Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 2916-2922
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310298

Hans汉斯

不变调和函数梯度范数的一个估计

姚雨欣

天津职业技术师范大学理学院，天津

收稿日期：2023年9月10日；录用日期：2023年10月12日；发布日期：2023年10月23日

摘　要

本文讨论不变调和函数的梯度范数估计的最优系数 $C(x,l)$。根据不变Poisson核 $P(a,\eta)=\left(\frac{1-|a|^2}{|\eta-a|^2}\right)^{n-1}$ 及Möbius变换，计算出常数 $C(x,l)$ 的具体表达式。

关键词

不变Poisson核，Möbius变换，梯度范数

An Estimate of the Gradient Norm of the Invariant Harmonic Function

Yuxin Yao

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Sep. 10th, 2023; accepted: Oct. 12th, 2023; published: Oct. 23rd, 2023

Abstract

In this paper, we discuss the optimal coefficient $C(x,l)$ for the estimation of the gradient norm of the invariant harmonic function. According to the invariant Poisson kernel $P(a,\eta)=\left(\frac{1-|a|^2}{|\eta-a|^2}\right)^{n-1}$ and Möbius transforms, the specific expression of the constant $C(x,l)$ is calculated.

文章引用: 姚雨欣. 不变调和函数梯度范数的一个估计[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 2916-2922.
DOI: 10.12677/pm.2023.1310298

Keywords

Invariant Poisson Nucleus, Möbius Transform, Gradient Norm

1. 引言

不变调和函数是拉普拉斯－贝尔特拉米方程$u=0$的解，调和函数应用广泛，在数学、物理学以及随机过程理论中起重要作用。从 1992 年 Kresin 和 Maz'ya 对 Khavinson 猜想的提出开始，Dmitriy Khavinson 得到了单位球$B^3:=\{x\in\mathbb{R}^3:|x|<1\}$中的有界调和函数径向导数绝对值的一个最优点估计，并猜想：在B^3中有界调和函数的梯度模量的较强的点估计中应该出现相同的系数。Gershon Kresin 和 Vladimir Maz'ya 推测有界调和函数的梯度范数也有同样的估计，并提出有界调和函数的梯度模量的更强的不等式也是存在的，这一问题及其在半空间中的类似情况得到了更为一般的考虑。这类估计可用于与静电学以及理想流体的流体动力学、粘性不可压缩流体的弹性和流体动力学等有关的问题。这对研究在不变调和函数下的情况提供了便利。本文将先研究不变调和函数下的不变 Poisson 核及其梯度，然后通过不变 Poisson 核及 Möbius 变换探究函数为$C(x,l)$的单位球的积分表达式。为之后探究不变调和函数下的 Khavinson 猜想做铺垫。

2. 基础知识

设B为欧式空间单位球，且$\tilde{\Delta}$为B上的不变拉普拉斯算子。对于$x,y\in B,x\neq y$，$\tilde{\Delta}$对应的格林函数$G(x,y)$为[1]

$$G(x,y)=f\left(\left|\varphi_y(x)\right|\right)=\frac{1}{n}\int_{|\varphi_y(x)|}^{1}\frac{\left(1-s^2\right)^{n-2}}{s^{n-1}}\mathrm{d}s. \tag{1}$$

例 当$n=2$时，$\tilde{\Delta}f=\left(1-|x|^2\right)\Delta f=0$的一般解为$f(r)=\frac{1}{2}\log\frac{1}{r}$，即基本解为$f(|x|)=-\frac{1}{2}\log|x|$，易知

$$\frac{1}{2}\left(1-|x|\right)\leq f(x)\leq\frac{1-|x|}{2|x|} \tag{2}$$

当$n>2$时，估计$f(r)=\frac{1}{n}\int_r^1\frac{\left(1-s^2\right)^{n-2}}{s^{n-1}}\mathrm{d}s$中的积分，得到与$x$无关的正常数$C_1$和$C_2$使得对于所有的$x\in B,x\neq 0$，有

$$C_1\frac{\left(1-|x|^2\right)^{n-1}}{|x|^{n-2}}\leq f\left(|x|\right)\leq C_2\frac{\left(1-|x|^2\right)^{n-1}}{|x|^{n-2}} \tag{3}$$

定义 2.1 令$f\in C^2(B)$，$\tilde{\Delta}$可表示如下[1]：

$$\tilde{\Delta}f(x)=\left(1-|x|^2\right)\left[\left(1-|x|^2\right)\Delta f(x)+2(n-2)Rf(x)\right], \tag{4}$$

