Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 2854-2861
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310292

构造中点模型解析中考几何试题的研究

哈里旦·热合木*，杨　祺#

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年9月6日；录用日期：2023年10月6日；发布日期：2023年10月16日

摘　要

文章通过归纳总结常见几种中点模型，并从近几年通过构造中点模型求解的中考几何压轴试题出发，对其分析、解答和小结给予展示，并提出相应的解题技巧和教学思考，以期让学生找到解决此类问题的解题思路，开拓几何思维，培养学生的问题解决能力。

关键词

构造，中点模型，中考，几何压轴试题

Research on the Construction of Mid-Point Model to Analyze the Geometry Test Questions of Senior High School Entrance Examination

Halidan·Rehemu*, Qi Yang#

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Sep. 6th, 2023; accepted: Oct. 6th, 2023; published: Oct. 16th, 2023

Abstract

By summarizing several common midpoint models, and starting from the geometric final examination questions of the senior high school entrance examination solved by constructing the midpoint model in recent years, this paper shows its analysis, solution and summary, and puts forward the corresponding problem-solving skills and teaching thinking, so as to enable students to

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 哈里旦·热合木, 杨祺. 构造中点模型解析中考几何试题的研究[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 2854-2861.
DOI: 10.12677/pm.2023.1310292

find the problem-solving ideas to solve such problems, develop geometric thinking and cultivate students' problem-solving ability.

Keywords

Construction, Mid-Point Model, Senior High School Entrance Examination, Geometric Pressing Test Questions

1. 引言

构造几何模型是学生学习和运用的难点[1]，在中考几何压轴试题的解答中往往逃避不了模型的运用。中点模型就是几何模型中的一种。初中数学中存在四个常见的中点模型，即全等三角形八字模型、等腰三角形三线合一模型、三角形中位线定理模型、直角三角形斜边中线定理模型。中点是指将一条线段分为两条相等线段的点，是几何常见的特殊点之一，在中考几何压轴试题中经常出现一些与中点相关的问题，解答时若能灵活运用中点来添加辅助线构造相应的中点模型，往往可以达到良好的解题效果。但是与中点相关的问题涉及的内容跨章节，甚至跨年级，加之添加辅助线的方法灵活多变，教师教起来困难，学生学起来也不易[2]。为此，文章通过归纳总结常见几种中点模型，并从近几年通过构造中点模型求解的中考几何压轴试题出发，挖掘题目中的中点模型，探究其典型解法，以期让学生找到解决此类问题的解题思路，并帮助学生熟练掌握常见几种中点模型，丰富知识结构，促进几何思维的发展，提升综合运用知识的能力、分析和解决问题的能力、逻辑推理能力以及直观想象能力，进而提升数学学科核心素养。

2. 中点模型归纳

2.1. 全等三角形八字模型(倍长中线模型)

当出现三角形的中线或中点时，常常将此中线或类中线(与中点有关的线段)延长一倍构造全等三角形。目的是利用全等三角形的性质实现相等的线段和相等的角度的转化，即对已知条件中的线段和角度进行转移。

【模型解读】如图 1，在 ΔABC 中，AD 是 BC 边的中线，延长 AD 至点 E，使 $DE=AD$，连接 BE，则有 $\Delta ADC \cong \Delta EDB$。如图 2，在 ΔABC 中，点 D 是 BC 边的中点，延长 FD 至点 E，使 $DE=FD$，连接 CE，则有 $\Delta FDB \cong \Delta EDC$。

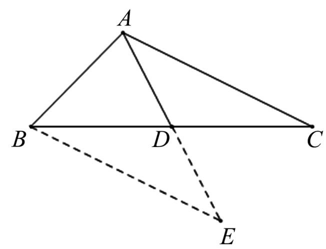

Figure 1. Double long midline
图 1. 倍长中线

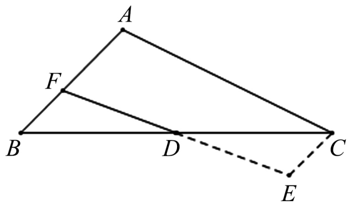

Figure 2. Double-long class midline
图 2. 倍长类中线

2.2. 等腰三角形三线合一模型

当出现等腰三角形时，常隐含有底边中点，将其与顶角的顶点连接，可构成等腰三角形的三线合一[3]。目的是利用等腰三角形三线合一性质证明相等的线段或相等的角度、两条直线的垂直关系以及半角倍角。“三线合一”即在等腰三角形中顶角的角平分线、底边上的中线、底边上的高线互相重合为一条线。

