Pure Mathematics **理论数学, 2023, 13(10), 3000-3006**
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310309

Hans汉斯

浅析转化思想与分析法在初中数学解题的研究

鲁成全

广东技术师范大学，数学与系统科学学院，广东 广州

收稿日期：2023年9月16日；录用日期：2023年10月17日；发布日期：2023年10月30日

摘　要

几何直观与推理能力是义务阶段数学核心素养的一部分，本文利用波利亚《怎样解题》的“变化问题”与“倒着干”章节中所蕴含的思想与方法，结合解题的案例探究提升学生数学核心素养能力的有效途径。

关键词

数学核心素养，转化，分析法

A Brief Analysis of the Research on Transformational Thinking and Analytical Methods in Solving Mathematics Problems in Junior Middle Schools

Chengquan Lu

School of Mathematics and Systems Science, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou Guangdong

Received: Sep. 16th, 2023; accepted: Oct. 17th, 2023; published: Oct. 30th, 2023

Abstract

Geometric intuition and reasoning ability are part of the core competencies of mathematics at the compulsory stage. This article uses the ideas and methods contained in the “Change Problems” and “Working Backwards” chapters of Polya’s *How to Solve Problems*. Explore the effective ways to improve students’ mathematical core literacy ability combined with the cases of problem solving.

文章引用: 鲁成全. 浅析转化思想与分析法在初中数学解题的研究[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 3000-3006.
DOI: 10.12677/pm.2023.1310309

Keywords

Core Literacy of Mathematics, Transformation, Analysis Method

1. 问题提出

《义务教育数学课程标准》提到，数学源自于对现实世界的抽象，基于抽象结构，通过符号运算、形式推理、模型构建等，理解和表达现实世界中事物的本质、关系和规律。数学在形成人的理性思维、科学精神和促进个人智力发展的过程中发挥着不可替代的作用。会用数学的眼光观察现实世界，会用数学的思维思考现实世界，会用数学的语言表达现实世界。数学素养是现代社会每一个人应该具备的基本素养。数学核心素养在义务教育阶段主要表现为：抽象能力、运算能力、几何直观、空间观念、推理能力、数据观念、模型观念、应用意识、创新意识[1]。这九大素养相互独立又相辅相成，共同构建成一个有机的整体。数学解题的思维是数学核心素养形成的重要环节。

几何直观与推理能力作为数学核心素养的一部分，学生几何直观能力也因个体发展的差异性，尽管在培养的过程中花费时间多，依旧造成几何直观的能力参差不齐。推理能力作为数学中隐形的能力，很难去量化，导致其培养的方法模糊不清，但是数学素养是一个有机的整体，在学习平面图形时，单纯的直观想象能力的发展，容易割裂整体结构的核心素养。而将推理能力与直观想象能力相结合，形成小结构的闭环训练方式，不失为一种培养整体数学素养的方式。结合波利亚的《怎样解题》相关内容进行剖析。

波利亚在《怎样解题》中谈到了，解题的四个步骤包括：理解题目、拟定方案、执行方案、回顾。每个步骤都涵括了极为重要的数学思想与方法[2]。理解题目是解题的基础，在理解题目中的信息，对题目中的条件，未知量等数据有清晰的认识之后，再来进行解题的下一步，即拟定方案。本次剖析主要从变化题目与倒着干的小章节的内容中挖掘重要信息，即拟定方案中帮助解题法的方法，从中帮助学生掌握更为有效的解题思维与方法。

1.1. “变化问题”的智慧

波利亚提到在解题的过程中，如果想成功的解决一个问题时，取决于选择正确的角度，取决于从容易接近的一侧来进行有效的解题。那么从哪些角度入手才能使得问题能够轻松解决，这个过程需要不断地变化问题，从中寻找到能够将问题转化为已有的知识结构，从而找到解决的角度。这种转化化归的思想是数学中最常见的思想之一，转化的过程是解题者自身推理能力的实践，两者密切相关。在培养直观想象能力的同时，借助于习题将转化划归的数学思想融入到解题中。那么这两种素养能力的融合，深层次体现出数学素养之间的相互依存，相互促进的作用。所以变化问题的思维过程与解题时采用的分析法是相吻合的。二者的思维活动主要是：1) 理解分析题目中的未知量、已知量、条件、要证明的结论等；2) 运用已有的认知结构对题目中的条件进行练习，用相关联的知识转化题干中给出的有效已知量；3) 反复变化其中的未知量，将转化后的内容与结论，题干进行联系，最终完成解体的过程。下面借助于例题进行分析研究。

