Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3139-3145
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311325

Hans汉斯

一类趋化消耗模型解的整体有界性

陈　越，牛　聪

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2023年10月1日；录用日期：2023年11月1日；发布日期：2023年11月9日

摘　要

趋化描述了生物有机体受化学信号刺激所产生的偏向性运动，它在生物学、化学、医学等学科领域有着广泛的应用。本文研究齐次Neumann边界条件下的具次线性敏感及带logistic源的趋化消耗模型：$u_t=u_{xx}-\chi\left(\frac{u}{v^{\alpha}}v_x\right)_x+ru-\mu u^k$，$v_t=v_{xx}-uv$，其中 $\mu,\chi>0$，$r\in\mathbb{R}$，$\alpha\in(0,1)$ 和 $k>1$。在一维情形下，模型存在整体有界的古典解。

关键词

趋化消耗，次线性敏感，Logistic源，整体有界性

Global Boundedness of Solution to a Chemotaxis-Consumption Model

Yue Chen, Cong Niu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 1st, 2023; accepted: Nov. 1st, 2023; published: Nov. 9th, 2023

Abstract

Chemotaxis describes the biased movement of biological organisms stimulated by chemical signals. It is widely used in biology, chemistry, medicine and other fields. In this paper, a sublinear sensitive chemotactic-consumption model with logistic source under homogeneous Neumann boundary conditions is studied: $u_t=u_{xx}-\chi\left(\frac{u}{v^{\alpha}}v_x\right)_x+ru-\mu u^k$, $v_t=v_{xx}-uv$, where $\mu,\chi>0$, $r\in\mathbb{R}$, $\alpha\in(0,1)$ and $k>1$. In the one-dimensional case, the model has a globally bounded classical solution.

文章引用: 陈越, 牛聪. 一类趋化消耗模型解的整体有界性[J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3139-3145.
DOI: 10.12677/pm.2023.1311325

Keywords

Chemotaxis-Consumption, Sublinear Sensitivity, Logistic Source, Global Boundedness

1. 前言

上世纪 70 年代，Keller 和 Segel 提出了生物趋化模型，它简单而又直观地刻画了生物有机体受化学信号刺激所产生的趋向性运动，在生物学、医学、环境科学等领域有着重要的应用。对于如下带 logistic 源的趋化消耗模型：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi\nabla\cdot\left(\dfrac{u}{v^\alpha}\nabla v\right) + ru - \mu u^2, & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \Delta v - uv, & x\in\Omega, t>0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega\in\mathbb{R}^n\,(n\ge 1)$ 为有界光滑区域，$\chi>0$ 代表趋化强度，$\alpha\in[0,1]$，并且 logistic 源中 $r\in\mathbb{R}$，$\mu>0$。u,v 分别表示细胞密度和氧气的浓度。另外，初始数据 $u_0\in C^0(\bar{\Omega})$ 和 $v_0\in W^{1,\infty}(\Omega)$ 非负。

现回顾模型(1.1)的相关结论。若 $\alpha=0$，文献[1]证明了当 $r>0, 0<\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\le\dfrac{1}{6(n+1)\chi}$ 时，模型存在全局有界的古典解；当 μ 充分大时文献[2]建立了模型古典解的整体有界性，并且 $r>0$ 时收敛到 $\left(\dfrac{r}{\mu},0\right)$。若 $\alpha=1$，当 $n=2, r\le 0, \mu>\mu_*(\chi)>0$ 或 $r>0$ 且对 μ 再进行限制，文献[3]得到了模型(1.1)古典解在时间上的有界性和长时间行为；当 $r\ge 0$，文献[4]证明了 $n=1$ 或 $n\ge 2, \chi<\sqrt{2/n}$ 且 $\mu>(n-2)/2n$ 古典解的整体有界性。另外，将(1.1)中第一个方程变成拟线性形式：$u_t=\nabla\cdot(D(u)\nabla u)-\nabla\cdot(uS(x,u,v)\cdot\nabla v)$，其中 $D(u)\ge k_D u^{m-1}, |S(x,u,v)|\le\dfrac{S_0(v)}{v^\alpha}$（$S_0$ 是非减的），并且 $k_D>0, m>1, \alpha\ge 0$，文献[5]证明了当 $m>\dfrac{3n-2}{2n}, \alpha\in[0,1)$ 时，系统存在整体有界的古典解。