【模型解读】如图 3，在等腰ΔABC中，点 D 是底边 BC 上的中点，连接 AD，则有$BD=CD$，$\angle BAD=\angle CAD$，$AD\perp BC$。

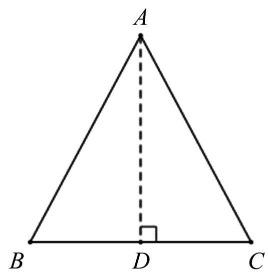

Figure 3. Isosceles triangle three-in-one model
图 3. 等腰三角形三线合一模型

2.3. 三角形中位线定理模型

当同时出现多条边的中点时，常常构造三角形的中位线；或当出现一个中点，要求证明线段平行或倍分关系时，也常常构造三角形的中位线。目的是利用三角形中位线定理得到线段位置上的“平行”和数量上的“倍分”关系，并得到相似三角形进而得到相关线段长的比例关系。“三角形中位线定理”即三角形的中位线平行于第三边(不与中位线接触)，并且等于第三边的一半。

【模型解读】如图 4，在ΔABC中，点 D 是 AB 边的中点，点 E 是 AC 边的中点，连接 DE，则有$DE\parallel BC$，$DE=\dfrac{1}{2}BC$。

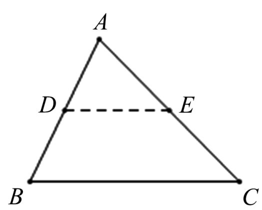

Figure 4. Triangle median line theorem model
图 4. 三角形中位线定理模型

2.4. 直角三角形斜边中线定理模型

当出现直角三角形斜边中点时，常常会作斜边上的中线。目的是利用直角三角形斜边中线定理，构建相应地等腰三角形获得相等的线段、相等的角度等。“直角三角形斜边中线定理”即直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。

【模型解读】如图 5，在 $Rt\Delta ABC$ 中，点 D 是斜边 AC 上的中点，连接 BD，则有 $AD = CD = BD = \frac{1}{2}AC$。

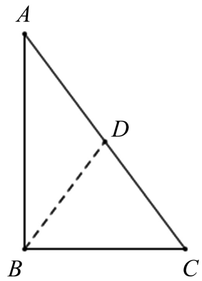

Figure 5. Right triangle diagonal midline theorem model
图 5. 直角三角形斜边中线定理模型

3. 中点模型解题示例

例 1 (2020 年北京中考第 27 题)在 ΔABC 中，$\angle C = 90^\circ$，$AC > BC$，D 是 AB 的中点。E 为直线 AC 上一动点，连接 DE，过点 D 作 $DF \perp DE$，交直线 BC 于点 F，连接 EF。1) 略；2) 当点 E 在线段 CA 的延长线上时，依题意补全图 6，用等式表示线段 AE，EF，BF 之间的数量关系，并证明。

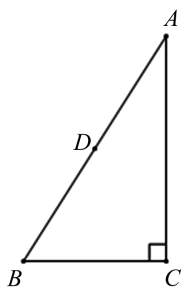

Figure 6. Question (2) the original graph
图 6. 第(2)问原图

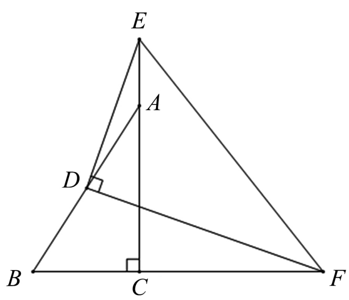

Figure 7. Question (2) completion graph
图 7. 第(2)问补全图

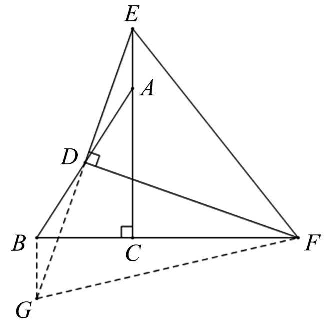

Figure 8. Construct a congruent triangle eight-character model
图 8. 构造全等三角形八字模型

【分析】此题对应全等三角形八字模型。由于 AE，EF，BF 比较分散，所以无法证明它们之间的数量关系，但是可以通过移动边的位置，使 AE，EF，BF 在位置上产生关联，进而证明它们之间的数量关系。因为 D 是 AB 的中点，由此可将 DE 延长一倍，构造全等三角形八字模型，得到两个全等三角形，实现相等的线段和相等的角度的转化，便可实现移动边的位置，即 $GD=ED$，$BG=AE$，进而可得 DF 是 EG 的垂直平分线，所以 $GF=EF$，因此将比较分散的 AE，EF，BF 转移到了同一个直角三角形中，利用勾股定理，即可求解。

