$是一个递增，具有平稳独立增量，且其样本路径是右连续且左极限存在的随机过程。$U(t)$的拉普拉斯变换的形式如下：

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-uU(t)}\right)=\mathrm{e}^{-t\varphi(u)},$$

这里的$\varphi(u)$是拉普拉斯特征指数：

$$\varphi(u)=\lambda u+\int_0^\infty\left(1-\mathrm{e}^{-ux}\right)\nu(\mathrm{d}x),$$

这里的$\lambda\geq 0$是漂移参数，ν是满足$\int_0^\infty(1\wedge\cdot)\nu\mathrm{d}(\cdot)<\infty$的 Levy 测度。本文研究的从属项$\{U(t)\}_{t\geq 0}$是$\alpha$-稳定的，即以$\varphi(u)=u^\alpha$作为稳定参数且$\alpha\in(0,1)$。逆$\alpha$-稳定从属项定义为：

$$E(t)=\inf\{s>0:U(s)>t\},t\geq 0.$$

为了排除复合泊松过程的情况，我们假设$\nu(0,\infty)=\infty$，同时也可以保证$\{U(t)\}_{t\geq 0}$的样本轨道几乎处处是严格递增的。因此很容易看出$\{E(t)\}_{t\geq 0}$是连续且随$(\mathcal{F}_t)$-时变的，也就是说它是一个连续不减的$\mathcal{F}_t$-停时族。定义$\mathcal{G}_t=\mathcal{F}_{E(t)}$，由于$\mathcal{F}_t$和$E(t)$都是右连续的，所以$\mathcal{G}_t$也是右连续的。$B(E(t))$是关于流$\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$的平方可积鞅(参见定理 1 [1])。设$\phi:R_+\to R$是一个可测且$\mathcal{G}_t$-适应的过程，我们有：

$$\mathrm{E}\int_0^\infty|\phi(s)|^2\,\mathrm{d}E(s)<\infty,t>0.$$

定义一个实值随机积分：

$$\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}B(E(s)),$$

且它是一个连续的平方可积鞅，关于随机积分的构造，参见文献[7]。

在本文中，考虑初值$x(0)=x_0$的时变延迟随机微分方程：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x(t)=&f\left(t,E(t),x(t),x(t-\delta(t))\right)\mathrm{d}t+g\left(t,E(t),x(t),x(t-\delta(t))\right)\mathrm{d}E(t)\\&+\sigma\left(t,E(t),x(t),x(t-\delta(t))\right)\mathrm{d}B(E(t)),\end{aligned}\tag{1}$$

其中，

$$\begin{aligned}&f:R_+\times R_+\times R\times R\to R,\\&g:R_+\times R_+\times R\times R\to R,\\&\sigma:R_+\times R_+\times R\times R\to R,\\&\delta:R_+\to R_+.\end{aligned}$$

当$t<0$时，我们令$E(t)=0$。

为了保证该方程存在唯一的解$x(t)$，需要建立以下假设：

(A1) 对任意的$t_1,t_2\in R_+=[0,\infty)$，$x_1,x_2,y_1,y_2\in R$，存在正常数$K$，使得

$$\begin{aligned}&\left|f(t_1,t_2,x_1,y_1)-f(t_1,t_2,x_2,y_2)\right|^2\vee\left|g(t_1,t_2,x_1,y_1)-g(t_1,t_2,x_2,y_2)\right|^2\\&\vee\left|\sigma(t_1,t_2,x_1,y_1)-\sigma(t_1,t_2,x_2,y_2)\right|^2\leq K\left|(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right|.\end{aligned}$$

(A2) 如果 $x(t)$ 是一个右连左极且 $\mathcal{G}_t$ -适应的过程，那么

$$f\left(t,E(t),x(t),x\left(t-\delta(t)\right)\right),g\left(t,E(t),x(t),x\left(t-\delta(t)\right)\right),\sigma\left(t,E(t),x(t),x\left(t-\delta(t)\right)\right)\in L\left(\mathcal{G}_t\right),$$

$L\left(\mathcal{G}_t\right)$ 指的是右连左极且 $\mathcal{G}_t$ -适应的过程类。根据引理 4.1 [13]，时变延迟随机微分方程(1)存在唯一解，且该解是 $\mathcal{G}_t$ -适应的。

3. 稳定性和有界性

本文将研究在三种不同类型的延迟函数的情况下时变延迟随机微分方程(1)的稳定性与有界性问题。

类型一：延迟函数 $\delta(t)=\tau,\tau>0$ 的情形

为研究此情况，给出假设**(A3)**。

(A3) 若存在 $V\in C^{2,1}\left(R_+\times R_+\times R;R_+\right)$，$U_1,U_2\in C\left(\left[-\tau,\infty\right)\times R_+\times R;R_+\right)$，及常数 $c_1\geq 0$，$c_2>c_3\geq 0$，使得对任意的 $\left(t,E(t),x\right)\in R_+\times R_+\times R$ 有：

$$U_1\left(t,E(t),x\right)\leq V\left(t,E(t),x\right)\leq U_2\left(t,E(t),x\right). \tag{2}$$

