

求解一维Allen-Cahn方程的保能量耗散 Du Fort-Frankel格式

梁雨欣

南昌航空大学, 数学与信息科学学院, 江西 南昌

收稿日期: 2023年9月18日; 录用日期: 2023年10月19日; 发布日期: 2023年10月31日

摘要

Allen-Cahn方程的保结构算法常常是全隐线性格式或全隐非线性格式。为提高计算效率, 本文提出一类显式Du Fort-Frankel格式, 所得数值解保持能量耗散定律。最后, 数值结果验证了格式的有效性和保能量耗散性, 同时在空间网格为 h , 时间步长 $\tau = h^2$ 的情况下, 得到数值解具有二阶的收敛精度。

关键词

Allen-Cahn方程, Du Fort-Frankel格式, 离散能量稳定性

Energy Dissipation Du Fort-Frankel Scheme for 1D Allen-Cahn Equation

Yuxin Liang

College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi

Received: Sep. 18th, 2023; accepted: Oct. 19th, 2023; published: Oct. 31st, 2023

Abstract

The structure-preserving algorithms for the Allen-Cahn equation are often fully implicit linear schemes or fully implicit nonlinear schemes. To improve computational efficiency, a class of explicit Du Fort-Frankel (DFF) schemes, whose numerical solutions inherit the energy dissipation law is proposed in this study. Finally, numerical results verify the validity and energy dissipation of the scheme. At the same time, under the condition of space grid h and time step $\tau = h^2$, the numerical solutions converge to exact solution with an order of $O(h^2)$.

Keywords

Allen-Cahn Equation, Du Fort-Frankel Scheme, Energy Stability

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非线性抛物方程是一类重要的偏微分方程，来源于自然界中广泛存在的非线性现象。相变理论、渗透理论、图像处理和生物化学理论等领域中的许多问题都可以用这种方程来描述。Allen-Cahn 方程是一类重要的二阶非线性抛物方程，该方程描述了形成界面和相互作用的过程。最早由 Allen 和 Cahn [1] 提出，用于刻画二元合金在固定温度下相分离的过程。在过去的几十年中，Allen-Cahn 方程及其各种修正形式广泛应用于科学和工程领域，如材料科学中的界面动力学[2] [3]、图像分割[4] [5]、相变[6] [7]和晶体生长[8] [9]。

本文将研究如下一维非线性 Allen-Cahn 方程的初边值问题(IBVP)

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon^2 \Delta u = f(u), & x \in \Omega, t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ u(x, t) = \varphi(x, t), & x \in \partial\Omega, t \in (0, T]. \end{cases} \quad (1)$$

其中 u 表示二元合金中的一个金属部件的浓度， $\varepsilon > 0$ 表示接口的宽度，非线性项 $f(u) = -F'(u)$ ， $F(u) = \left[b(1-u^2)^2 \right] / 4$ 。在文献[10]中，Du 等利用谱方法解决非局部 Allen-Cahn 方程问题。Xiao 等在文献[11]中分析了 Allen-Cahn 方程有限元方法的稳定性。Zhai 等在文献[12]中关于 Allen-Cahn 方程建立了线性化高阶紧致差分方法，并采用交替方向隐格式减少计算量。Strachota 等在文献[13]中利用有限体积方法求解 Allen-Cahn 方程并给出误差估计。另外，还可以利用重心插值配点法[14]和配点法[15]求解 Allen-Cahn 方程。但传统的数值方法在处理 Allen-Cahn 方程时常常面临保结构性的问题，众所周知，它的精确解具有能量耗散性，即：

当 $\varphi(x, t) = 0$ ， $((x, t) \in \partial\Omega \times [0, T])$ 时，定义能量 $E(t)$ 和 $F(t)$ 如下

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + 2F(u) dx dy + c, \quad (2)$$

$$F(t) = \|u_t\|^2 + \frac{d}{dt} E(t) \quad (3)$$

则有 $F(t) = 0$ 和当 $t \leq t'$ 时有 $E(t') \leq E(t)$ ， c 为任意常数。

这个性质在研究 Allen-Cahn 方程的解的稳定性中很重要，并且能否在离散水平上继承这个性质是数值模拟中的一个重要问题。由于方程中存在梯度平方的项，传统的数值算法可能会出现数值耗散或者数值剧烈震荡的现象，从而导致数值解的不稳定性和不准确性。保结构数值算法在长时间数值模拟，以及提供高分辨率的数值解方面有显著优势。令人高兴的是，许多学者提出了各种各样的保结构算法。例如，文献[16]提出了 Allen-Cahn 方程的保最大值原理和能量耗散性的一阶线性隐显格式。文献[17]讨论了广义 Allen-Cahn 方程保最大值原理的一阶线性隐显格式。[18] [19] [20]中讨论了 Allen-Cahn 方程无条件能量稳

定的有限差分法和有限元法。文献[21] [22] [23] [24] [25]对 Allen-Cahn 方程设计了一系列既保最大值原理又无条件能量稳定的差分法。大量的数值结果表明,尽可能继承原方程的性质可以产生更可靠的数值解,并有效地避免非物理振荡。