1.2. “倒着干”的智慧

波利亚在《怎样解题》提到了一个问题：如果你只有两个容积分别是 4 升与 9 升的容器，怎样从一条河中恰好取出 6 升的水[2]？面对这个问题，我们挖掘题目信息并从中寻找解题角度，发现问题中的容器并没有已有知识结构中能够借助的刻度，体积等能够解题的信息，只能借助于两个容器相互倾倒这样的方式。那么从正面出发寻找解题的角度就是，预设每次的操作再加以分类讨论。第一步分为两类，一是 4 升装满倒入 9 升容器中，二是 9 升容器的水倒入 4 升容器中，第二步第三步以此类推。通过分类可以解决问题，但由于不可预知其中需要多少个步骤，故从正面的方式较为困难解决此问题。那么针对此问题分类讨论的方法则不太适合。此时如果从结论出发，可以得到 9 升的容器中恰好有 6 升水，那么此时可以说明 6 升的水通过 9 升容器灌满后倒掉了 3 升的水得到的，那么 3 升的水只能从 4 升的容器中得到，继而发现 4 升容器中原来恰好有 1 升水，而 4 升容器中得到 1 圣水则需要用到 9 升的容器，发现只需要 9 升的容器灌满后倒掉两个 4 升的水就可以得到 1 升的水。恰好是我们想知道的 4 升容器中的 1 升水的由来。那么整个过程就从结论出发以此类推到第一步。从这种思维模式可以看到一个关键的过程，迂回前进，脱离目标，倒着干。思维遵循的与操作的是相反的次序。这种逆向思维的倒着干与解题中的分析法是相似的思维流程。

在我们的初中解题过程中，转化与化归的思想和分析法是我们在解题训练中必不可少的解题素养，这两者又同时为隐形的数学素养，那么在培养提升学生的两种不同的数学能力时，如何有机的结合一起，从而达到提升学生的目的[3]。下面依据两个平面几何的例题进行分析。

2. 案例分析

案例一：如图 1，在正方形 ABCD 中，点 E 在 AD 边上，且 DE = 3AE，连接 BE，CE，EF 平分∠BEC，过点 B 作 BF⊥EF，若正方形的边长为 4，求 GF 的长。

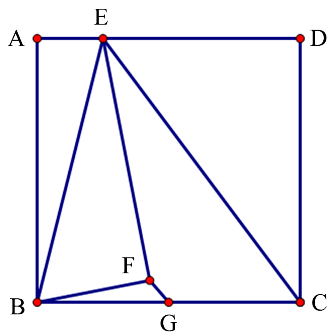

Figure 1. Case 1
图 1. 案例 1

理解题目：题干中已有的信息四边形 ABCD 是正方形且边长为 4，E 为四等分点，EF 平分∠BEC，∠EFB 是直角。

“变化题目”与“倒着干”：分析题目中的条件，正方形和 DE = 3AE 的条件，我们将从那些角度变化题目，此如，在四边形中存在四个直角，可作出有直角三角形，所以上述题干信息，可转化为直角三角形求斜边的内容，者也是学生已经学握的知识结构，变化的问题与未知量 GF 的长度还是没有明显的联系，那从结论出发，用倒着干的思想去解题。那么 GF 的长度可变成什么问题？而角平分线的条件中可以找到两条斜边 EC 与 EB 间存在关系，即利用 EF 平分∠BEC 所以得到 E 上存在点 H 使得 EB = EH

并且 $\Delta FBE \cong \Delta FHE$，故而通过变化问题可以找到 GF 与 HC 长度的关系，而 G，F 分别是 BH，BC 的中点，利用中位线可得 GF 的长度。

通过变化问题中的条件信息，变化题目建立条件与结论之间的联系，最后通过制定方案完成相应的解题过程。而第四步回顾则是通过检查解题的书面过程对解题的思路有更为清晰的认识。

延伸：如图 2，在正方形 ABCD 中，点 E 在 AD 边上，且 $DE = 3AE$，连接 BE，CE，EF平分∠BEC，过点 B 作 $BF \perp EF$，若正方形的边长为 4，则∆BFC 的面积是多少？