对任意的 $\left(t,E(t),x,y\right)\in R_+\times R_+\times R\times R$ 有：

$$L_1V\left(t,E(t),x,y\right)\leq c_1-c_2U_2\left(t,E(t),x\right)+c_3U_2\left(t-\tau,E(t-\tau),y\right), \tag{3}$$

$$L_2V\left(t,E(t),x,y\right)\leq 0. \tag{4}$$

其中，

$$L_1V\left(t_1,t_2,x,y\right)=V_{t_1}\left(t_1,t_2,x,y\right)+V_x\left(t_1,t_2,x,y\right)f\left(t_1,t_2,x,y\right),$$

$$L_2V\left(t_1,t_2,x,y\right)=V_{t_2}\left(t_1,t_2,x,y\right)+V_x\left(t_1,t_2,x,y\right)g\left(t_1,t_2,x,y\right)+\frac{1}{2}V_{xx}\left(t_1,t_2,x,y\right)\sigma^2\left(t_1,t_2,x,y\right).$$

定理 3.1 当**(A1)**，**(A2)**，**(A3)**成立时，有以下结论：

1) $$\limsup_{t\to\infty}\mathrm{E}U_1\left(t,E(t),x\right)\leq\frac{c_1}{\varepsilon}. \tag{5}$$

2) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathrm{E}U_2\left(s,E(s),x\right)\mathrm{d}s\leq\frac{c_1}{c_2-c_3}. \tag{6}$$

当 $c_1=0$ 时，有：

3) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\left(\mathrm{E}U_1\left(t,E(t),x\right)\right)\leq-\varepsilon. \tag{7}$$

4) $$\int_0^\infty\mathrm{E}U_2\left(s,E(s),x\right)\mathrm{d}s\leq\frac{1}{c_2-c_3}\left(U_2(0,0,x(0))+\int_{-\tau}^0U_2\left(s,E(s),x\right)\mathrm{d}s.\right. \tag{8}$$

5) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\left(U_1\left(t,E(t),x\right)\right)\leq-\varepsilon\quad\text{a.s.} \tag{9}$$

6) $$\int_0^\infty U_2\left(s,E(s),x\right)\mathrm{d}s<\infty.\quad\text{a.s.} \tag{10}$$

其中 $\varepsilon>0$，是方程 $c_2=\varepsilon+c_3\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}$ 的唯一根。

证明 对任意的整数 $n\geq\left|x_0\right|$，定义停时

$$\tau_n=\inf\left\{t\geq 0:\left|x(t)\right|\geq n\right\},$$

和

$$\rho_k = k \wedge \inf\left\{t \ge 0 : \left|\int_0^{\tau_n \wedge t} V_x\left(s,E(s),x(s),x(s-\delta(s))\right)\sigma\left(s,E(s),x(s),x(s-\delta(s))\right)\right| \ge k\right\},$$

其中 $n,k = 1,2,3,\cdots$。显然 $\tau_n \to \infty$， $\rho_k \to \infty$ 几乎处处成立。

根据时变伊藤公式(参见引理 1.9 [14])我们有：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\mathrm{e}^{\varepsilon(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k)}V\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k, E(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k), x(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k)\right) - V(0,0,x_0)\\
&= \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} \mathrm{e}^{\varepsilon s}\left(\varepsilon V\left(s,E(s),x(s)\right) + L_1 V\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\right)\mathrm{d}s\\
&\quad + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} \mathrm{e}^{\varepsilon s} L_2 V\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}E(s)\\
&\quad + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} \mathrm{e}^{\varepsilon s} V_x\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\sigma\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}B\left(E(s)\right).
\end{aligned}$$

由于 $\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} \mathrm{e}^{\varepsilon s} V_x\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\sigma\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}B\left(E(s)\right)$ 是均值为 0 的鞅，再根据(2)、(3)、(4)，可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\mathrm{e}^{\varepsilon(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k)}U_1\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k, E(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k), x(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k)\right) - U_2(0,0,x_0)\\
&\le \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} \mathrm{e}^{\varepsilon s}\left(c_1 - (c_2-\varepsilon)U_2\left(s,E(s),x(s)\right) + c_3 U_2\left(s-\tau,E(s-\tau),x(s-\tau)\right)\right)\mathrm{d}s\\
&\le \frac{c_1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon t} - (c_2-\varepsilon)\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} \mathrm{e}^{\varepsilon s} U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s\\
&\quad + c_3\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} \mathrm{e}^{\varepsilon s} U_2\left(s-\tau,E(s-\tau),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{11}$$

又因为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} \mathrm{e}^{\varepsilon s} U_2\left(s-\tau,E(s-\tau),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}s\\
&= \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} \mathrm{e}^{\varepsilon(s-\tau)} U_2\left(s-\tau,E(s-\tau),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}s\\
&= \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\mathrm{E}\int_{-\tau}^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k-\tau} \mathrm{e}^{\varepsilon s} U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s\\
&\le \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\mathrm{E}\int_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{\varepsilon s} U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} \mathrm{e}^{\varepsilon s} U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s\\
&\le \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\mathrm{E}\int_{-\tau}^{0} U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} \mathrm{e}^{\varepsilon s} U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{12}$$

将(12)代入(11)，可以得到：

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\varepsilon(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k)}U_1\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k, E(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k), x(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k)\right)\right) \le P_1 + \frac{c_1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon t}.$$

其中 $P_1 = U_2(0,0,x_0) + c_3\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\mathrm{E}\int_{-\tau}^{0} U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s$。当 $n\to\infty$， $k\to\infty$ 时，可得

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\varepsilon t}U_1\left(t,E(t),x(t)\right)\right) \le P_1 + \frac{c_1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon t}, \tag{13}$$

将不等式两边同除以 $\mathrm{e}^{\varepsilon t}$，再令 $t\to\infty$，则(5)得证。

根据时变伊藤公式可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}V\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k, E(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k), x(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k)\right) - V(0,0,x_0)\\
&= \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} L_1 V\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}s + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} L_2 V\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}E(s)\\
&\quad + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} V_x\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\sigma\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}B\left(E(s)\right).
\end{aligned}$$