可以看出, Allen-Cahn 方程的保结构算法常常是全隐线性格式,或者全隐非线性格式。它们计算复杂,耗时多。在文献[26]中,林研究了此方程组的显式保结构 Du Fort-Frankel 差分格式。陈等在文献[27]中提出一类非线性延迟波动方程的无条件稳定 Du Fort-Frankel 差分格式。张在文献[28]中建立了一维非线性耦合波动方程组的 Du Fort-Frankel 格式。王等在文献[29]中建立了 CNLS 方程组的显式保结构 Du Fort-Frankel 差分格式。受到抛物方程的 DFF 差分法和文献工作的启发,本文运用 Du Fort-Frankel 格式,对 IBVP(1)构造了一类显式保能量耗散差分格式。该算法对网格条件并不苛刻且计算效率高,能够有效地保持离散能量的耗散性。本文将对算法进行详细地理论分析,并通过数值实验验证其可靠性。

本文的其余部分组织如下,在第二节中给出符号说明。第三节给出了保能量耗散 Du Fort-Frankel 格式的构造过程。第四节讨论了该格式的离散能量稳定性。第五节利用数值算例验证理论分析的准确性。第六节给出结论与展望。

2. 符号说明

取时间步长 $\tau = T/N$ ($N \in \mathbb{Z}^+$), 记 $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$ 。对区域 $\bar{\Omega}_\tau$ 进行剖分 $\bar{\Omega}_\tau = \{t_k | 0 \leq k \leq N\}$, 且记 $\Omega_\tau = \{t_k | 0 \leq k \leq N-1\}$ 。在时间区域 Ω_τ 上, 差分算子定义如下:

$$\delta_t v^{k+\frac{1}{2}} = \frac{v^k - v^{k-1}}{\tau}, \quad \delta_t v^k = \frac{v^{k+1} - v^{k-1}}{2\tau} = \frac{\delta_t v^{k+\frac{1}{2}} + \delta_t v^{k-\frac{1}{2}}}{2}, \quad \delta_t^2 v^k = \frac{\delta_t v^{k+\frac{1}{2}} - \delta_t v^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{v^{k+1} - 2v^k + v^{k-1}}{\tau^2}$$

另外取空间步长 $h_x = (b-a)/M$ ($M \in \mathbb{Z}^+$), 记 $x_i = a + ih_x$, $i = 0, 1, 2, \dots, M$ 。对区域 Ω_h 进行剖分 $\Omega_h = \{x_i | 1 \leq i \leq M\}$, 并且 $\partial\Omega_h = \{x_i | i = 0 \text{ 或 } M\}$, 记 $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \partial\Omega_h$ 。令 $S_h = \{v | v = \{v_i | x_i \in \bar{\Omega}_h\}\}$, $S_h^0 = \{v | v \in S \text{ 且当 } x_i \in \partial\Omega_h \text{ 时有 } v_i = 0\}$ 为网格函数。在区域 Ω_h 上, $\forall v \in S_h$ 时, 空间区域上的差分算子定义如下:

$$\delta_x v_{i+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}, \quad \Delta_h v_i = \delta_x^2 v_i = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}$$

当 $\forall U, V \in S_h^0$, 内积和范数定义如下:

$$\langle U, V \rangle = h \sum_{i=1}^{M-1} U_i V_i, \quad \langle \delta_x U, \delta_x V \rangle = h \sum_{i=1}^{M-1} \delta_x U_{i-\frac{1}{2}} \delta_x V_{i-\frac{1}{2}}, \quad \|V\|^2 = \langle V, V \rangle, \quad 1$$

$$|V|_{H^1}^2 = \|\delta_x V\|^2 = \langle \delta_x V, \delta_x V \rangle, \quad \|V\|_{H^1}^2 = \|V\|^2 + |V|_{H^1}^2, \quad \|V\|_\infty = \max |V_i^k|$$

为了方便起见, 下面定义一些集合:

$$\Gamma = \{k | 1 \leq k \leq N-1\}, \quad \partial\Gamma = \{k | k = 0 \text{ 或 } N\}, \quad \Upsilon = \{i | 1 \leq i \leq M-1\}, \quad \partial\Upsilon = \{i | i = 0 \text{ 或 } M\}$$

3. 差分格式的建立

本节讨论保能量耗散 Du Fort-Frankel 格式的建立。记 u_i^k , U_i^k 分别表示保能量耗散 Du Fort-Frankel 格式在 (x_i, t_k) 处的精确解和数值解。

