Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 2942-2947
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310301

Hans汉斯

S-弱鞅的一类Marshall型极大值概率不等式

岳　丹，鲁雅莉，冯德成

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年9月11日；录用日期：2023年10月13日；发布日期：2023年10月24日

摘　要

本文利用S-弱鞅的一个Chow型极大值概率不等式，得到了关于S-弱鞅的一类Marshall型极大值概率不等式。

关键词

S-弱鞅，Chow型极大值不等式，Marshall型极大值不等式

A Class of Marshall Type Maximal Inequality for Strong Demimartingales

Dan Yue, Yali Lu, Dengcheng Feng

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Sep. 11th, 2023; accepted: Oct. 13th, 2023; published: Oct. 24th, 2023

Abstract

In this paper, a class of Marshall type maximal inequality is obtained for strong demimartingales by using a Chow type maximal inequality.

Keywords

Strong Demimartingales, Chow Type Maximal Inequality, Marshall Type Maximal Inequality

文章引用: 岳丹, 鲁雅莉, 冯德成. S-弱鞅的一类 Marshall 型极大值概率不等式[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 2942-2947.
DOI: 10.12677/pm.2023.1310301

1. 简介和预备知识

在本文中，$\{S_n, n \ge 1\}$ 或 $\{X_n, n \ge 1\}$ 表示定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上的随机变量序列，$S_0 \equiv 0$，I_A 表示集合 A 的示性函数。

定义 1 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是 L^1 随机变量序列，称 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是相协的是指对于任意使下述协方差存在的分量不减的函数 f 和 g，都有

$$Cov\left(f\left(X_1,\cdots,X_n\right), g\left(X_1,\cdots,X_n\right)\right) \ge 0$$

定义 2 设 $\{S_n, n \ge 1\}$ 是 L^1 随机变量序列，称 $\{S_n, n \ge 1\}$ 是一个弱鞅是指对任意使下述期望存在的分量不减的函数 f，以及 $j = 1,2,\cdots$ 都有

$$E\left[\left(S_{j+1} - S_j\right) f\left(S_1,\cdots,S_j\right)\right] \ge 0 \tag{1.1}$$

Newman 和 Wright 在文献[1]中提出了弱鞅的概念以及弱鞅的 Chow 型极大值不等式，并证明了均值为零的相协序列的部分和序列是一个弱鞅。之后众多学者基于此概念进行了进一步的研究，并给出了一些有意义的结果[2] [3] [4] [5]。Christofides [6]推广了 Chow 型极大值概率不等式，并利用它得到了弱鞅的强大数定律。

定义 3 设 $\{S_n, n \ge 1\}$ 是 L^1 随机变量序列，称 $\{S_n, n \ge 1\}$ 是一个 S-弱鞅是指对任意使下述协方差存在的分量不减的函数 f 和 g，以及 $j = 1,2,\cdots$ 都有

$$Cov\left(g\left(S_{j+1} - S_j\right), f\left(S_1,\cdots S_j\right)\right) \ge 0 \tag{1.2}$$

S-弱鞅的概念由 Hadjikyriakou 于文献[7]中提出，该文献给出了 S-弱鞅的中心极限定理。一个随机变量序列 $\{S_n, n \ge 1\}$，其中 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$，$\{X_n\}$ 是相协的，则序列 $\{S_n, n \ge 1\}$ 是一个 S-弱鞅，此外，如果 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是一个零均值序列，则序列 $\{S_n, n \ge 1\}$ 是一个弱鞅。文献[8]给出了 S-弱鞅的 Chow 型极大值概率不等式和 Brunk-Prokhorov 型强大数定律。

注 相协随机变量的部分和序列是一个 S-弱鞅，各项均值相同的 S-弱鞅是一个弱鞅。

一般地，设 X 是零均值的平方可积随机变量，对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$P\left(X \ge \varepsilon\right) \le \frac{EX^2}{\varepsilon^2 + EX^2}$$

Marshall [9]将上述概率不等式推广到如下形式

$$P\left(\max_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{k} X_i \ge \varepsilon\right) \le \frac{\sum_{i=1}^{n} EX_i^2}{\varepsilon^2 + \sum_{i=1}^{n} EX_i^2}, \ \forall \varepsilon > 0 \tag{1.3}$$