由于$\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} V_x\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\sigma\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}B\left(E(s)\right)$是均值为 0 的鞅，再根据(2)、(3)、(4)，可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}U_1\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k,E\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right),x\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right)\right)\\&\le U_2\left(0,0,x_0\right)+\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} c_1-c_2U_2\left(s,E(s),x(s)\right)+c_3U_2\left(s-\tau,E(s-\tau),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\le U_2\left(0,0,x_0\right)+c_1t-c_2\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s\\&\quad+c_3\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}U_2\left(s-\tau,E(s-\tau),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}s\\&\le P_2+c_1t-\left(c_2-c_3\right)\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{15}$$

其中$P_2=U_2\left(0,0,x_0\right)+\mathrm{E}\int_{-\tau}^0U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s$。因此，可得

$$\left(c_2-c_3\right)\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s\le P_2+c_1t.$$

令$k\to\infty$，$n\to\infty$，再运用 Fubini 定理，可得

$$\left(c_2-c_3\right)\int_0^t\mathrm{E}U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s\le P_2+c_1t.\tag{16}$$

将不等式两边同除以t，再令$t\to\infty$，可得(6)成立。

接下来考虑$c_1=0$时的情况，由(13)可以得到：

$$\mathrm{E}\left(U_1\left(t,E(t),x(t)\right)\right)\le P_1\mathrm{e}^{-\varepsilon t},$$

将不等式两边取对数，再两边同除以t时后，再令$t\to\infty$，(7)得证。

根据(16)，可以得到，

$$\left(c_2-c_3\right)\int_0^t\mathrm{E}U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s\le P_2.$$

将不等式两边同除以c_2-c_3，再令$t\to\infty$，得到

$$\int_0^\infty\mathrm{E}U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s\le\frac{1}{c_2-c_3}\left(U_2\left(0,0,x(0)\right)+\int_{-\tau}^0U_2\left(s,E(s),x\right)\mathrm{d}s\right),\tag{17}$$

则(8)得证。

对(17)使用 Fubini 定理，可得

$$\mathrm{E}\int_0^\infty U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s\le\frac{1}{c_2-c_3}\left(U_2\left(0,0,x(0)\right)+\int_{-\tau}^0U_2\left(s,E(s),x\right)\mathrm{d}s\right),$$

由此可得(10)成立。

根据时变伊藤公式，可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\varepsilon t}V\left(t,E(t),x(t)\right)-V\left(0,0,x_0\right)\\&=\int_0^t\mathrm{e}^{\varepsilon s}\left(\varepsilon V\left(s,E(s),x(s)\right)+L_1V\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\right)\mathrm{d}s\\&\quad+\int_0^t\mathrm{e}^{\varepsilon s}L_2V\left(s,E(s),x(s),x(s-\tau)\right)\mathrm{d}E(s)+M(t),\end{aligned}$$

其中，$M(t)$是一个初值为 0 的局部鞅，根据假设**(A3)**，且当$c_1=0$时，用证明(13)的方法可以得到：

$$\mathrm{e}^{\varepsilon t}U_1\left(t,E(t),x(t)\right)\le P_3+M(t),$$

这里的 $P_3=U_2\left(0,0,x_0\right)+c_3\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\int_{-\tau}^{0}U_2\left(s,E\left(s\right),x\left(s\right)\right)\mathrm{d}s$ 。根据半鞅收敛定理[8]可以得到：

$$\limsup_{t\to\infty}\left[\mathrm{e}^{\varepsilon t}U_1\left(t,E\left(t\right),x\left(t\right)\right)\right]<\infty \quad \text{a.s.},$$

因此，存在有界随机变量 λ 使得

$$\sup_{0\le t<\infty}\left[\mathrm{e}^{\varepsilon t}U_1\left(t,E\left(t\right),x\left(t\right)\right)\right]\le\lambda \quad \text{a.s.},$$

即

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\left(U_1\left(t,E\left(t\right),x\right)\right)\le-\varepsilon \quad \text{a.s.},$$

即(9)成立，定理 3.1 证毕。

类型二：当 $\delta(t)$ 是 t 的函数的情形

假设延迟函数 $\delta(t):R_+\to R_+$ 是一个可导的函数且满足 $\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}\le\mu<1$。令 $\delta_1(t)=t-\delta(t),t\ge0$。那么，$\frac{\mathrm{d}\delta_1(t)}{\mathrm{d}t}\ge1-\mu>0$，即 $\delta_1(t)$ 是关于 t 的递增函数，且有 $\delta_1(t)\ge-\delta(0),t\ge0$。

定义初值 $\{x(t):-\tau\le t<0\}\in C\left(\left[-\delta(0),0\right];R\right)$。

为研究此情况，建立如此假设。

(A4) 若存在 $V\in C^{2,1}\left(R_+\times R_+\times R;R_+\right)$，$U_1,U_2\in C\left(\left[-\tau,\infty\right)\times R_+\times R;R_+\right)$，及常数 $c_1\ge0$，$c_2>c_3\ge0$，使得对任意的 $\left(t,E(t),x\right)\in R_+\times R_+\times R$ 有：

$$U_1\left(t,E(t),x\right)\le V\left(t,E(t),x\right)\le U_2\left(t,E(t),x\right).$$

对任意的 $\left(t,E(t),x,y\right)\in R_+\times R_+\times R\times R$ 有：

$$L_1V\left(t,E(t),x,y\right)\le c_1-c_2U_2\left(t,E(t),x\right)+c_3(1-\mu)U_2\left(t-\delta(t),E\left(t-\delta(t)\right),y\right), \tag{18}$$