这里 Δ 是 Laplace 算子且 $Rf(x)=\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$。

注：(4)也可以改写为

$$\tilde{\Delta}f(x)=\left(1-|x|^2\right)^2\Delta f(x)+2(n-2)\left(1-|x|^2\right)\langle x,\nabla f(x)\rangle \tag{5}$$

定义 2.2 令 $f\in C^2(B)$。如果 $\tilde{\Delta}f(x)=0\ (x\in B)$，$f$ 就被称为 B 上的 M-不变调和函数(简称为不变调和函数或双曲调和函数)。本性有界不变调和函数空间记为 h^∞。

文献[2]给出 B 上的不变泊松核

$$P(x,y)=\left(\frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}\right)^{n-1} \tag{6}$$

经过基本但繁琐的计算可以证明，固定 $t\in S$，函数 $x\mapsto P(x,t)$ 在 B 上是 M-不变调和的[2]。反之，一般拉普拉斯算子 Δ 在 $B\times S$ 上的 Poisson 核 $\mathcal{P}$ 由

$$\mathcal{P}(x,t)=\frac{1-|x|^2}{|x-t|^n}\quad (x,t)\in B\times S \tag{7}$$

给出。

而 C^n 中 hermitian 双曲球 B 上的不变拉普拉斯算子 $\tilde{\Delta}$ 的 Poisson 核 $\tilde{\mathcal{P}}$ 由

$$\tilde{\mathcal{P}}(z,t)=\frac{\left(1-|z|^2\right)^n}{|1-\langle z,t\rangle|^{2n}}\quad (z,t)\in B\times S \tag{8}$$

给出。

定义 2.3 Möbius 变换与反演密切相关。一个形如 $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ 的 Möbius 变换可以分解成四个变换：

1) $f_1(z)=z+\frac{d}{c}$ (按 $\frac{d}{c}$ 做平移变换)

2) $f_2(z)=\frac{1}{z}$ (关于单位圆做反演变换，然后关于实数轴做镜面反射)

3) $f_3(z)=\frac{-(ad-bc)}{c^2}\cdot z$ (做关于原点的位似变换，然后做旋转)

4) $f_4(z)=z+\frac{a}{c}$ (按 $\frac{a}{c}$ 做平移变换)

这四个变换的复合就是 Möbius 变换。

3. $C(x, l)$的表示公式

令 $n\ge 3$。若 $u\in h^\infty$，我们用 $C(x)$ 表示在 $x\in B^n$ 处满足

$$|\nabla u(x)|\le C(x)\sup_{y\in B^n}|u(y)| \tag{9}$$

的最小常数(不依赖于 u)。对于每个 $l\in S^{n-1}$ 及 $x\in B^n$，用 $C(x,l)$ 表示在 x 处沿 l 方向满足

$$|\langle\nabla u(x),l\rangle|\le C(x,l)\sup_{y\in B^n}|u(y)| \tag{10}$$

的最优常数(不依赖于 u)。因为

$$\left|\nabla u(x)\right| = \sup_{l\in S^{n-1}} \left|\left\langle \nabla u(x), l\right\rangle\right| \tag{11}$$

我们有 $C(x) = \sup\limits_{l\in S^{n-1}} C(x,l)$。

我们猜想一个类似于有界调和函数的结果[3] [4] [5]。当 $x \in B^n \setminus \{0\}$ 时，有

$$C\left(x, \overrightarrow{n_x}\right) = C(x) \tag{12}$$

这里 $\overrightarrow{n_x}$ 是方向 $\frac{x}{|x|}$。

类似于[5]，易证下面引理：

引理 3.1 任给 $l \in \partial B^n$ 和 $x \in B^n$，则有 $C(Ax; Al) = C(x;l)$，其中 A 是 R^n 的正交变换。

下面给出 $C(x;l)$ 的积分表达式。

定理 3.2 任给 $l \in \partial B^n$ 和 $x \in B^n$，有

$$C(x;l) = \frac{2-2n}{1-|x|^2} \int_{\partial B^n} \left|\langle \eta, l\rangle\right| \mathrm{d}\delta(\eta) \tag{13}$$

$\mathrm{d}\delta$ 表示单位球 ∂B^n 的归一化面积测度。

证明： 设 $U(x)$ 为单位球 B^n 上的有界 M-不变调和函数，则几乎处处存在径向边界值：

$$U^*(\zeta) = \lim\nolimits_{r\to 1^-} U(r\zeta),\ \zeta \in \partial B^n \tag{14}$$