在结点 (x_i, t_k) 处考虑方程(1)有

$$u_t(x_i, t_k) = \alpha \Delta u(x_i, t_k) - F'[u(x_i, t_k)] \quad (4)$$

其中 $\alpha > 0$, 利用 Du Fort-Frankel 有限差分法, $\delta_t u_i^k$ 和 $\frac{F(u_i^{k+1}) - F(u_i^{k-1})}{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}$ 分别离散 $\Delta u(x_i, t_k)$, $u_t(x_i, t_k)$ 和 $F'[u(x_i, t_k)]$, 并且在等式左端加上稳定项 $\beta^2 \tau^2 \delta_t^2 u_i^k$ 可得

$$\delta_t u_i^k + \beta^2 \tau^2 \delta_t^2 u_i^k + \alpha \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \delta_t^2 u_i^k = \alpha \delta_x^2 u_i^k - \frac{F(u_i^{k+1}) - F(u_i^{k-1})}{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}} + R_i^k, i \in Y, k \in \Gamma. \tag{5}$$

其中

$$R_i^k = \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \zeta_k) + \alpha \left[\frac{\tau^2}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_k) - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_k) \right] + \beta^2 \tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \varrho_k) + \tau b \left\{ \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, \eta_{k_1})\right)^2}{2 \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, \eta_{k_2})} \left[3(u(x_i, \eta_{k_3}))^2 - 1 \right] + \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, \eta_{k_4})\right)^2}{2 \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, \eta_{k_5})} \left[3(u(x_i, \eta_{k_5}))^2 - 1 \right] \right\} \tag{6}$$

$$x_{i-1} \leq \zeta_i \leq x_{i+1}, t_k \leq \eta_{k_1}, \eta_{k_3} \leq t_{k+1}, t_{k-1} \leq \eta_{k_4}, \eta_{k_5} \leq t_k, t_{k-1} \leq \zeta_k, \xi_k, \varrho_k, \eta_{k_2} \leq t_{k+1}.$$

由于差分格式(9)~(12)是三层格式, 已知第 0 层的数值解, 为了启动计算, 第一层的数值解采用以下差分格式[30]计算

$$\delta_t u_i^{\frac{1}{2}} - \alpha \delta_x^2 u_i^0 - b u_i^0 + b u_i^1 (u_i^0)^2 = R_i^0, i \in Y. \tag{7}$$

求出第一层的数值解, 其中

$$R_i^0 = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \zeta_0) + b \tau [u(x_i, t_0)]^2 \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, \xi_0) - \alpha \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_0), t_0 \leq \zeta_0, \xi_0 \leq t_1, x_{i-1} \leq \zeta_i \leq x_{i+1} \tag{8}$$

在方程(5)和(7)中略去小量项 R_i^k ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$), 用数值解 U_i^k 代替精确解 u_i^k , 得到如下保能量耗散 Du Fort-Frankel 格式

$$\delta_t U_i^k + \beta^2 \tau^2 \delta_t^2 U_i^k + \alpha \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \delta_t^2 U_i^k = \alpha \delta_x^2 U_i^k - \frac{F(U_i^{k+1}) - F(U_i^{k-1})}{U_i^{k+1} - U_i^{k-1}}, i \in Y, k \in \Gamma, \tag{9}$$

$$\delta_t U_i^{\frac{1}{2}} = \alpha \delta_x^2 U_i^0 + b U_i^0 - b U_i^1 (U_i^0)^2, i \in Y \tag{10}$$

$$U_i^0 = u(x_i, t_0), i \in Y \cup \partial Y, \tag{11}$$

$$U_i^k = \varphi(x_i, t_k), i \in \partial Y, k \in \Gamma. \tag{12}$$

4. 离散能量的耗散性

引理 1 (cf. [31]) 对于任意网格函数 $U \in S_h^0$, 有以下结论成立。

$$h^2 \|\delta_x V^2\| \leq 4 \|V\|^2$$

引理 2 对于任意网格函数 $U \in S_h^0$, 有以下结论成立。

$$\langle \delta_x U_i^{k+1}, \delta_x U_i^k \rangle \geq \left\| \delta_x U^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \left\| \delta_t U^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2$$

证利用等式 $ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$ 以及引理 1 可得

$$\langle \delta_x U_i^{k+1}, \delta_x U_i^k \rangle = \left\| \delta_x U^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \frac{\tau^2}{4h^2} \left\| \delta_t U^{k+\frac{1}{2}} \right\|_{H^1}^2 \geq \left\| \delta_x U^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \left\| \delta_t U^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2. \quad (13)$$

定理 1 设 $\{U_i^k | i \in \Upsilon \cup \partial\Upsilon, 0 \leq k \leq N\}$ 是差分格式(9)~(12)的解。离散能量 E^k 和 F^k 分别定义为

$$E^k = \frac{(\alpha + \beta^2 h^2) \tau^2}{2h^2} \left\| \delta_t U^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \frac{\alpha}{2} \langle \delta_x U_i^{k+1}, \delta_x U_i^k \rangle + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{M-1} [F(U_i^{k+1}) + F(U_i^k)], \quad (14)$$

$$F^k = \left\| \delta_t U^k \right\|^2 + \delta_t E^{k-\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

则有 $F^k = 0 (k=1, 2, \dots, N-1)$ 和 $E^k \leq E^{k-1}, k=1, 2, \dots, N-1$, 并且有 $E^k \geq 0, k=1, 2, \dots, N-1$ 。