$L_2V\left(t,E(t),x,y\right)\le0.$

定理 3.2 当**(A1)**，**(A2)**，**(A4)**成立时，有以下结论：

1) $$\mathrm{E}U_1\left(t,E(t),x\right)<\infty,\forall t\ge0. \tag{19}$$

2) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathrm{E}U_2\left(s,E(s),x\right)\mathrm{d}s\le\frac{c_1}{c_2-c_3}. \tag{20}$$

当 $c_1=0$ 时，有：

3) $$\int_0^\infty\mathrm{E}U_2\left(s,E(s),x\right)\mathrm{d}s\le\frac{1}{c_2-c_3}\left(U_2\left(0,0,x(0)\right)+\int_{-\delta(0)}^{0}U_2\left(s,E(s),x\right)\mathrm{d}s\right). \tag{21}$$

4) $$\int_0^\infty U_2\left(s,E(s),x\right)\mathrm{d}s<\infty. \quad \text{a.s.} \tag{22}$$

证明 (20)的证明思路与定理 3.1 中的(6)的证明思路一致，根据时变伊藤公式和**(A4)**，与定理 3.1 证明过程不同的是(14)变成了，

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}U_1\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k,E\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right),x\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right)\right)\\&\le U_2\left(0,0,x_0\right)+c_1t-c_2\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s\\&\quad+c_3(1-\mu)\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}U_2\left(s-\delta(s),E\left(s-\delta(s)\right),x\left(s-\delta(s)\right)\right)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{23}$$

又因为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} U_2\big(s-\delta(s),E(s-\delta(s)),x(s-\delta(s))\big)\mathrm{d}s\\
&\le \frac{1}{1-\mu}\mathrm{E}\int_{-\delta(0)}^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} U_2\big(s,E(s),x(s)\big)\mathrm{d}s \qquad (24)\\
&\le \frac{1}{1-\mu}\left(\int_{-\delta(0)}^{0} U_2\big(s,E(s),x(s)\big)\mathrm{d}s+\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} U_2\big(s,E(s),x(s)\big)\mathrm{d}s\right),
\end{aligned}
$$

将(24)代入(23)，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}U_1\big(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k,E(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k),x(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k)\big)\\
&\le P_4+c_1t-(c_2-c_3)\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} U_2\big(s,E(s),x(s)\big)\mathrm{d}s,
\end{aligned} \qquad (25)
$$

其中 $P_4=U_2(0,0,x_0)+\mathrm{E}\int_{-\delta(0)}^{0} U_2\big(s,E(s),x(s)\big)\mathrm{d}s$ 。

由(25)可得，

$$
(c_2-c_3)\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k} U_2\big(s,E(s),x(s)\big)\mathrm{d}s\le P_4+c_1t.
$$

令 $k\to\infty$ ， $n\to\infty$ ，再运用 Fubini 定理，可得，

$$
(c_2-c_3)\int_0^{t}\mathrm{E}U_2\big(s,E(s),x(s)\big)\mathrm{d}s\le P_4+c_1t. \qquad (26)
$$

将不等式两边同除以 $t(c_2-c_3)$ ，再令 $t\to\infty$ ，可得(20)成立。

当 $c_1=0$ 时，根据(26)我们有，

$$
(c_2-c_3)\int_0^{t}\mathrm{E}U_2\big(s,E(s),x(s)\big)\mathrm{d}s\le P_4.
$$

不等式两边同除以 (c_2-c_3) ，再令 $t\to\infty$ ，我们有，

$$
\int_0^{\infty}\mathrm{E}U_2\big(s,E(s),x\big)\mathrm{d}s\le\frac{1}{c_2-c_3}\left(U_2\big(0,0,x(0)\big)+\int_{-\delta(0)}^{0}U_2\big(s,E(s),x\big)\mathrm{d}s\right). \qquad (27)
$$

则(21)得证。

对(27)运用 Fubini 定理，可得

$$
\mathrm{E}\int_0^{\infty}U_2\big(s,E(s),x\big)\mathrm{d}s<\infty.
$$

则(22)得证。

将(22)代入(25)，(19)得证。

定理 3.2 证毕。

若延迟函数 $\delta(t)$ 在 $t\ge 0$ 时还满足有界的条件，可以得到以下结论：

定理 3.3 当**(A1)**，**(A2)**，**(A4)**成立时，令 $m:=\sup_{t\ge0}\delta(t)<\infty$ ，有：

1)
$$
\limsup_{t\to\infty}\mathrm{E}U_1\big(t,E(t),x\big)\le\frac{c_1}{\varepsilon}. \qquad (28)
$$

当 $c_1=0$ 时，有：

2)
$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\Big(\mathrm{E}U_1\big(t,E(t),x\big)\Big)\le-\varepsilon. \qquad (29)
$$

3)
$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\Big(U_1\big(t,E(t),x\big)\Big)\le-\varepsilon\quad \text{a.s.} \qquad (30)
$$