而且可以用 $U^*(\zeta)$ 的泊松公式表示 $U(x)$：

$$U(x) = P\left[U^*\right](l) = \int_{\partial B^n} P(l,\zeta) U^*(\zeta) \mathrm{d}\delta(\zeta). \tag{15}$$

注意到 $\tilde{\Delta}$ 的泊松核为

$$P(y,\zeta) = \left(\frac{1-|y|^2}{1-2y\zeta+|y|^2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1-|y|^2}{|\zeta-y|^2}\right)^{n-1} \tag{16}$$

经过 Möbius 变换计算得

$$\nabla P(x,\zeta) = \frac{-2x(n-1)\left(1-|x|^2\right)^{n-2} |x-\zeta|^2 - 2(n-1)\left(1-|x|^2\right)^{n-1}(x-\zeta)}{|x-\zeta|^{2n}} \tag{17}$$

因此任给 $l \in \partial B^n$ 和 $x \in B^n$，我们有

$$\left\langle \nabla U(x), l\right\rangle = \int_{\partial B^n} \left\langle \nabla P(x,\zeta), l\right\rangle U^*(\zeta) \mathrm{d}\delta(\zeta) = \Lambda_l\left(U^*\right), \tag{18}$$

上面方程左边的 Λ_l 表示 U^* 的泛函。考虑 $L^\infty\left(B^n\right)$ 和 $L^\infty\left(\partial B^n\right)$ 上所有有界调和函数的空间之间通过泊松延拓等距同构，Λ_l 也可以看作 $L^\infty\left(B^n\right)$ 上的有界线性泛函，且有

$$\left\|\Lambda_l\right\| = C(x;l) = \int_{\partial B^n} \left\langle \nabla P(x,\zeta), l\right\rangle \mathrm{d}\delta(\zeta) \tag{19}$$

设 $T_x(y)$ 是 B 上的 Möbius 变换[2]：

$$T_x(y) = \frac{\left(1-|x|^2\right)(y-x) - |y-x|^2 x}{[y,x]^2}, \tag{20}$$

其中 $[y,x]=|y||y^*-x|$，$y^*=\dfrac{y}{|y|^2}$。

映射 $T_x(y)$ 将单位球变换为它本身，当限制在单位球面上时，有如下形式：

$$\begin{aligned}T_x(\eta)&=\frac{\left(1-|x|^2\right)(\eta-x)-|\eta-x|^2x}{[\eta,x]^2}\\&=\frac{\left(1-|x|^2\right)(\eta-x)-|\eta-x|^2x}{|\eta-x|^2}\\&=\frac{\left(1-|x|^2\right)(\eta-x)}{|\eta-x|^2}-x\end{aligned}$$

下面做变量替换：$\zeta=-T_x(\eta)$。

首先，将 $x-\zeta=\left(1-|x|^2\right)\dfrac{\eta-x}{|\eta-x|^2}$，$|x-\zeta|=\dfrac{1-|x|^2}{|\eta-x|}$ 代入到 $\nabla P(x,\zeta)$ 中去，

$$\begin{aligned}\nabla P(x,\zeta)&=\frac{-2x(n-1)\left(1-|x|^2\right)^{n-2}|x-\zeta|^2-2(n-1)\left(1-|x|^2\right)^{n-1}(x-\zeta)}{|x-\zeta|^{2n}}\\&=\frac{-2x(n-1)\left(1-|x|^2\right)^{n-2}\dfrac{\left(1-|x|^2\right)^2}{|\eta-x|^2}-2(n-1)\left(1-|x|^2\right)^{n-1}\dfrac{\eta-x}{|\eta-x|^2}\left(1-|x|^2\right)}{\dfrac{\left(1-|x|^2\right)^{2n}}{|\eta-x|^{2n}}}\\&=\frac{\left[(2-2n)x\left(1-|x|^2\right)^n+(2-2n)\left(1-|x|^2\right)^n(\eta-x)\right]|\eta-x|^{2n-2}}{\left(1-|x|^2\right)^{2n}}\\&=\frac{(2-2n)[x+\eta-x]|\eta-x|^{2n-2}}{\left(1-|x|^2\right)^n}\\&=\frac{(2-2n)\cdot\eta\cdot|\eta-x|^{2n-2}}{\left(1-|x|^2\right)^n}\end{aligned}$$

由于

$$\mathrm{d}\delta(\zeta)=\frac{\left(1-|x|^2\right)^{n-1}}{|\eta-x|^{2n-2}}\mathrm{d}\delta(\eta)\tag{21}$$