证首先将(9)两边同时与 $\delta_t U_i^k$ 作内积, 并运用格林公式可得

$$\begin{aligned} \left\| \delta_t U^k \right\|^2 &= \left\langle \alpha \delta_x^2 U_i^k - \left(\alpha \frac{\tau^2}{h^2} + \beta^2 \tau^2 \right) \delta_t^2 U_i^k, \delta_t U_i^k \right\rangle - \left\langle \frac{F(U_i^{k+1}) - F(U_i^{k-1})}{U_i^{k+1} - U_i^{k-1}}, \frac{U_i^{k+1} - U_i^{k-1}}{2\tau} \right\rangle \\ &= -\frac{\alpha}{2\tau} [\langle \delta_x U_i^{k+1}, \delta_x U_i^k \rangle - \langle \delta_x U_i^k, \delta_x U_i^{k-1} \rangle] - \frac{(\alpha + \beta^2 h^2) \tau^2}{2h^2} \left(\left\| \delta_t U^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left\| \delta_t U^{k-\frac{1}{2}} \right\|^2 \right) \\ &\quad - \frac{h}{2\tau} \sum_{i=1}^{M-1} [F(U_i^{k+1}) + F(U_i^k) - F(U_i^k) - F(U_i^{k-1})] \end{aligned}$$

根据(14), 上式可等价写为

$$F^k = \left\| \delta_t U^k \right\|^2 + \delta_t E^{k-\frac{1}{2}} = 0, \quad k=1, 2, \dots, N-1$$

故有 $E^k \leq E^{k-1} (k=1, 2, \dots, N-1)$ 成立。

另外, 由引理 2 有

$$\begin{aligned} E^k &= \frac{(\alpha + \beta^2 h^2) \tau^2}{2h^2} \left\| \delta_t U^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \frac{\alpha}{2} \langle \delta_x U_i^{k+1}, \delta_x U_i^k \rangle + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{M-1} [F(U_i^{k+1}) + F(U_i^k)] \\ &\geq \frac{\beta^2 \tau^2}{2} \left\| \delta_t U^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| \delta_x U^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{M-1} [F(U_i^{k+1}) + F(U_i^k)] \geq 0 \end{aligned}$$

证毕。

5. 数值实验

本节将给出求解一维 Allen-Cahn 方程的两个数值算例, 以证实理论结果的正确性和算法的高效性。为了验证算法的精度, 在 t_k 处数值解在不同范数下的误差定义如下: L^∞ 范数误差为 $ME(h, \tau) = \|u^k - U^k\|_\infty$, L^2 范数误差为 $LE(h, \tau) = \|u^k - U^k\|$, H^1 范数误差为 $HE(h, \tau) = \|u^k - U^k\|_{H^1}$ 。其对应的收敛阶定义为: $MR_1 = \log_2 [ME(2h_x, 2\tau) / ME(h_x, \tau)]$, $LR_1 = \log_2 [LE(2h_x, 2\tau) / LE(h_x, \tau)]$, $HR_1 = \log_2 [HE(2h_x, 2\tau) / HE(h_x, \tau)]$ 。

算例 1 [32] 考虑如下一维 Allen-Cahn 方程的 IBVP

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu(1-u^p), \quad -L < x < L, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{p}{2\sqrt{2p+4}} x \right] + \frac{1}{2}, \quad -L \leq x \leq L, \\ u(L, t) &= \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{p}{2\sqrt{2p+4}} \left(L - \frac{p+4}{\sqrt{2p+4}} t \right) \right] + \frac{1}{2}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(-L, t) &= \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{p}{2\sqrt{2p+4}} \left(-L - \frac{p+4}{\sqrt{2p+4}} t \right) \right] + \frac{1}{2}, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

当 $p=2$ 时，上述方程组为一维 Allen-Cahn 方程的 IBVP，特别地，当 $\alpha=b=1$ 时该方程的精确解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{p}{2\sqrt{2p+4}} \left(x - \frac{p+4}{\sqrt{2p+4}} t \right) \right] + \frac{1}{2}$$

令 $\Omega = [-5, 5]$ ， $T = 1$ ，以及参数 $\alpha = b = 1$ 。图 1 展示了运用差分法(9)~(12)，在取参数 $\beta = 3$ ，空间步长 $h = 1/8$ ，时间步长 $\tau = 1/64$ 和参数 $\beta = 30$ ，空间步长 $h = 1/16$ ，时间步长 $\tau = 1/256$ 两种情况下求出的误差曲面图，由此可以看出数值解能够较好地逼近精确解。表 1 给出了取 $\beta = 3$ 时，差分格式(9)~(12)在取不同网格步长时所得数值解 u_i^k 的误差与收敛阶，表 2 给出了取 $\beta = 30$ 时，差分格式(9)~(12)在取不同网格步长时所得数值解 u_i^k 的误差与收敛阶，表明差分法(9)~(12)在最大范数意义下具有时间一阶空间二阶的收敛阶。验证了算法的高效性并且数值结果与理论结果相吻合。