其中 $\varepsilon>0$ 是方程 $c_2=\varepsilon+c_3\mathrm{e}^{\varepsilon m}$ 的唯一根。

证明 此定理的证明与定理 3.1 中(5)，(7)，(9)的证明思路类似，根据时变伊藤公式和**(A4)**，与定理 3.1 证明过程不同的是(11)变成了，

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\mathrm{e}^{\varepsilon(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k)}U_1\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k,E\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right),x\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right)\right)-U_2\left(0,0,x_0\right)\\&\le\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}\mathrm{e}^{\varepsilon s}\Big(c_1-\left(c_2-\varepsilon\right)U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\\&\quad+c_3\left(1-\mu\right)U_2\left(s-\delta(s),E\left(s-\delta(s)\right),x\left(s-\delta(s)\right)\right)\Big)\mathrm{d}s\\&\le\frac{c_1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon t}-\left(c_2-\varepsilon\right)\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}\mathrm{e}^{\varepsilon s}U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s\\&\quad+c_3\left(1-\mu\right)\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}\mathrm{e}^{\varepsilon s}U_2\left(s-\delta(s),E\left(s-\delta(s)\right),x\left(s-\delta(s)\right)\right)\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{31}$$

又因为

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}\mathrm{e}^{\varepsilon s}U_2\left(s-\delta(s),E\left(s-\delta(s)\right),x\left(s-\delta(s)\right)\right)\mathrm{d}s\\&\le\mathrm{e}^{\varepsilon m}\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}\mathrm{e}^{\varepsilon(s-\delta(s))}U_2\left(s-\delta(s),E\left(s-\delta(s)\right),x\left(s-\delta(s)\right)\right)\mathrm{d}s\\&\le\frac{1}{1-\mu}\left(\mathrm{e}^{\varepsilon m}\mathrm{E}\int_{-\delta(0)}^0U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{\varepsilon m}\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}\mathrm{e}^{\varepsilon s}U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s,\right.\end{aligned}\tag{32}$$

将(32)代入(21)中，可得

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\varepsilon(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k)}U_1\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k,E\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right),x\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right)\right)\right)\le P_5+\frac{c_1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon t},\tag{33}$$

其中 $P_5=U_2\left(0,0,x_0\right)+c_3\mathrm{e}^{\varepsilon m}\mathrm{E}\int_{-\delta(0)}^0U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s$ 。

令 $n\to\infty,k\to\infty$ ，可得

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\varepsilon t}U_1\left(t,E(t),x(t)\right)\right)\le P_5+\frac{c_1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon t},\tag{34}$$

将不等式两边同除以 $\mathrm{e}^{\varepsilon t}$ ，再令 $t\to\infty$ ，则(28)得证。

当 $c_1=0$ 时，将(34)两边同除以 $\mathrm{e}^{\varepsilon t}$ 我们有，

$$\mathrm{E}\left(U_1\left(t,E(t),x(t)\right)\right)\le P_5\mathrm{e}^{-\varepsilon t},$$

将不等式两边取对数，再将两边同除以 t 时后，再令 $t\to\infty$ ，(29)得证。

根据时变伊藤公式，可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\varepsilon t}V\left(t,E(t),x(t)\right)-V\left(0,0,x_0\right)\\&=\int_0^t\mathrm{e}^{\varepsilon s}\left(\varepsilon V\left(s,E(s),x(s)\right)+L_1V\left(s,E(s),x(s),x\left(s-\delta(s)\right)\right)\right)\mathrm{d}s\\&\quad+\int_0^t\mathrm{e}^{\varepsilon s}L_2V\left(s,E(s),x(s),x\left(s-\delta(s)\right)\right)\mathrm{d}E(s)+M(t).\end{aligned}$$

这里的 $M(t)$ 是一个初值为 0 的局部鞅，根据假设**(A4)**，且当 $c_1=0$ 时，用证明(13)同样的方法可以得到：

$$\mathrm{e}^{\varepsilon t}U_1\left(t,E(t),x(t)\right)\le P_5+M(t),\tag{35}$$

根据半鞅收敛定理[8]可以得到：

$$\limsup_{t\to\infty}\left[\mathrm{e}^{\varepsilon t}U_1\left(t,E(t),x(t)\right)\right]<\infty\ \text{ a.s.},$$

因此，存在有界随机变量λ使得

$$\sup_{0\le t<\infty}\left[\mathrm{e}^{\varepsilon t}U_1\left(t,E(t),x(t)\right)\right]\le\lambda\ \text{ a.s.},$$

即

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\left(U_1\left(t,E(t),x\right)\right)\le-\varepsilon\ \text{ a.s.},$$

即(30)成立，定理 3.3 证毕。

类型三：当延迟函数$\delta(t)$是无界的情形

考虑$\delta(t)=\omega t$，$t\ge 0$的情况，其中$\omega\in(0,1)$。

令$\eta=1-\omega$，则时变延迟随机微分方程(1)变成了

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x(t)=&f\left(t,E(t),x(t),x(\eta t)\right)\mathrm{d}t+g\left(t,E(t),x(t),x(\eta t)\right)\mathrm{d}E(t)\\&+\sigma\left(t,E(t),x(t),x(\eta t)\right)\mathrm{d}B\left(E(t)\right).\end{aligned}\tag{36}$$

通过建立以下假设**(A5)**来得出我们的结果：

(A5)若存在$V\in C^{2,1}\left(R_+\times R_+\times R;R_+\right)$，$U_1,U_2\in C\left(\left[-\tau,\infty\right)\times R_+\times R;R_+\right)$，及常数$c_1\ge0$，$c_2>c_3\ge0$，使得对任意的$\left(t,E(t),x\right)\in R_+\times R_+\times R$有：

$$U_1\left(t,E(t),x\right)\le V\left(t,E(t),x\right)\le U_2\left(t,E(t),x\right).$$