本文受以上结论启发，研究一维情形下带 logistic 源及具次线性敏感的趋化消耗模型：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - \chi\left(\dfrac{u}{v^\alpha}v_x\right)_x + ru - \mu u^k, & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = v_{xx} - uv, & x\in\Omega, t>0, \\ u_x = v_x = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 μ，$\chi>0$，$r\in\mathbb{R}$，$\alpha\in(0,1)$ 和 $k>1$，$\Omega\in\mathbb{R}$ 为有界区间。

根据以上假设，可以得到系统(1.2)古典解的整体有界性。

定理 1.1 设 $\chi>0$，$r\in\mathbb{R}$，$\alpha,\beta\in(0,1)$ 和 $k>1$。有

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|v\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}+\left\|\frac{v_x}{v^\beta}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_\star,\ t>0, \tag{1.3}$$

其中 $C_\star>0$。

注 文献[4]证明了一维情形下，当 $r\ge 0,\alpha=1,k=2$ 时，模型古典解的整体有界性。与文献[4]不同，若 $r\in\mathbb{R}$，定理 1.1 证明了 $\alpha\in(0,1)$ 及 $k>1$ 时模型古典解的整体有界性。

2. 预备知识

根据 Banach 不动点理论，可以得到如下古典解局部存在性，参见[4]。

引理 2.1 假设 $u_0\in C^0(\bar{\Omega})$ 和 $v_0\in W^{1,\infty}(\Omega)$ 是非负的。若 μ，$\chi>0$，$k>1$，$r\in\mathbb{R}$，$\alpha\in(0,1)$，则存在 $T_{\max}\in(0,\infty]$ 及唯一非负函数 $(u,v)\in\left(C^0\left(\bar{\Omega}\times[0,T_{\max})\right)\cap C^{2,1}\left(\bar{\Omega}\times(0,T_{\max})\right)\right)^2$ 在古典解意义下满足系统(1.2)。另外，当 $T_{\max}<\infty$ 时，$\lim_{t\to T_{\max}}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\infty$。

引理 2.2 设 μ，$\chi>0$，$k>1$，$r\in\mathbb{R}$，$\alpha\in(0,1)$，则

$$\int_\Omega u(\cdot,t)\mathrm{d}x\le\max\left\{\int_\Omega u_0\mathrm{d}x,|\Omega|\left(\frac{|r|}{\mu}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right\},\ t\in(0,T_{\max}), \tag{2.1}$$

$$v(x,t)\le\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)},(x,t)\in\Omega\times(0,T_{\max}) \tag{2.2}$$

证明 根据(1.2)的第一个方程，知

$$\int_\Omega u_t\mathrm{d}x=r\int_\Omega u\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega u^k\mathrm{d}x,\ t\in(0,T_{\max})$$

由 Hölder 不等式有

$$\int_\Omega u_t\mathrm{d}x\le r\int_\Omega u\mathrm{d}x-\frac{\mu}{|\Omega|^{k-1}}\left(\int_\Omega u\mathrm{d}x\right)^k,t\in(0,T_{\max}).$$

应用伯努利不等式即得(2.1)。由抛物方程的极值原理易得(2.2)。

3. 主要结果

引理 3.1 设 μ，$\chi>0$，$k>1$，$r\in\mathbb{R}$，$\alpha\in(0,1)$。若 $p>1$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p\mathrm{d}x+\frac{2(p-1)}{p}\int_\Omega\left|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x\le\frac{p(p-1)\chi^2}{2}\int_\Omega u^pv^{-2\alpha}v_x^2\mathrm{d}x+pr\int_\Omega u^p\mathrm{d}x-p\mu\int_\Omega u^{k+p-1}\mathrm{d}x,\quad t\in(0,T_{\max}). \tag{3.1}$$