Table 1. Numerical results at $T = 1$ obtained by our FDMs for example 1 with $\beta = 3$ ($\tau = h^2$)

表 1. 取 $T = 1$ 和 $\beta = 3$ 时本文有限差分格式所获数值结果($\tau = h^2$)

h	ME	MR_1	LE	LR_1	HE	HR_1	CPU
$\frac{1}{8}$	4.2463e-03	*	6.5852e-03	*	8.3411e-03	*	0.014695
$\frac{1}{16}$	9.7806e-04	2.1182	1.5097e-03	2.1250	1.9172e-03	2.1212	0.049261
$\frac{1}{32}$	2.3907e-04	2.0325	3.6865e-04	2.0339	4.6823e-04	2.0337	0.374173

Table 2. Numerical results at $T = 1$ obtained by our FDMs for Example 1 with $\beta = 30$ ($\tau = h^2$)

表 2. 取 $T = 1$ 和 $\beta = 30$ 时本文有限差分格式所获数值结果($\tau = h^2$)

h	ME	MR_1	LE	LR_1	HE	HR_1	CPU
$\frac{1}{8}$	4.1152e-02	*	7.1061e-02	*	8.8050e-02	*	0.013634
$\frac{1}{16}$	4.1817e-03	3.2988	6.4868e-03	3.4535	8.2298e-03	3.4194	0.061100
$\frac{1}{32}$	4.4335e-04	3.2376	6.8397e-04	3.2455	8.6870e-04	3.2439	0.298399

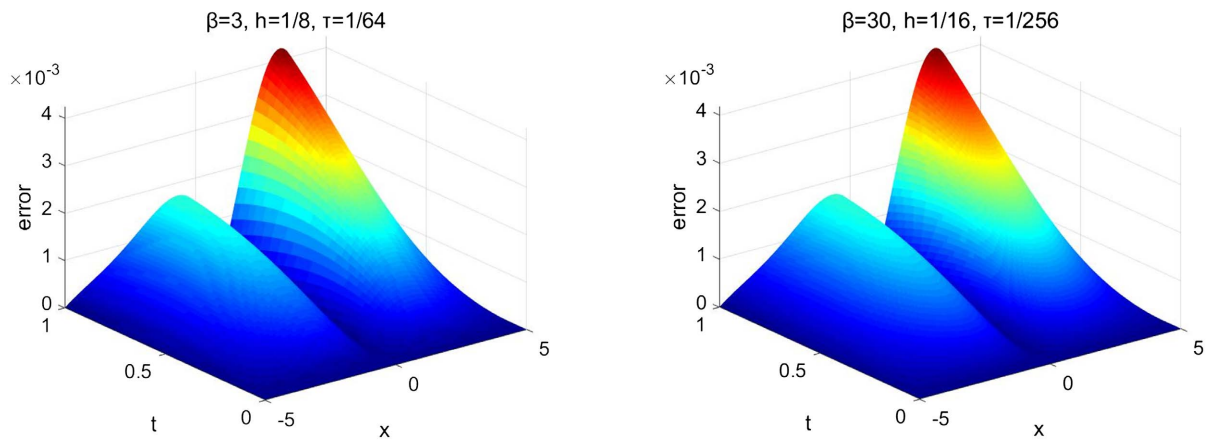
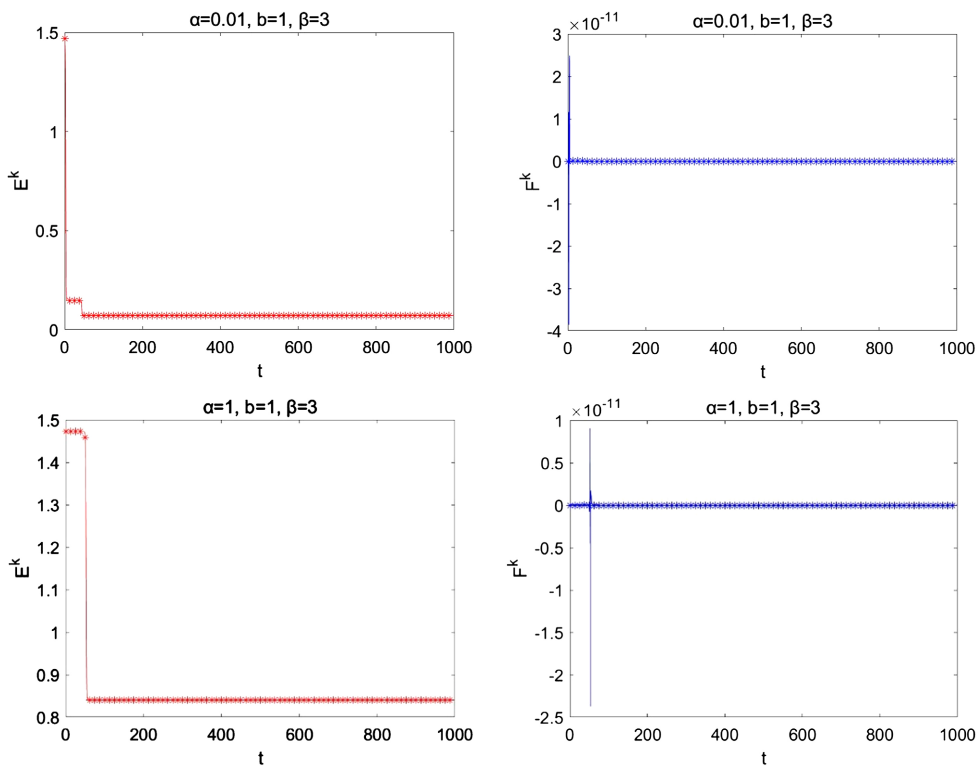