且对任意的$\left(t,E(t),x,y\right)\in R_+\times R_+\times R\times R$有：

$$L_1V\left(t,E(t),x,y\right)\le c_1-c_2U_2\left(t,E(t),x\right)+c_3\eta U_2\left(\eta t,E(\eta t),y\right),\tag{37}$$

$$L_2V\left(t,E(t),x,y\right)\le 0.$$

定理 3.4 当**(A1)**、**(A2)**、**(A5)**成立时，有以下结论：

1) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}U_1\left(t,E(t),x\right)}{1+t}\le\frac{c_1}{1+\varepsilon}.\tag{38}$$

当$c_1=0$时，有：

2) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log\left(\mathrm{E}U_1\left(t,E(t),x\right)\right)}{\log(1+t)}\le-\varepsilon.\tag{39}$$

3) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log\left(U_1\left(t,E(t),x\right)\right)}{\log(1+t)}\le-\varepsilon\quad\text{a.s.}\tag{40}$$

其中$\varepsilon>0$是方程$c_2=\varepsilon+c_3\eta^{-\varepsilon}$的唯一根。

证明 根据时变伊藤公式，可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left(\left(1+t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right)^{\varepsilon}V\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k,E\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right),x\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right)\right)\right)-V\left(0,0,x_0\right)\\&=\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}(1+s)^{\varepsilon-1}\left(\varepsilon V\left(s,E(s),x(s)\right)\right)+(1+s)^{\varepsilon}L_1V\left(s,E(s),x(s),x(\eta s)\right)\mathrm{d}s\\&\quad+\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}(1+s)^{\varepsilon}L_2V\left(s,E(s),x(s),x(\eta s)\right)\mathrm{d}E(s)\\&\quad+\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}(1+s)^{\varepsilon}V_x\left(s,E(s),x(s),x(\eta s)\right)\sigma\left(s,E(s),x(s),x(\eta s)\right)\mathrm{d}B\left(E(s)\right).\end{aligned}\tag{41}$$

由于 $\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}(1+s)^{\varepsilon}V_x\left(s,E(s),x(s),x(\eta s)\right)\sigma\left(s,E(s),x(s),x(\eta s)\right)\mathrm{d}B\left(E(s)\right)$ 是均值为 0 的鞅，再由**(A5)**可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\left(1+t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right)^{\varepsilon}U_1\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k,E\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right),x\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right)\right)\right)-U_2\left(0,0,x_0\right)\\
&\le \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}(1+s)^{\varepsilon}\left(c_1-(c_2-\varepsilon)U_2\left(s,E(s),x(s)\right)+c_3\eta U_2\left(\eta s,E(\eta s),x(\eta s)\right)\right)\mathrm{d}s\\
&\le \frac{c_1(1+t)^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}-(c_2-\varepsilon)\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}(1+s)^{\varepsilon}U_2\left(s,E(s),x(s)\right)\mathrm{d}s\\
&\quad +c_3\eta\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}(1+s)^{\varepsilon}U_2\left(\eta s,E(\eta s),x(\eta s)\right)\mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}(1+s)^{\varepsilon}U_2\left(\eta s,E(\eta s),x(\eta s)\right)\mathrm{d}s\\
&\le \mathrm{E}\int_0^{\eta(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k)}\eta^{-1}\left(1+\frac{u}{\eta}\right)^{\varepsilon}U_2\left(u,E(u),x(u)\right)\mathrm{d}u\\
&\le \eta^{-(1+\varepsilon)}\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_n\wedge\rho_k}(1+u)^{\varepsilon}U_2\left(u,E(u),x(u)\right)\mathrm{d}u,
\end{aligned}
\tag{43}
$$

将(43)代入(42)，可得：

$$
\mathrm{E}\left(\left(1+t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right)^{\varepsilon}U_1\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k,E\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right),x\left(t\wedge\tau_n\wedge\rho_k\right)\right)\right)\le U_2\left(0,0,x_0\right)+\frac{c_1(1+t)^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon},
\tag{44}
$$

令 $n\to\infty$， $k\to\infty$， 可得：

$$
(1+t)^{\varepsilon}\mathrm{E}U_1\left(t,E(t),x(t)\right)\le U_2\left(0,0,x_0\right)+\frac{c_1(1+t)^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon},
\tag{45}
$$

将(45)两边同除以 $(1+t)^{1+\varepsilon}$， 再令 $t\to\infty$， 就得到了(38)。

当 $c_1=0$ 时，将(45)两边同除以 $(1+t)^{\varepsilon}$， 再将两边同时取对数，再令 $t\to\infty$， 就能得到(39)。

根据时变伊藤公式可得：

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{\varepsilon}V\left(t,E(t),x(t)\right)-V\left(0,0,x_0\right)\\
&=\int_0^t(1+s)^{\varepsilon-1}\left(\varepsilon V\left(s,E(s),x(s)\right)\right)+(1+s)^{\varepsilon}L_1V\left(s,E(s),x(s),x(\eta s)\right)\mathrm{d}s\\
&\quad +\int_0^t(1+s)^{\varepsilon}L_2V\left(s,E(s),x(s),x(\eta s)\right)\mathrm{d}E(s)+M(t).
\end{aligned}
$$

这里的 $M(t)$ 是一个初值为 0 的局部鞅，根据假设**(A5)**，当 $c_1=0$，用之前相同的证明方法可以得到：

$$
(1+t)^{\varepsilon}U_1\left(t,E(t),x(t)\right)\le U_2\left(0,0,x_0\right)+M(t),
\tag{46}
$$

根据半鞅收敛定理可得：

$$
\limsup_{t\to\infty}(1+t)^{\varepsilon}U_1\left(t,E(t),x(t)\right)<\infty\quad \text{a.s.},
\tag{47}
$$