我们有

$$\langle\nabla P(x,\zeta),l\rangle\mathrm{d}\delta(\zeta)=(2-2n)\left(1-|x|^2\right)^{-1}\langle\eta,l\rangle\mathrm{d}\delta(\eta)\tag{22}$$

因此，

$$C(x;l)=\int_{\partial B^n}\left|\left\langle \nabla P(x,\zeta),l\right\rangle\right|\mathrm{d}\delta(\zeta)$$
$$=(2-2n)\left(1-|x|^2\right)^{-1}\int_{\partial B^n}\left|\left\langle \eta,l\right\rangle\right|\mathrm{d}\delta(\eta)$$

定理 3.3 任给 $l\in\partial B^n$ 和 $x\in B^n$，有

$$\frac{1-\rho^2}{2-2n}C\left(\rho\vec{e_1},\vec{l}\right)=C \tag{23}$$

证明： $\forall\vec{l}\in\partial B^n$，存在一个正交变换 A，使得

$$A\vec{l}=\vec{e_1},A\vec{e_1}=\vec{e_1}\cos\alpha+\vec{e_2}\sin\alpha,\ \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \tag{24}$$

则有：

$$\frac{1-\rho^2}{2-2n}C\left(\rho\vec{e_1},\vec{l}\right)=\int_{\partial B^n}\left|\left\langle A^{-1}\eta,\vec{l}\right\rangle\right|\mathrm{d}\delta(\eta)$$
$$=\int_{\partial B^n}\left|\left\langle \xi,\vec{e_1}\right\rangle\right|\mathrm{d}\delta(\xi)$$
$$=\int_{\partial B^n}|\xi_1|\mathrm{d}\delta(\xi)$$

利用球坐标：

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ \varphi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi]\\ z=r\cos\varphi\end{cases} \tag{25}$$

得到，

$$\int_{\partial B^n}|\xi_1|\mathrm{d}\delta(\xi)=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}|r\cos\theta\sin\varphi|\mathrm{d}\theta$$
$$=r\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}|\cos\theta|\mathrm{d}\theta$$
$$=0$$

$$\int_{\partial B^n}|\xi_2|\mathrm{d}\delta(\xi)=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}|r\sin\theta\sin\varphi|\mathrm{d}\theta$$
$$=r\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}|\sin\theta|\mathrm{d}\theta$$
$$=8r$$

$$\int_{\partial B^n}|\xi_3|\mathrm{d}\delta(\xi)=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}|r\cos\varphi|\mathrm{d}\theta$$
$$=r\int_0^{\pi}|\cos\varphi|\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$$
$$=4\pi r$$

则

$$\frac{1-\rho^2}{2-2n}C\left(\rho\vec{e_1},\vec{l}\right)=\int_{\partial B^n}\left|\left\langle A^{-1}\eta,\vec{l}\right\rangle\right|\mathrm{d}\delta(\eta)=C \tag{26}$$

4. 结论

根据以上探究，总结得到：

$$C(x;l)=\frac{2-2n}{1+|x|}\int_{\partial B^n}\left|\left\langle \eta,l\right\rangle\right|\mathrm{d}\delta(\eta)$$

且

$$\frac{1-\rho^2}{2-2n}C\left(\rho\vec{e_1},\vec{l}\right)=\int_{\partial B^n}\left|\left\langle A^{-1}\eta,\vec{l}\right\rangle\right|\mathrm{d}\delta\left(\eta\right)=C$$

即不变调和函数的 Khavinson 猜想的最优值为常数。为之后研究 Khavinson 猜想的结论、性质做铺垫。

参考文献

[1] 史济怀, 刘华. 关于 R^n 中实单位球上 M-调和 BMO 函数的 Carleson 测度特征[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2003, 24(5): 593-602.

[2] Protter, M.H. and Weinberger, H.F. (1984) Maximum Principles in Differential Equations. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5282-5

[3] Khavinson, D. (1992) An Extremal Problem for Harmonic Functions in the Ball. *Canadian Mathematical Bulletin*, **35**, 218-220. https://doi.org/10.4153/CMB-1992-031-8

[4] Kresin, G. and Maz'ya, V. (2012) Maximum Principles and Sharp Constants for Solutions of Elliptic and Parabolic Systems. In: *Mathematical Surveys and Monographs*, Vol. 183. American Mathematical Society, Providence. https://doi.org/10.1090/surv/183

[5] Kresin, G. and Maz'ya, V. (2010) Optimal Estimates for the Gradient of Harmonic Functions in the Multidimensional Half-Space. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **28**, 425-440. https://doi.org/10.3934/dcds.2010.28.425