Figure 1. The surfaces of the error for different parameters β , h and τ
图 1. 取不同 β 和步长时的误差曲面图

算例 2 [24] 考虑如下一维 Allen-Cahn 方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = \alpha \Delta u + bu(1-u^2), & x \in \Omega, t \in (0, 2\pi], \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, 2\pi], \\ u_0(x) = 0.05 \sin(x), & x \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

在取空间步长为 $h=1/8$ ，时间步长为 $\tau=1/64$ 与参数 $\beta=3$ 情况下的数值求解，图 2 为 $b=1$ ， α 取不同值时离散能量 E^k 和 F^k 随时间的演化图，图 3 为 $\alpha=1$ ， b 取不同值时离散能量 E^k 和 F^k 随时间的演化图。它们表明了该离散能量 E^k 随时间的增加而减少，并且 $F^k \approx 0$ 。这些结果与理论结果相吻合。



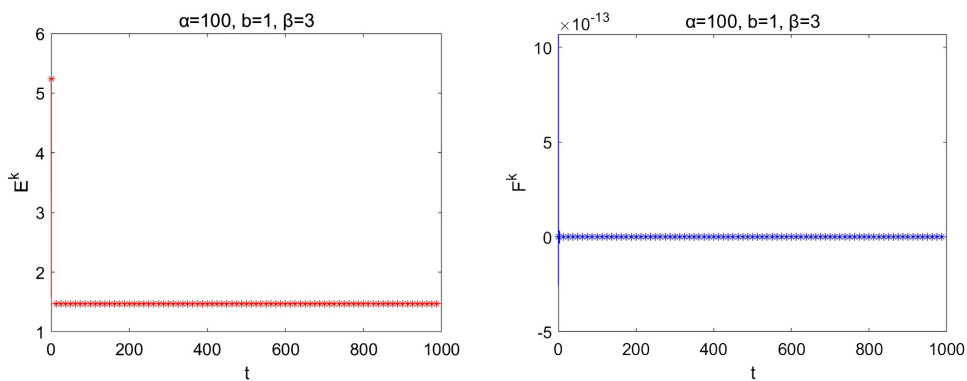


Figure 2. Time evolutions of E^k, F^k for different parameters α
 图 2. 取不同 α 时的 E^k, F^k 随时间演化图