证明 根据(1.2)的第一个方程，利用分部积分及 Young 不等式，知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p\mathrm{d}x&=-p(p-1)\int_\Omega u^{p-2}u_x^2\mathrm{d}x+p(p-1)\chi\int_\Omega u^{p-1}v^{-\alpha}u_xv_x\mathrm{d}x\\&\quad+pr\int_\Omega u^p\mathrm{d}x-p\mu\int_\Omega u^{k+p-1}\mathrm{d}x\\&\le-\frac{2(p-1)}{p}\int_\Omega\left|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x+\frac{p(p-1)\chi^2}{2}\int_\Omega u^pv^{-2\alpha}v_x^2\mathrm{d}x\\&\quad+pr\int_\Omega u^p\mathrm{d}x-p\mu\int_\Omega u^{k+p-1}\mathrm{d}x,\ \ t\in(0,T_{\max}).\end{aligned}$$

将上式进行移项即得(3.1)。

根据文献[5]中引理 3.3，3.4 和 3.5，有

引理 3.2 设 μ，$\chi>0$，$k>1$，$r\in\mathbb{R}$，$\alpha\in(0,1)$。若 $q\ge 2$，则存在 $c_i(q)>0(i=1,\cdots 4)$，使得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v^{-q+1}v_x^q\mathrm{d}x+c_1\int_\Omega v^{-q+1}v_x^{q-2}\left|v_{xx}\right|^2\mathrm{d}x+c_2\int_\Omega v^{-q-1}v_x^{q+2}\mathrm{d}x\\&\le c_3\int_\Omega v\mathrm{d}x+c_4\int_\Omega uv^{-q+2}v_x^{q-2}\left|v_{xx}\right|\mathrm{d}x,\ t\in(0,T_{\max}).\end{aligned}\tag{3.2}$$

引理 3.3 设 μ，$\chi>0$，$k>1$，$r\in\mathbb{R}$，$\alpha\in(0,1)$。定义

$$F=\int_\Omega u^p\mathrm{d}x+\int_\Omega v^{-q+1}v_x^q\mathrm{d}x.$$

若 $p>1$，$q\ge 2$，则存在 $\Gamma=\Gamma(p,q,\chi)>0$，使得

$$\begin{aligned}&F+F'+\frac{2(p-1)}{p}\int_\Omega\left|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x\le\Gamma\int_\Omega u^{\frac{p(q+2)}{q}}v^{\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}}\mathrm{d}x+\Gamma\int_\Omega u^{\frac{q+2}{2}}v\mathrm{d}x\\&+\left(c_3+\left(\frac{3}{c_2}\right)^{\frac{q}{2}}\right)\int_\Omega v\mathrm{d}x+c_5,\ t\in(0,T_{\max}).\end{aligned}\tag{3.3}$$

证明 将(3.1)与(3.2)相加，有

$$\begin{aligned}&F+F'+\frac{2(p-1)}{p}\int_\Omega\left|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x+c_1\int_\Omega v^{-q+1}v_x^{q-2}\left|v_{xx}\right|^2\mathrm{d}x+c_2\int_\Omega v^{-q-1}v_x^{q+2}\mathrm{d}x\\&\le\frac{p(p-1)\chi^2}{2}\int_\Omega u^pv^{-2\alpha}v_x^2\mathrm{d}x+(pr+1)\int_\Omega u^p\mathrm{d}x-p\mu\int_\Omega u^{k+p-1}\mathrm{d}x+c_3\int_\Omega v\mathrm{d}x\\&\quad+c_4\int_\Omega uv^{-q+2}v_x^{q-2}\left|v_{xx}\right|\mathrm{d}x+\int_\Omega v^{-q+1}v_x^q\mathrm{d}x,\ t\in(0,T_{\max})\end{aligned}\tag{3.4}$$