【解】依题意补全图 6 得到上图 7。$AE^2+BF^2=EF^2$。证明：如图 8 所示，延长 ED 至点 G，使得 $GD=ED$，连接 GB、GF，在 ΔBDG 和 ΔADE 中，$GD=ED$，$\angle GDB=\angle EDA$，$BD=AD$，所以 $\Delta BDG\cong\Delta ADE$，所以 $BG=AE$，$\angle DGB=\angle DEA$，所以 $BG/\!/CE$，因为 $BG/\!/CE$，$\angle C=90^\circ$，所以 $\angle GBF=90^\circ$，又因为 $DF\perp DE$，$GD=ED$，所以 $GF=EF$，在 $Rt\Delta GBF$ 中，由勾股定理，得 $BG^2+BF^2=GF^2$，所以 $AE^2+BF^2=EF^2$。

【小结】本题解题的关键是构造全等三角形八字模型，利用全等三角形的判定、全等三角形的性质、两直线平行的判定、两直线平行的性质、垂直平分线的性质和勾股定理知识来解答。

例 2 (2022 年贵州铜仁中考第 14 题)如图 9，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=80^\circ$，延长 BC 到 E，在 $\angle DCE$ 内作射线 CM，使得 $\angle ECM=30^\circ$，过点 D 作 $DF\perp CM$，垂足为 F。若 $DF=\sqrt{6}$，则 BD 的长为____(结果保留根号)。

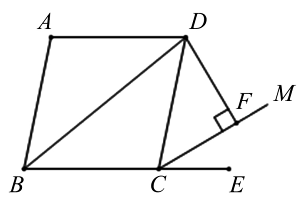

Figure 9. Example 2 original picture
图 9. 例 2 原图

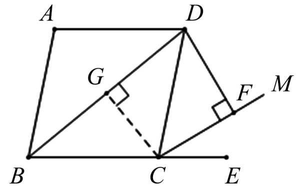

Figure 10. Construct an isosceles triangle three-in-one model
图 10. 构造等腰三角形三线合一模型

【分析】此题对应等腰三角形三线合一模型。因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $BC=CD$，所以 ΔBCD 为等腰三角形，由此可过点 C 作 $CG\perp BD$，垂足为点 G，构造等腰三角形三线合一模型，可得点 G 为 BD 的中点，进而利用全等三角形的判定定理 AAS，即可求解。

【解】因为四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=80^{\circ}$，所以 $BC=CD$，$\angle DCE=80^{\circ}$，$\angle ADC=80^{\circ}$，$\angle BDC=40^{\circ}$，因为 $\angle ECM=30^{\circ}$，所以 $\angle DCF=50^{\circ}$，又因为 $DF\perp CM$，所以 $\angle FDC=40^{\circ}$，过点 C 作 $CG\perp BD$，垂足为点 G，如图 10 所示，因为 $BC=CD$，$CG\perp BD$，所以点 G 是 BD 的中点，在 ΔDCG 和 ΔDCF 中，$\angle DGC=\angle DFC=90^{\circ}$，$\angle GDC=\angle FDC=40^{\circ}$，$DC=DC$，所以 $\Delta DCG\cong\Delta DCF$，所以 $DG=DF$，所以 $BD=2DG=2DF=2\sqrt{6}$，所以 $BD=2\sqrt{6}$。

【小结】本题解题的关键是构造等腰三角形三线合一模型，利用菱形的性质、全等三角形的判定、全等三角形的性质和等腰三角形三线合一性质知识来解答。

例 3 (2021 年北京中考第 27 题)如图 11，在 ΔABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=\alpha$，M 为 BC 的中点，点 D 在 MC 上，以点 A 为中心，将线段 AD 顺时针旋转 α 得到线段 AE，连接 BE，DE。1) 略；2) 过点 M 作 AB 的垂线，交 DE 于点 N，用等式表示线段 NE 和 ND 的数量关系，并证明。