由(47)可以得到(40)，定理 3.4 证毕。

4. 例子

例 4.1 考虑时变延迟随机微分方程(1)中 $\delta(t)=\tau=0.1$ 时的情况。

令

$$
f\left(t_1,t_2,x,y\right)=-2x^3-2x,\ g\left(t_1,t_2,x,y\right)=-xy^2,\ \sigma\left(t_1,t_2,x,y\right)=xy,
$$

其中$(t_1,t_2,x,y)\in R_+\times R_+\times R\times R$。

令

$$V(t_1,t_2,x)=x^2, U_1(t_1,t_2,x)=x^2, U_2(t_1,t_2,x)=x^4+x^2,$$

因此，

$$U_1(t_1,t_2,x)\le V(t_1,t_2,x)\le U_2(t_1,t_2,x),$$

其中$V\in C^{2,1}(R_+\times R_+\times R;R_+)$，$U_1,U_2\in C([-\tau,\infty)\times R_+\times R;R_+)$。

通过计算可得，

$$L_1V(t_1,t_2,x,y)=-4x(x^3+x)=-4x^2-4x^4,$$

$$L_2V(t_1,t_2,x,y)=-2x\cdot xy^2+x^2y^2=-x^2y^2,$$

令$c_1=0$，$c_2=0.835$，$c_3=0$时，因此$\varepsilon=0.835$为方程$c_2=\varepsilon+c_3\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}$的唯一根。

对于$\forall(t_1,t_2,x,y)\in R_+\times R_+\times R\times R$，可得以下结论成立：

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\log\left(Ex^2(t)\right)}{t}\le-\varepsilon, \tag{48}$$

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\log\left(|x(t)|\right)}{t}\le-\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{a.s.}, \tag{49}$$

$$\int_0^\infty E\left(x^4(t)\right)\mathrm{d}t<\infty, \tag{50}$$

$$\int_0^\infty x^4(t)\mathrm{d}t<\infty\quad \text{a.s.} \tag{51}$$

例 4.2 考虑时变延迟随机微分方程(1)中$\delta(t)=0.7(1-\sin t)$时的情况，此时

$$m=\sup_{t\ge0}\delta(t)=1.4.$$

令

$$f(t_1,t_2,x,y)=-2x^3-2x+\frac{1}{x}, g(t_1,t_2,x,y)=-\frac{1}{x}y^2, \sigma(t_1,t_2,x,y)=y,$$

其中$(t_1,t_2,x,y)\in R_+\times R_+\times R\times R$。

令

$$V(t_1,t_2,x)=x^2, U_1(t_1,t_2,x)=x^2, U_2(t_1,t_2,x)=x^4+x^2,$$

则有

$$U_1(x)\le V(x)\le U_2(x),$$

其中$V\in C^{2,1}(R;R_+)$，$U_1,U_2\in C(R;R_+)$。

经过计算可得，

$$L_1V(t_1,t_2,x,y)=-4x(x^3+x)+2=-4x^4-4x^2+2,$$

$$L_2V(t_1,t_2,x,y)=-y^2.$$

令$c_1=2$，$c_2=0.365$，$c_3=0$，且$\varepsilon=0.365$为$c_2=\varepsilon+c_3\mathrm{e}^{\varepsilon m}$的唯一根，可得

$$L_1V(t_1,t_2,x,y)=-4x^4-4x^2+2\le c_1-c_2U_2(x)+c_3(1-0.8)U_2(y),$$

$$L_2V(t_1,t_2,x,y)=-y^2\le 0,\ \forall(t_1,t_2,x,y)\in R_+\times R_+\times R\times R.$$

根据定理 3.3，可得以下结论成立：

$$E\left(x^4(t)\right)<\infty,\ \forall t\ge 0, \tag{52}$$

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\log\left(\left|x(t)\right|\right)}{t}\le -0.1825 \quad \text{a.s.} \tag{53}$$

例 4.3 考虑时变延迟随机微分方程(1)中 $\delta(t)=0.8t$，即 $\eta=0.2$ 时的情况。

令

$$f(t_1,t_2,x,y)=-x^3-x,\ g(t_1,t_2,x,y)=-3\frac{y^2}{x},\ \sigma(t_1,t_2,x,y)=y,$$

其中 $(t_1,t_2,x,y)\in R_+\times R_+\times R\times R$。

令

$$V(t_1,t_2,x)=x^4,\ U_1(t_1,t_2,x)=x^4,\ U_2(t_1,t_2,x)=x^6+x^4,$$

则有

$$U_1(x)\le V(x)\le U_2(x),$$

其中 $V\in C^{2,1}(R;R_+)$，$U_1,U_2\in C(R;R_+)$。

经过计算可得，

$$L_1V(t_1,t_2,x,y)=-4x^3\left(x^3+x\right)=-4x^6-4x^4,$$

$$L_2V(t_1,t_2,x,y)=-4x^3\left(3\frac{y^2}{x}\right)+6x^2y^2=-6x^2y^2,$$

令 $c_1=0$，$c_2=0.2825$，$c_3=0$ 时，$\varepsilon=0.2825$ 为 $c_2=\varepsilon+c_3\eta^{-\varepsilon}$ 的唯一根。可得

$$L_1V(t_1,t_2,x,y)=-4x^3\left(x^3+x\right)=-4x^6-4x^4\le c_1-c_2U_2(t,E(t),x)+c_3\eta U_2(\eta t,E(\eta t),y),$$

$$L_2V(t_1,t_2,x,y)=-4x^3\left(3\frac{y^2}{x}\right)+6x^2y^2=-6x^2y^2\le 0,\ \forall(t_1,t_2,x,y)\in R_+\times R_+\times R\times R.$$