由 Young 不等式，存在 $c_5>0$，有

$$\begin{aligned}\frac{p(p-1)\chi^2}{2}\int_\Omega u^pv^{-2\alpha}v_x^2\mathrm{d}x&\le\left(\frac{3}{c_2}\right)^{\frac{2}{q}}\left(\frac{p(p-1)\chi^2}{2}\right)^{\frac{q+2}{q}}\int_\Omega u^{\frac{p(q+2)}{q}}v^{\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}}\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{c_2}{3}\int_\Omega v^{-q-1}v_x^{q+2}\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}c_4\int_\Omega uv^{-q+2}v_x^{q-2}\left|v_{xx}\right|\mathrm{d}x&\le c_1\int_\Omega v^{-q+1}v_x^{q-2}\left|v_{xx}\right|^2\mathrm{d}x+\frac{c_4{}^2}{4c_1}\int_\Omega u^2v^{-q+3}v_x^{q-2}\mathrm{d}x\\&\le c_1\int_\Omega v^{-q+1}v_x^{q-2}\left|v_{xx}\right|^2\mathrm{d}x+\frac{c_2}{3}\int_\Omega v^{-q-1}v_x^{q+2}\mathrm{d}x\\&\quad+\left(\frac{3}{c_2}\right)^{\frac{q-2}{4}}\left(\frac{c_4{}^2}{4c_1}\right)^{\frac{q+2}{4}}\int_\Omega u^{\frac{q+2}{2}}v\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\int_\Omega v^{-q+1}v_x^q\mathrm{d}x\le\frac{c_2}{3}\int_\Omega v^{-q-1}v_x^{q+2}\mathrm{d}x+\left(\frac{3}{c_2}\right)^{\frac{q}{2}}\int_\Omega v\mathrm{d}x,\tag{3.7}$$

$$(pr+1)\int_\Omega u^p\mathrm{d}x\le p\mu\int_\Omega u^{k+p-1}\mathrm{d}x+c_5.\tag{3.8}$$

取 $\Gamma=\max\left\{\left(\frac{3}{c_2}\right)^{\frac{2}{q}}\left(\frac{p(p-1)\chi^2}{2}\right)^{\frac{q+2}{q}},\left(\frac{3}{c_2}\right)^{\frac{q-2}{4}}\left(\frac{c_4^{\,2}}{4c_1}\right)^{\frac{q+2}{4}}\right\}$，将(3.5)，(3.6)，(3.7)，(3.8)代入到(3.4)中可得(3.3)。

引理 3.4 设 $k>1$， $\mu,\chi>0$， $r\in\mathbb{R}$， $\alpha\in(0,1)$。对于 $p,q>1$，存在 $C_0>0$，使得

$$\int_\Omega u^p\mathrm{d}x+\int_\Omega v^{-q+1}v_x^q\mathrm{d}x\le C_0,\ t\in(0,T_{\max}). \tag{3.9}$$

证明 取 $p>\max\left\{1,\frac{4\alpha-3}{2-2\alpha}\right\}$， $\max\left\{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha},p\right\}<q<2+2p$。根据引理 2.2 与 Gagliardo-Nirenberg 不等式及 Young 不等式，有

$$\begin{aligned}
\Gamma\int_\Omega u^{\frac{p(q+2)}{q}}v^{\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}}\mathrm{d}x&\le\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}}\int_\Omega u^{\frac{p(q+2)}{q}}\mathrm{d}x=\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{2(q+1)-2(q+2)\alpha}{q}}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{2(q+2)}{q}}(\Omega)}^{\frac{2(q+2)}{q}}\\
&\le c_6\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(q+2)}{q}a}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^{\frac{2(q+2)}{q}(1-a)}+c_6\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^{\frac{2(q+2)}{q}}\\
&\le c_7\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2pq+4p-2q}{q+pq}}+c_7\\
&\le\frac{p-1}{p}\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^2+c_8,
\end{aligned}\tag{3.10}$$