这里 $EX_1 = 0$，$E\left(X_1 \middle| X_1, X_2, \cdots, X_{i-1}\right) = 0$，$2 \le i \le n$，且 $EX_i^2 < \infty$，$1 \le i \le n$。此不等式也被称为 Marshall 型极大值概率不等式。

在上述条件下，如果令 $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$，则 $\{S_i, i \le 1 \le n\}$ 是一个鞅。Mu 和 Miao [10]将(1.3)式推广到如下形式

$$P\left(\max_{1\le k\le n} S_k \ge \varepsilon\right) \le \frac{E\left|S_n\right|^p}{\alpha^{1-p}\varepsilon^p + E\left|S_n\right|^p} \tag{1.4}$$

这里，$E\left|X_i\right|^p < \infty$，$i = 1,2,\cdots,n$，且 $p \ge 2$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，其中 α 是下列函数的最大值

$$h(x)=1-x+(1-x)^{2-q}x^{q-1},x\in[0,1]$$

特别地，当 $p=2$ 时，(1.4)式为(1.3)式所表示的 Marshall 型极大值概率不等式。

Hu [11]将文献[10]中的结论推广到弱鞅情形下，得到了弱鞅的Marshall型极大值和极小值概率不等式。文献[12]将文献[11]中关于弱鞅 $\{S_n,n\ge1\}$ 的Marshall型极大值概率不等式推广到弱鞅函数的情形下。

受到上述文献的启发，文本利用S-弱鞅的一个Chow型极大值概率不等式，得到了关于S-弱鞅 $\{S_n,n\ge1\}$ 的一类Marshall型极大值概率不等式。

2. 主要结论及其证明

引理 1 [13] 若 $E|X|^p<\infty$，$E|Y|^q<\infty$，则有

$$E|XY|\le\left(E|X|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(E|Y|^q\right)^{\frac{1}{q}},p>1 \tag{2.1}$$

$$E|XY|\ge\left(E|X|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(E|Y|^q\right)^{\frac{1}{q}},0<p<1 \tag{2.2}$$

引理 2 [8] 设 $\{S_n,n\ge1\}$ 是一个 S-弱鞅，M 是一个常数，且 $ES_k\le M$，$k\ge1$，则对任意 $\varepsilon>M-ES_n$，有

$$P\left(\max_{1\le k\le n}S_k\ge\varepsilon\right)\le\frac{1}{\varepsilon-M+ES_n}E\left[S_nI_{[\max_{1\le k\le n}S_k\ge\varepsilon]}\right] \tag{2.3}$$

特别地，当 $M=0$ 时，有

$$P\left(\max_{1\le k\le n}S_k\ge\varepsilon\right)\le\frac{1}{\varepsilon+ES_n}E\left[S_nI_{[\max_{1\le k\le n}S_k\ge\varepsilon]}\right]$$

引理 3 设 $\{S_n,n\ge1\}$ 是一个 S-弱鞅，且对任意 $n\ge1$ 有 $ES_n\le0$，假定存在 $p>1$，使得对所有 $n\ge1$，都有 $E|S_n|^p<\infty$。则对任意 $\varepsilon>-ES_n$，有

$$\left[p(\wedge)(1-p(\wedge))^q+p(\wedge)^q(1-p(\wedge))\right]^{\frac{1}{q}}\left(E|S_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ge(\varepsilon+ES_n)p(\wedge) \tag{2.4}$$

其中 $\wedge=\{\max_{1\le k\le n}S_k\ge\varepsilon\}$。

证明 记 $Y=I_\wedge$，由引理 1 中的(2.1)式和引理 2，可得

$$\begin{aligned}\left(E|Y-EY|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(E|S_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}&\ge E|(Y-EY)S_n|\\&\ge E\left[(Y-EY)S_n\right]\\&=E(YS_n)-EYES_n\\&=E\left[I_\wedge S_n\right]-EI_\wedge ES_n\\&\ge E\left[I_\wedge S_n\right]\\&\ge(\varepsilon+ES_n)P(\wedge)\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}E|Y-EY|^q&=|EY|^q(1-P(\wedge))+|1-P(\wedge)|^qP(\wedge)\\&=(P(\wedge))^q(1-P(\wedge))+(1-P(\wedge))^qP(\wedge)\end{aligned}$$