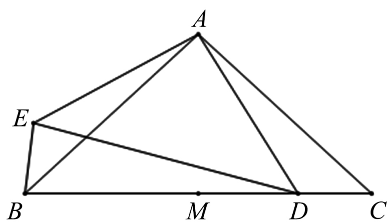

Figure 11. Example 3 original picture
图 11. 例 3 原图

【分析】此题对应三角形中位线定理模型。因为 M 为 BC 的中点，因此可以过点 E 作 $EG\,/\!/\,MN$ 交 BC 于点 G，构成三角形的中位线基本图形，进而利用三角形中位线定理，即可求解。

【解】$NE=ND$。证明：如图 12 所示，过点 E 作 $EG\,/\!/\,MN$ 交 BC 于点 G，交 AB 于点 O，因为 $MN\perp AB$，所以 $EG\perp AB$ 于点 O，在 ΔABC 中，$AB=AC$，所以 $\angle ABC=\angle ACB$，因为线段 AD 顺时针旋转 α 得到线段 AE，$\angle BAC=\alpha$，所以 $AE=AD$，$\angle EAD=\alpha$，所以 $\angle EAB+\angle BAD=\angle DAC+\angle BAD=\alpha$，所以 $\angle EAB=\angle DAC$，在 ΔABE 和 ΔACD 中，$AE=AD$，$\angle EAB=\angle DAC$，$AB=AC$，所以 $\Delta ABE\cong\Delta ACD$，所以 $BE=CD$，$\angle ABE=\angle ACB$，因为 $\angle ABC=\angle ACB$，所以 $\angle ABE=\angle ABC$，在 ΔOBE 和 ΔOBG 中，因为 $\angle EOB=\angle GOB=90^{\circ}$，$BO=BO$，$\angle OBE=\angle OBG$，所以 $\Delta OBE\cong\Delta OBG$，所以 $BE=BG$，因为 $BE=BG$，$BE=CD$，所以 $BG=CD$，又因为 M 为 BC 的中点，所以 $MG=MD$，即 M 为 DG 的中点，因为 $EG\,/\!/\,MN$，所以 MN 为 ΔEGD 的中位线，所以 N 为 ED 的中点，所以 $NE=ND$。

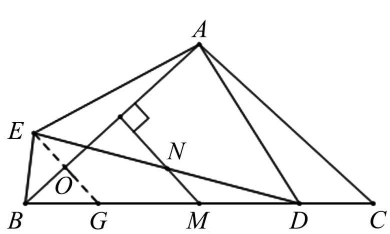

Figure 12. Construct triangle median line theorem model
图 12. 构造三角形中位线定理模型

【小结】本题解题的关键是构造三角形中位线定理模型，利用全等三角形的判定、全等三角形的性质和三角形中位线定理知识来解答。

例 4 (2020 年浙江温州中考第 22 题)如图 13，C，D 为$\odot O$ 上两点，且在直径 AB 两侧，连结 CD 交 AB 于点 E，G 是 $\overset{\frown}{AC}$ 上一点，$\angle ADC=\angle G$。1) 略；2) 点 C 关于 DG 的对称点为 F，连结 CF。当点 F 落在直径 AB 上时，$CF=10$，$\tan\angle 1=\dfrac{2}{5}$，求$\odot O$ 的半径。

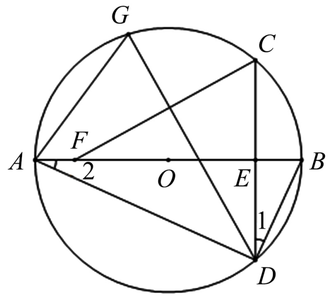

Figure 13. Example 4 original picture
图 13. 例 4 原图

【分析】此题对应直角三角形斜边中线定理模型。因为$\angle ADC=\angle G$，AB 为$\odot O$ 的直径，所以 $AB\perp CD$，ΔECF 为直角三角形，E 为 CD 的中点。又因为点 C，F 关于 DG 对称，所以 $DG\perp CF$，ΔHCD 为直角三角形，H 为 CF 的中点。出现两个直角三角形斜边中点，因此可连接 EH 构造两个直角三角形斜边中线定理模型($Rt\Delta ECF$ 与 $Rt\Delta HCD$)，即可求解。