和

$$\begin{aligned}
\Gamma\int_\Omega u^{\frac{q+2}{2}}v\mathrm{d}x&\le\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega u^{\frac{q+2}{2}}\mathrm{d}x=\Gamma\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{q+2}{p}}(\Omega)}^{\frac{q+2}{p}}\\
&\le c_9\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{q+2}{p}b}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^{\frac{q+2}{p}(1-b)}+c_9\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^{\frac{q+2}{p}}\\
&\le c_{10}\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{pq}{p+p^2}}+c_{10}\\
&\le\frac{p-1}{p}\left\|\left(u^{\frac{p}{2}}\right)_x\right\|_{L^2(\Omega)}^2+c_{11},
\end{aligned}\tag{3.11}$$

其中 $a=\frac{p-\frac{q}{q+2}}{1+p}\in(0,1),b=\frac{p-\frac{2p}{q+2}}{1+p}\in(0,1),c_j>0\,(j=6,\cdots,11)$。

将(3.10)，(3.11)代入(3.3)，并应用引理 2.2，存在 $c_{12}>0$，有

$$F+F'\le c_{12},\ t\in(0,T_{\max}).$$

应用常数变易法得到

$$F \le \max\left\{c_{12}, \int_\Omega u_0{}^p \mathrm{d}x + \int_\Omega v_0{}^{-q+1} v_{0x}^q \mathrm{d}x\right\},\ t \in (0, T_{\max}).$$

定理 1.1 证明 由热半群表示，知

$$u(\cdot,t) = \mathrm{e}^{t\frac{\partial^2}{\partial x^2}} u_0 - \chi \int_o^t \mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}} \left(\frac{u}{v^\alpha} v_x\right)_x \mathrm{d}s + r\int_o^t \mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}} u\mathrm{d}s - \mu \int_o^t \mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}} u^k \mathrm{d}s, \tag{3.12}$$

$t \in (0, T_{\max})$。利用文献[6]中 Neumann 热半群的 $L^P - L^q$ 估计，对 $p > 1$ 有

$$\begin{aligned} u_{L^\infty(\Omega)} &\le \left\|\mathrm{e}^{t\frac{\partial^2}{\partial x^2}} u_0\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \chi \int_o^t \left\|\mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}} \left(\frac{u}{v^\alpha} v_x\right)_x\right\|_{L^\infty(\Omega)} \mathrm{d}s + |r| \int_o^t \left\|\mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}} u\right\|_{L^\infty(\Omega)} \mathrm{d}s \\ &\le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + c_{13} \int_o^t \left(1 + (t-s)^{-\frac{3}{4}}\right) \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \left\|\frac{u}{v^\alpha} v_x\right\|_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}s \\ &\quad + c_{13} \int_o^t \left(1 + (t-s)^{-\frac{1}{2p}}\right) \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \|u\|_{L^p(\Omega)} \mathrm{d}s,\ t \in (0, T_{\max}), \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 $c_{13} > 0$。由引理 3.4，有

$$\int_\Omega u^{4+\frac{1}{2(1-\alpha)}} \mathrm{d}x + \int_\Omega v^{-\left(8+\frac{1}{(1-\alpha)}\right)+1} |v_x|^{8+\frac{1}{(1-\alpha)}} \mathrm{d}x \le c_{14},$$

其中 $c_{14} > 0$。进一步，利用 Young 不等式及(2.2)，存在 $c_{15} > 0$，使得

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{u}{v^\alpha} v_x\right)^2 \mathrm{d}x &\le \int_\Omega u^4 \mathrm{d}x + \int_\Omega |v^{-\alpha} v_x|^4 \mathrm{d}x \\ &\le \int_\Omega u^{4+\frac{1}{2(1-\alpha)}} \mathrm{d}x + \int_\Omega |v^{-\alpha} v_x|^{8+\frac{1}{(1-\alpha)}} \mathrm{d}x + 2|\Omega| \\ &\le \int_\Omega u^{4+\frac{1}{2(1-\alpha)}} \mathrm{d}x + 2|\Omega| \\ &\quad + \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{8(1-\alpha)} \int_\Omega v^{-\left(8+\frac{1}{(1-\alpha)}\right)+1} |v_x|^{8+\frac{1}{(1-\alpha)}} \mathrm{d}x \\ &\le c_{15},\ t \in (0, T_{\max}). \end{aligned} \tag{3.14}$$