结论得证。

定理 1 设$\{S_n, n \ge 1\}$是一个 S-弱鞅，且对任意$n \ge 1$，$ES_n \le 0$。若存在$p > 1$，使得对任意$n \ge 1$，有$0 < E|S_n|^p < \infty$，则对任意$\varepsilon > -ES_n$，有

$$P(\wedge) \le \frac{1}{1+N}$$

其中N是下面方程的正解

$$x^q = (\beta-1)x + \beta, x \in (0,\infty) \tag{2.5}$$

这里$\beta = (\varepsilon + ES_n)^q \Big/ \left(E|S_n|^p\right)^{q/p}$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\wedge = \{\max_{1\le k\le n} S_k \ge \varepsilon\}$。

证明 当$P(\wedge)=0$，结论显然成立，下面考虑$P(\wedge)>0$的情况。由引理 3 可知

$$\left[P(\wedge)(1-P(\wedge))^q + P(\wedge)^q(1-P(\wedge))\right]\left[E|S_n|^p\right]^{\frac{q}{p}} \ge (\varepsilon+ES_n)^q P(\wedge)^q$$

两边同除以$P(\wedge)^q$可得

$$\left[P(\wedge)\frac{(1-P(\wedge))^q}{P(\wedge)^q} + (1-P(\wedge))\right]\left(E|S_n|^p\right)^{\frac{q}{p}} \ge (\varepsilon+ES_n)^q$$

令$x_0 = \frac{1-P(\wedge)}{P(\wedge)}$，$\beta = \frac{(\varepsilon+ES_n)^q}{\left(E|S_n|^p\right)^{\frac{q}{p}}}$，则有$P(\wedge)=\frac{1}{1+x_0}$。

因此

$$\frac{x_0{}^q}{1+x_0} + \frac{x_0}{1+x_0} \ge \beta$$

即

$$x_0{}^q \ge (\beta-1)x_0 + \beta$$

令$h(x) = x^q - (\beta-1)x - \beta$，易得$h(x)$有唯一正解，设$N$是方程(2.5)的唯一正解，由于当$x \in (0,+\infty)$时，$h''(x) = q(q-1)x^{q-2} > 0$，因此对任意$x \in (0,N)$，有

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} \le \frac{h(N)-h(x)}{N-x}$$

由于$h(0) = -\beta < 0$且$h(N)=0$，所以对任意$x \in (0,N)$，有$h(x)<0$。故N是使(2.5)式成立的最小正值，结论得证。

推论 1 设$\{S_n, n \ge 1\}$是一个 S-弱鞅，对任意$n \ge 1$，$ES_n \le 0$且$ES_n = ES_{n+1}$。若存在$p>1$，使得对任意$n \ge 1$，有$0 < E|S_n|^p < \infty$，则对任意$\varepsilon > -ES_n$，有

$$P(\wedge) \le \frac{1}{1+N}$$

其中N为下面方程的正解

$$x^q = (\beta-1)x + \beta, x \in (0,\infty)$$

这里$\beta = (\varepsilon + ES_n)^q \Big/ \left(E|S_n|^p\right)^{q/p}$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\wedge = \{\max_{1\le k\le n} S_k \ge \varepsilon\}$。

证明 当S-弱鞅各项期望都相等时，该序列是一个弱鞅序列，则由文献[12]中推论2，结论得证。

定理2 设$\{S_n, n\ge 1\}$是一个S-弱鞅，且满足$ES_n \le 0$，$n\ge 1$。假定存在一个$p\ge 2$，使得对任意$n\ge 1$，有$E|S_n|^p<\infty$，则对任意$\varepsilon > -ES_n$，有

$$P\left(\max_{1\le k\le n} S_k \ge \varepsilon\right) \le \frac{E|S_n|^p}{(\varepsilon+ES_n)^p \alpha^{1-p} + E|S_n|^p}$$

这里α为$h(x)=1-x+(1-x)^{2-q}x^{q-1}$ 在区间$[0,1]$上的极大值。

证明 显然$h(x)$在区间$[0,1]$上有极大值，设此极大值为α，因为

$$\begin{aligned}
&\left[P(\wedge)(1-P(\wedge))^q + (1-P(\wedge))P(\wedge)^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= P(\wedge)^{\frac{1}{q}}(1-P(\wedge))^{\frac{1}{p}}\left[(1-P(\wedge))^{q-\frac{q}{p}} + (1-P(\wedge))^{1-\frac{q}{p}} P(\wedge)^{q-1}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= P(\wedge)^{\frac{1}{q}}(1-P(\wedge))^{\frac{1}{p}}\left[(1-P(\wedge)) + (1-P(\wedge))^{2-q} P(\wedge)^{q-1}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\le P(\wedge)^{\frac{1}{q}}(1-P(\wedge))^{\frac{1}{p}}\alpha^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