根据定理 3.4，可得以下结论成立：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log\left(\mathrm{E}x^4(t)\right)}{\log(1+t)}\le -0.2825, \tag{54}$$

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\log\left(\left|x(t)\right|\right)}{t}\le -0.070625 \ \text{ a.s.} \tag{55}$$

5. 结论

本文主要基于李雅普诺夫方法和时变伊藤公式，得出了时变延迟随机微分方程的解的稳定性与有界性的一些结论，并借助三个具体的例子对于所得结果的有效性与可行性进行了验证。本文的主要贡献是：将延迟函数分为常值函数、有界函数、无界函数三种情况给出了时变延迟随机微分方程的解的稳定性与

有界性判别准则。本文所得出的结论相比于基本的时变随机微分方程能多收集过去一段时间内的信息，预计相较于一般的时变随机微分方程可更为精确的解决如 Black-Scholes 模型的股票与期权定价等问题。在本文的基础上，还可以继续研究当延迟函数为不可导的情况作为未来发展。

参考文献

[1] Zhou, W., Yang, J., Yang, X., *et al*. (2015) pth Moment Exponential Stability of Stochastic Delayed Hybrid Systems with Lévy Noise. *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 5650-5658. https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.01.025

[2] Anguraj, A., Ravikumar, K. and Nieto, J.J. (2021) On Stability of Stochastic Differential Equations with Random Impulses Driven by Poisson Jumps. *Stochastics*, **93**, 682-696. https://doi.org/10.1080/17442508.2020.1783264

[3] Ngoc, P.H.A. (2020) A Novel Approach to Mean Square Exponential Stability of Stochastic Delay Differential Equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **66**, 2351-2356. https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3005587

[4] Ngoc, P.H.A. (2020) A New Approach to Mean Square Exponential Stability of Stochastic Functional Differential Equations. *IEEE Control Systems Letters*, **5**, 1645-1650. https://doi.org/10.1109/LCSYS.2020.3042479

[5] Yuan, C. and Lygeros, J. (2006) Asymptotic Stability and Boundedness of Delay Switching Diffusions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **51**, 171-175. https://doi.org/10.1109/TAC.2005.861690

[6] Magdziarz, M. and Schilling, R. (2015) Asymptotic Properties of Brownian Motion Delayed by Inverse Subordinators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **143**, 4485-4501. https://doi.org/10.1090/proc/12588

[7] Jarrow, R. and Protter, P. (2004) A Short History of Stochastic Integration and Mathematical Finance: The Early Years, 1880-1970. In: DasGupta, A., ed., *A Festschrift for Herman Rubin*, Vol. 45, Institute of Mathematical Statistics, Beachwood, OH, 75-91. https://doi.org/10.1214/lnms/1196285381

[8] Liao, X.X. and Mao, X. (1997) Almost Sure Exponential Stability of Neutral Stochastic Differential Difference Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **212**, 554-570. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5536

[9] 胡杨子, 黄乘明. 含多个函数时滞的随机延迟微分方程的矩稳定性[J]. 数学杂志, 2009, 29(6): 801-808.

[10] 王琦, 温洁嫦. 滞后型分段连续随机微分方程的稳定性[J]. 数学杂志, 2015, 35(2): 307-317.

[11] 袁志宏, 刘变红, 刘桂荣. 一类中立型随机泛函微分方程的分布稳定性[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(11): 252-259.

[12] 张慈. 时变布朗运动下带交易费的亚式期权定价[D]: [硕士学位论文]. 徐州: 中国矿业大学, 2015.

[13] Kobayashi, K. (2011) Stochastic Calculus for a Time-Changed Semimartingale and the Associated Stochastic Differential Equations. *Journal of Theoretical Probability*, **24**, 789-820. https://doi.org/10.1007/s10959-010-0320-9

[14] Wu, Q. (2016) Stability of Stochastic Differential Equations with Respect to Time-Changed Brownian Motions. https://arxiv.org/abs/1602.08160

[15] Zhu, M., Li, J. and Liu, D. (2021) Exponential Stability for Time-Changed Stochastic Differential Equations. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **37**, 617-627. https://doi.org/10.1007/s10255-021-1031-y

[16] Hu, L., Mao, X. and Shen, Y. (2013) Stability and Boundedness of Nonlinear Hybrid Stochastic Differential Delay Equations. *Systems & Control Letters*, **62**, 178-187. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2012.11.009

[17] Bao, J., Hou, Z. and Yuan, C. (2009) Stability in Distribution of Neutral Stochastic Differential Delay Equations with Markovian Switching. *Statistics & Probability Letters*, **79**, 1663-1673. https://doi.org/10.1016/j.spl.2009.04.006

[18] Tan, L., Jin, W. and Suo, Y. (2015) Stability in Distribution of Neutral Stochastic Functional Differential Equations. *Statistics & Probability Letters*, **107**, 27-36. https://doi.org/10.1016/j.spl.2015.07.033

[19] Bao, J., Yin, G. and Yuan, C. (2017) Stationary Distributions for Retarded Stochastic Differential Equations without Dissipative. *Stochastics*, **89**, 530-549. https://doi.org/10.1080/17442508.2016.1267180

[20] Hu, J., Mao, W. and Mao, X. (2023) Advances in Nonlinear Hybrid Stochastic Differential Delay Equations: Existence, Boundedness and Stability. *Automatica*, **147**, Article ID: 110682. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110682