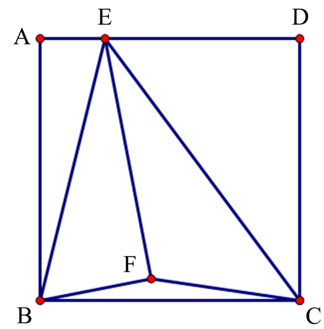

Figure 2. Variation 1
图 2. 延伸 1

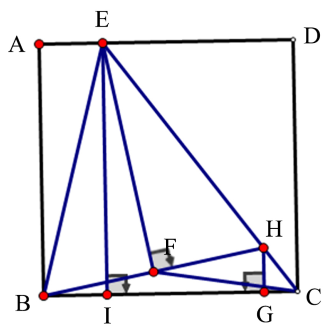

Figure 3. Variation 2
图 3. 变式 2

“变化题目”与“倒着干”：依据案例一中的分析，对问题中的信息都可进行变化，其中同案例一分析过程类似，延长 BF 交 EC 于点 H。此时从结论倒着干的思维出发，三角形 BFC 的面积从 BC 与点 F 到 BC 的高，转化为求 F 到 B 的高，但发现此高与题中变化后的条件并无任何关系，无法从中找到关联的知识结构。故此不妨变化问题的角度，将三角形 BFC 面积换底表示，从中可发现 BF 为底时，高为 C 到 BH 的距离，此时问题变为怎样求以底为 BF 的三角形 BFC。通过关联活动可以发现三角形 BHC 的面积是三角形 BFC 的两倍，故将问题转化为三角形 BHC 的面积，此时由前面转化的信息，可以发现 H 到 BC 的高可以利用正方形的比，即作 $EI \perp BC$ 于点 I，从而与前面的已知信息中 $\Delta HGC \sim \Delta EIC$ 从而得到 HG 的长度。从中可以发现，将面积问题转化为求高的长度，从而求得三角形 BF 从的面积。由此可将题干信息中的未知量，已知量与结论建立起联系，即拟定方案。

制定方案(分析法)：如图 3，延长 BF 至 EC 于点 H，因为 $CF \perp BF$、且 EF 为∠BEC 的平分线，所以 $\angle BE = \angle CEB$，$\angle BFE = \angle HFC$，所以 $\Delta BFE \cong \Delta HFE(ASA)$，所以 $BE = EH = AB^2 + AE^2 = \sqrt{7}$。那么可以得到 $HC = EC - EH = \sqrt{ED^2 + DC^2} - EH = 5 - \sqrt{17}$。作 $HG \perp BC$ 于点 G，$EI \perp BC$ 于点 I，故有 $IC = ED = 3$，

$EI = 4$，所以 $\Delta HGC \sim \Delta EIC(AAA)$。从而得到 $\frac{HG}{EH} = \frac{HC}{EC}$，所以有 $HG = \frac{20-4\sqrt{7}}{5}$，因为 $BF = FH$，所以 $S_{\Delta BFC} = \frac{1}{2} S_{\Delta BHC} = \frac{20-4\sqrt{7}}{5}$。

案例二：如图 4，在四边形 ABCD 中，$\angle ADC = 90^{\circ}$，$\tan\angle DAB = \frac{4}{3}$，M、N 分别为对角线 AC、BD 的中点，若 CD = 2，AB = 6，求 MN 的长度？

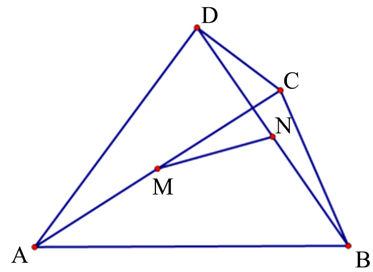

Figure 4. Case 2
图 4. 案例 2

分析一：

理解题目：题干中已有的信息 M、N 分别 AC、BD 的中点。两个角的大小，$\angle ADC$ 是直角，$\tan\angle DAB$ 的正切值是 $\frac{4}{3}$，两条边长分别是 CD = 2，AB = 6。

“变化题目”与“倒着干”：MN 是 AC，BD 的中点，题中出现两点个中点，常常将中点于中位线只是联系在一起，但题中并不能将两个中点看作是一个三角形的中位线，故“变化角度”做辅助线将两点构建成一个中位线，其中包含两种方案，一是连接 DM 并延长作三角形的中位线，二是连接 CN 并延长作中位线，但方案二中会发现，做出的辅助线与题中其他信息无关联的情况。故选方案一，由此作出 BK = 2MN，将求 MN 的长度变化为求 BK 的长度，进而联系田间中的已知量发现 BK 长度通过勾股定理或相似全等求得，经过“变化问题”寻找角度时发现正切值的方法不能与其他信息联系起来，从而转变为求 BG 与 GK 的长度，通过转化发现，点 M 既是 DK 也是 AC 的中点，故可将 CD 的长度与 AK 联系在一起，进而建立与已知条件中 $\tan\angle DAB$ 的正切值的联系，那么就转变为求与$\angle DAB$ 相关的角度，此时会得到 $\angle DAB = \angle AKG$，故由此将所有条件信息都建立起关系。回顾拟定方案的过程实质是结论出发，倒着干，并且穿插着变化问题的思考模式，寻找角度与已知条件结合。最终建立的联系。