根据(2.5)式

$$\alpha^{\frac{1}{q}} P(\wedge)^{\frac{1}{q}}(1-P(\wedge))^{\frac{1}{p}}\left(E|S_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge (\varepsilon+ES_n)P(\wedge)$$

即

$$\alpha^{\frac{1}{q}}(1-P(\wedge))^{\frac{1}{p}}\left(E|S_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge (\varepsilon+ES_n)P(\wedge)^{1-\frac{1}{q}}$$

上式两边同时p次方

$$\alpha^{\frac{p}{q}}(1-P(\wedge))\left(E|S_n|^p\right) \ge (\varepsilon+ES_n)^p P(\wedge)$$

则

$$P\left(\max_{1\le k\le n} S_k \ge \varepsilon\right) \le \frac{E|S_n|^p}{(\varepsilon+ES_n)^p \alpha^{1-p} + E|S_n|^p}$$

结论得证。

基金项目

国家自然科学基金项目(12261080, 62261049)，西北师范大学研究生科研资助项目(2021KYZZ02093)。

参考文献

[1] Newman, C.M. and Wright, A.L. (1982) Associated Random Variables and Martingale Inequalities. *Zeitschrift Für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **59**, 361-371. https://doi.org/10.1007/BF00532227

[2] Wang, J.F. (2004) Maximal Inequalities for Associated Random Variables and Demimartingales. *Statistics & Probability Letters*, **66**, 347-354. https://doi.org/10.1016/j.spl.2003.10.021

[3] 胡舒合, 杨文志, 王学军, 沈燕. 关于N-弱鞅和弱鞅不等式的一个注记[J]. 系统科学与数学, 2010, 30(8): 1052-1058.

[4] Christofides, T.C. and Hadjikyriakou, M. (2012) Maximal Moment Inequalities for Demimartingales and *N*-Demimartingales. *Statistics & Probability Letters*, **82**, 683-691. https://doi.org/10.1016/j.spl.2011.12.009

[5] Prakasa Rao, B.L.S. (2012) Remarks on Maximal Inequalities for Non-Negative Demisubmartingales. *Statistics & Probability Letters*, **82**, 1388-1390. https://doi.org/10.1016/j.spl.2012.03.019

[6] Christofides, T.C. (2000) Maximal Inequalities for Demimartingales and a Strong Law of Large Numbers. *Statistics & Probability Letters*, **50**, 357-363. https://doi.org/10.1016/S0167-7152(00)00116-4

[7] Hadjikyriakou, M. (2017) Normal Approximation for Strong Demimartingales. *Statistics & Probability Letters*, **122**, 104-108. https://doi.org/10.1016/j.spl.2016.10.029

[8] Feng, D.C. and Zhang, X.M. (2023) Maximal Inequalities and the Strong Law of Large Numbers for Strong Demimartingales. *Statistics & Probability Letters*, **193**, Article ID: 109708. https://doi.org/10.1016/j.spl.2022.109708

[9] Marshall, A.W. (1960) A One-Sided Analog of Kolmogorov's Inequality. *The Annals of Mathematical Statistics*, **31**, 483-487. https://doi.org/10.1214/aoms/1177705912

[10] Mu, J.Y. and Miao, Y. (2011) Generalizing the Marshall's Inequality. *The Communications in Statistics Theory and Methods*, **40**, 2809-2817. https://doi.org/10.1080/03610926.2010.493276

[11] Hu, S.H., Wang, X.J. and Yang, W.Z. (2012) Some Inequalities for Demimartingales and N-Demimartingales. *Statistics & Probability Letters*, **82**, 232-239. https://doi.org/10.1016/j.spl.2011.10.021

[12] 冯德成, 王英, 李琴社. 弱鞅的一类 Marshall 型极大值不等式[J]. 吉林大学学报(理学版), 2018, 56(4): 825-829.

[13] 林正炎, 白志东. 概率不等式[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 656-657.