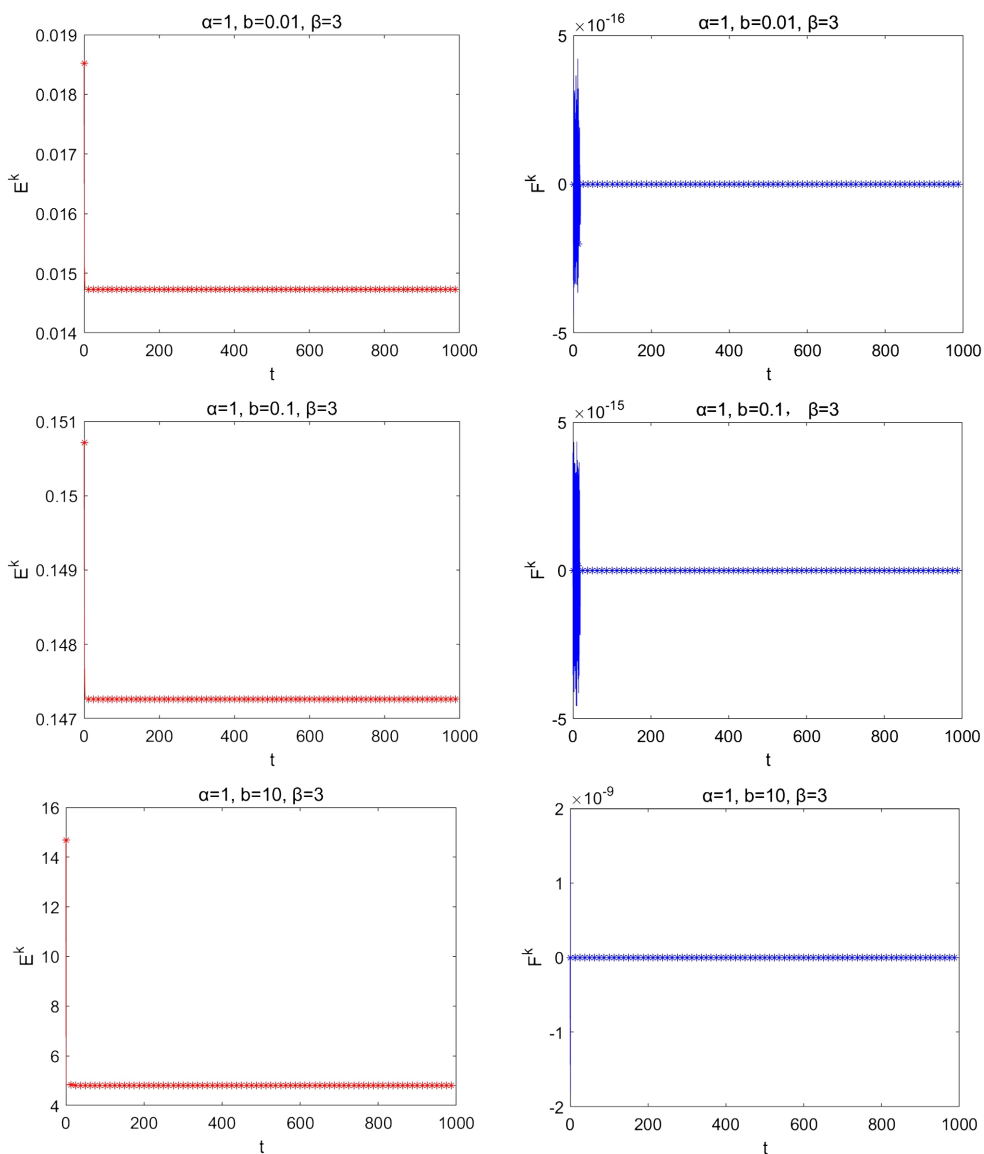


Figure 3. Time evolutions of E^k, F^k for different parameters b
 图 3. 取不同 b 时的 E^k, F^k 随时间演化图

6. 结论

本文针对一维 Allen-Cahn 方程构造了一类显式保能量耗散 Du Fort-Frankel 格式, 并且分别从理论和实验两个方面证明了所得的离散能量满足能量耗散定律。数值算例验证了在 $\tau = h^2$ 的情况下时, 所得数值解有 $O(h^2)$ 的收敛阶, 在计算效率方面高于全隐保结构格式。另外, 当 $T = 1000$ 时, 在扩散占优和反应占优的情况下所得数值解仍然满足能量耗散定律, 可见, 本文所建立的保结构算法具有长时间稳定性, 高效性的优势。

尽管本文仅研究一维问题, 事实上, 本文的保结构方法可以很容易推广到高维问题的求解。

基金项目

江西省杰出青年基金(20212ACB211006); 江西省自然科学基金(20202BABL201005); 国家自然科学基金项目(No. 11861047)。

参考文献

- [1] Allen, S. and Cahn, J. (1979) A Microscopic Theory for Antiphase Boundary Motion and Its Application to Antiphase Domain Coarsening. *Acta Metallurgica*, **27**, 1085-1095. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(79\)90196-2](https://doi.org/10.1016/0001-6160(79)90196-2)
- [2] Yue, P., Feng, J., Liu, C. and Shen, J. (2005) Diffuse-Interface Simulations of Drop Coalescence and Retraction in Viscoelastic Fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **129**, 163-176. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2005.07.002>
- [3] Kim, J. (2012) Phase-Field Models for Multi-component Fluid Flows. *Communications in Computational Physics*, **12**, 613-661. <https://doi.org/10.4208/cicp.301110.040811a>
- [4] Beneš, M., Chalupický, V. and Mikula, K. (2004) Geometrical Image Segmentation by the Allen-Cahn Equation. *Applied Numerical Mathematics*, **51**, 187-205. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2004.05.001>
- [5] Kay, D.A. and Tomasi, A. (2009) Color Image Segmentation by the Vector Valued Allen-Cahn Phase-Field Model: A Multigrid Solution. *IEEE Transactions on Image Processing*, **18**, 2330-2339. <https://doi.org/10.1109/TIP.2009.2026678>
- [6] Wheeler, A., Boettinger, W. and Mcfadden, G. (1992) Phase Field Model for Isothermal Phase Transitions in Binary Alloys. *Physical Review A*, **45**, 7424-7439. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.7424>
- [7] Evans, L., Sooner, H. and Souganidis, P. (1992) Phase Transitions and Generalized Motion by Mean Curvature. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **45**, 1097-1123. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160450903>
- [8] Li, Y., Lee, G. and Kim, J. (2011) A Fast, Robust, and Accurate Operator Splitting Method for Phase-Field Simulation of Crystal Growth. *Journal of Crystal Growth*, **321**, 176-182. <https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2011.02.042>
- [9] Kobayashi, R. (1993) Modeling and Numerical Simulations of Dendritic Crystal Growth. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **63**, 410-423. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90120-P](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90120-P)
- [10] Du, Q. and Yang, J. (2016) Asymptotically Compatible Fourier Spectral Approximations of Nonlocal Allen-Cahn Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **54**, 1899-1919. <https://doi.org/10.1137/15M1039857>
- [11] Xiao, X., Feng, X. and Yuan, J. (2017) The Stabilized Semi-Implicit Finite Element Method for the Surface Allen-Cahn Equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—B*, **22**, 2857-2877.
- [12] Zhai, S., Feng, X. and He, Y. (2014) Numerical Simulation of the Three Dimensional Allen—Cahn Equation by the High-Order Compact ADI Method. *Computer Physics Communications*, **185**, 2449-2455. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2014.05.017>
- [13] Strachota, P. and Bene, M. (2018) Error Estimate of the Finite Volume Scheme for the Allen—Cahn Equation. *BIT Numerical Mathematics*, **58**, 489-507. <https://doi.org/10.1007/s10543-017-0687-4>
- [14] 翁智峰, 姚泽丰, 赖淑琴. 重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2019, 40(1): 133-140.
- [15] 庄清渠, 王金平. 四阶常微分方程的 Birkhoff 配点法[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2018, 39(2): 306-311.
- [16] Tang, T. and Yang, J. (2016) Implicit-Explicit Scheme for the Allen-Cahn Equation Preserves the Maximum Principle. *Journal of Computational Mathematics*, **34**, 451-461. <https://doi.org/10.4208/jcm.1603-m2014-0017>
- [17] Shen, J., Tang, T. and Yang, J. (2016) On the Maximum Principle Preserving Schemes for the Generalized Allen-Cahn