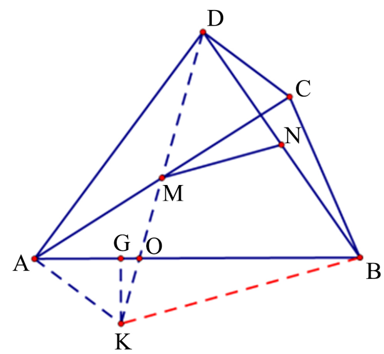

Figure 5. Variation 3
图 5. 变式 3

如图 5，延长 DM 到 K，使得 MK = DM，连接 AK，CK，BK，作 $KG \perp AB$ 于点 G，设 AB 交 CK 于点 O。

分析二：

“变化题目”与“倒着干”：从条件出发变化问题寻找关联，MN 中点，构建三角形的中点与中位线，而已知两边 CD 与 AB 作为底边，故而可作出 AD 与 CB 的中点，依次连接可发现其与 MN 可构建一个平行四边形，进而求 MN 的长度的问题进行变化，平行四边形中已知两邻边求对角线 MN 的高，于是作 N 到 PM 的高，由此题干中已知信息串联在一起。其中 PN 与 AB 平行，可由此将题中∠DAB 的正切线值变转化为∠PNE 的正切值，由此转变为一个直角三角形中已知直边比与斜边长，所以 MN 的长度可由 RTΔPNE 中的直角边解得。从而得到 MN 的长度。由此整个题目中的已知信息通过变化与所要求的建立起相关联系。

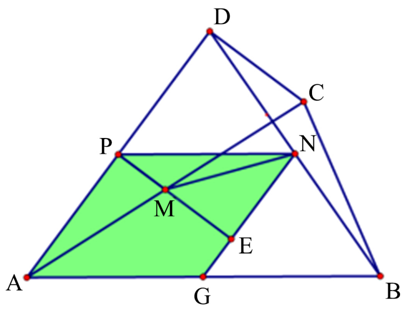

Figure 6. Variation 4
图 6. 变式 4

制定方案(分析法)：如图 6，作 AD 中点，AB 中点 G，延长 PM 交 NG 于点 E，因为 P、N 为中点，所以 $PN \parallel AG$，且 PN = AG，所以 AGNP 为平行四边形，即可得到$\angle DAB = \angle PNE$，因为 $PN \parallel AG$，所以 $\angle ADC = \angle APM = \angle NEP = 90^\circ$，所以ΔPEN 为直角三角形，即 $\frac{PE}{NE} = \tan\angle DAB = \frac{4}{3}$，那么设 NE = 3x，PE = 4x，PN = 3，在直角三角形 PNE 中，由勾股定理，可解的 $x = \frac{2}{3}$，所以得到 $ME = PE - PM = \frac{6}{5}$，在直角三角形 NME 中可得 $ME = \sqrt{ME^2 + NE^2} = \frac{\sqrt{130}}{5}$。

3. 回顾反思

“变化问题”的解题思维模式是我们在培养学生解题能力的重要内容之一，是数学中转化划归思想的基本思维模式。将问题变化为我们熟悉的问题进行解决。“倒着干”的解题方法在面对各种各样的题目时，其都可以是解题过程中变化问题的一个角度，并且随着对“倒着干”方法不断加以运用后，从刚开始的仅局限于利用结论反过来推理，到后面将其运用在变化问题的各个变化角度。继而转化为解题中常用的数学思维。将几何直观与推理能力两种数学素养结合在一起。以下有两点建议。

3.1. 注重数学思维的养成

解题是培养学生的数学推理能力的核心素养的重要方式。“变化问题”在解题中所蕴含的是划归的数学思想，在教学过程中，注重化归思想在解题中的应用，同时划归思想与分析法相结合，既帮助学生在解题中开阔数学思维，也提升学生不拘于传统教学解题中的套模板的刻板解题，在培养数学推理能力也能形成相应的作用。

3.2. 渗透解题过程的内涵

解题是学习数学不可避免的阶段，但解题也并不是所谓的题海战术，而是通过教学，潜移默化的引导学生学会怎样解题。借助《怎样解题》中蕴含的思想，融入到实际的教学解题中，深刻体会出解题过程的内涵，帮助学生激发解题的兴趣。

总而言之，平面几何的教学并不意味着单纯的培养学生的几何直观的核心素养，还包括将几何直观与推理能力核心素养相结合，尤其在解题中可以被广泛运用，避免核心素养的分割，让整体性的数学核心素养真正的落实到实践中。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.

[2] 波利亚. 怎样解题[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2007: 186-192.

[3] 唐举. 数学推理能力培养的着眼点: 问题多样呈现与合理化归[J]. 数学之友, 2017(5): 12-14.