【解】因为$\angle ADC=\angle G$，所以 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$，又因为 AB 为$\odot O$ 的直径，所以 $AB\perp CD$，$CE=ED$，E 为 CD 的中点，令 CF 与 DG 的交点为 H，因为点 C，F 关于 DG 对称，所以 $DG\perp CF$，H 为 CF 的中点，连接 EH，如图 14 所示，得到 $EH=\dfrac{1}{2}CF=\dfrac{1}{2}CD$，所以 $CD=CF=10$，$DE=5$，因为 $\tan\angle 1=\dfrac{2}{5}$，所以 $EB=DE\times\tan\angle 1=2$，因为$\angle 1=\angle 2$ (由第(1)问可得)，所以 $\tan\angle 2=\dfrac{2}{5}$，所以 $AE=\dfrac{DE}{\tan\angle 2}=\dfrac{25}{2}$，$AB=AE+EB=\dfrac{25}{2}+2=\dfrac{29}{2}$，所以 $OA=OB=\dfrac{29}{4}$，所以$\odot O$ 的半径为$\dfrac{29}{4}$。

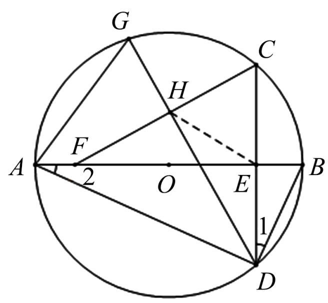

Figure 14. Construct a right triangle diagonal midline theorem model
图 14. 构造直角三角形斜边中线定理模型

【小结】本题解题的关键是构造直角三角形斜边中线定理模型，利用垂径定理的逆定理、对称的性质以及直角三角形斜边中线定理知识来解答。

4. 结束语

著名数学家、哲学家怀特海曾提出“数学是模式的科学”的观点，提出“数学的本质特征就是在模式化的个体抽象的过程中对模式进行研究”[4]。这些题看似与中点模型无关，因为中点模型在题目中呈现不完整，其实通过构造中点模型便可迎刃而解。这需要学生在解题时深入思考、善于联想，充分挖掘题目隐含条件[5]，通过中点这一重要条件，构造符合题意的中点模型来解题，便可使推理过程柳暗花明。中考几何压轴试题难在知识综合与图形分解，这就需要教师在讲解典型例题时讲明问题的本质，讲清基本图形，引导学生理解其中蕴含的数学思想方法，掌握一般的解题策略，再次遇到类似问题时才能引发关联思考并解决问题[6]。并且在平时教学中，教师应该有意识地指导学生从问题中提炼一些解题模型，归纳一些常用方法，即引导学生进行有效的总结与反思，这既能加深学生对知识的理解，丰富学生的知识结构，又能提升学生分析问题与解决问题的能力，有助于学生综合能力的提升与数学素养的发展。

总之，在初中数学中包含有众多的数学模型，上述所呈现的中点模型只是其中的一类，在教学时需要使学生深刻领悟其中的内涵，掌握模型适用的范围及对应思路，逐步提升学生使用模型解题的灵活性，促进学生的思维发展[7]。

基金项目

国家自然科学基金资助(11961068)。

参考文献

[1] 魏创, 黄道全. 构造常见几何模型 破解中考压轴试题[J]. 数理化学习(初中版), 2021(12): 17-20.

[2] 赵兴荣. 例谈中点相关问题的辅助线作法[J]. 中学数学教学参考, 2020(18): 32-34.

[3] 杨玲慧. 从“中点的联想”入手 培养学生问题解决能力——初中数学课堂中解构复杂图形的尝试[J]. 上海中学数学, 2022(6): 32-35.

[4] 王芳. 学生视角下几何综合题教学策略[J]. 中学教研(数学), 2021(5): 45-46.

[5] 张妞梅. 利用圆的模型思想巧解题[J]. 中学数学教学参考, 2022(27): 30-31.

[6] 范建兵. 解构中点问题 提升数学理解[J]. 数学教学通讯, 2022(2): 30-32.

[7] 季叶红. 探讨中点模型, 解读应用反思——以中点三大模型的探究为例[J]. 数学教学通讯, 2019(32): 78-80.