- Equation. *Communications in Mathematical Sciences*, **14**, 1517-1534. <https://doi.org/10.4310/CMS.2016.v14.n6.a3>
- [18] He, D. and Pan, K. (2019) Maximum Norm Error Analysis of an Unconditionally Stable Semi-Implicit Scheme for Multidimensional Allen-Cahn Equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **35**, 955-975. <https://doi.org/10.1002/num.22333>
- [19] Long, J., Luo, C., Yu, Q. and Li, Y. (2019) An Unconditional Stable Compact Fourth-Order Finite Difference Scheme for Three Dimensional Allen-Cahn Equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **77**, 1042-1054. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.10.028>
- [20] Li, C., Huang, Y. and Yi, N. (2019) An Unconditionally Energy Stable Second Order Finite Element Method for Solving the Allen-Cahn Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **353**, 38-48.
- [21] Feng, J., Zhou, Y. and Hou, T. (2021) A Maximum-Principle Preserving and Unconditionally Energy-Stable Linear Second-Order Finite Difference Scheme for Allen-Cahn Equations. *Applied Mathematics Letters*, **118**, Article ID: 107179. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107179>
- [22] Tan, Z. and Zhang, C. (2021) The Discrete Maximum Principle and Energy Stability of a New Second-Order Difference Scheme for Allen-Cahn Equations. *Applied Numerical Mathematics*, **166**, 227-237. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.04.010>
- [23] Wang, X., Kou, J. and Gao, H. (2021) Linear Energy Stable and Maximum Principle Preserving Semi-Implicit Scheme for Allen-Cahn Equation with Double Well Potential. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **98**, Article ID: 105766. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105766>
- [24] Hou, T. and Leng, H. (2020) Numerical Analysis of a Stabilized Crank-Nicolson/Adams-Bashforth Finite Difference Scheme for Allen-Cahn Equations. *Applied Mathematics Letters*, **102**, Article ID: 106150. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.106150>
- [25] Hou, T., Xiu, D. and Jiang, W. (2020) A New Second-Order Maximum-Principle-Preserving Finite Difference Scheme for Allen-Cahn Equations with Periodic Boundary Conditions. *Applied Mathematics Letters*, **104**, Article ID: 106265. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106265>
- [26] 林树华. 一维 Allen-Cahn 方程 Du Fort-Frankel 格式的离散最大化原则和能量稳定性研究[J]. 理论数学, 2022, 12(9): 1501-1511.
- [27] 陈景良, 邓定文. 非线性延迟波动方程的两类差分格式[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 508-517.
- [28] 张如玉. 非线性耦合波动方程组的 Du Fort Frankel 格式[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 1082-1091.
- [29] 王启红, 杨姗. 非线性耦合薛定谔方程组的保能量 DFF 格式[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1720-1735.
- [30] 邓定文, 赵紫琳. 求解二维 Fisher-KPP 方程的一类保正保界差分格式及其 Richardson 外推法[J]. 计算数学, 2022, 44(4): 561-584.
- [31] 孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2012.
- [32] Qin, W., Ding, D. and Ding, X. (2015) Two Boundedness and Monotonicity Preserving Methods for a Generalized Fisher-KPP Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **252**, 552-567. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.12.043>