类似地，根据半群理论可以证得 $\|v\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \le C_\star$。进而由引理 2.1 知 $T_{\max} = \infty$。

令 $w = v^{1-\beta}$，$\beta \in (0,1)$ 则

$$w_t = (1-\beta) v^{-\beta} v_t = w_{xx} + \frac{\beta}{1-\beta} \frac{w_x^2}{w} - (1-\beta) wu,\ \forall t > 0.$$

通过热半群表示，知

$$w(\cdot,t) = \mathrm{e}^{t\frac{\partial^2}{\partial x^2}} w_0 + \frac{\beta}{1-\beta} \int_o^t \mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}} \frac{w_x^2}{w} \mathrm{d}s - (1-\beta) \int_o^t \mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}} wu\mathrm{d}s,\ \forall t > 0. \tag{3.15}$$

应用 Neumann 热半群估计，对 $q > \max\left\{\frac{1}{1-\beta}, \frac{2+\beta}{2}\right\}$，有

$$
\begin{aligned}
&(1-\beta)\left\|\frac{v_x}{v^{\beta}}\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}=\|w_x\|_{L^{\infty}(\Omega)}\\
&\le\left\|\left(\mathrm{e}^{t\frac{\partial^2}{\partial x^2}}w_0\right)_x\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}+\frac{\beta}{1-\beta}\int_o^t\left\|\left(\mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\frac{w_x^2}{w}\right)_x\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}\mathrm{d}s+(1-\beta)\int_o^t\left\|\left(\mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}}wu\right)_x\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}\mathrm{d}s\\
&=\left\|\left(\mathrm{e}^{t\frac{\partial^2}{\partial x^2}}v_0^{1-\beta}\right)_x\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}\mathrm{d}s+\beta(1-\beta)\int_o^t\left\|\left(\mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\frac{v_x^2}{v^{1+\beta}}\right)_x\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}\mathrm{d}s+(1-\beta)\int_o^t\left\|\left(\mathrm{e}^{(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}}uv^{1-\beta}\right)_x\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}\mathrm{d}s\\
&\le\left\|\left(v_0^{1-\beta}\right)_x\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}+c_{16}\int_o^t\left(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{1+\beta}{2(2q-1)}}\right)\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\left\|\frac{v_x^2}{v^{1+\beta}}\right\|_{L^{\frac{2q-1}{1+\beta}}(\Omega)}\mathrm{d}s\\
&+c_{16}\int_o^t\left(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}}\right)\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\left\|uv^{1-\beta}\right\|_{L^{q}(\Omega)}\mathrm{d}s,\ \forall t>0,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

其中 $c_{16}>0$。对(3.16)应用引理 3.3 及(2.2)，可得 $\left\|\frac{v_x}{v^{\beta}}\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}\le C_{\star},\forall t>0$。

参考文献

[1] Wang, L., Khan, U.D. and Khan, U.D. (2013) Boundedness in a Chemotaxis System with Consumption of Chemoattractant and Logistic Source. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2013**, 172-203.

[2] Lankeit, J. and Wang, Y. (2017) Global Existence, Boundedness and Stabilization in a High-Dimensional Chemotaxis System with Consumption. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, **37**, 6099-6121. https://doi.org/10.3934/dcds.2017262

[3] Wang, W. (2019) The Logistic Chemotaxis System with Singular Sensitivity and Signal Absorption in Dimension Two. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **50**, 532-561. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.06.001

[4] Lankeit, E. and Lankeit, J. (2019) Classical Solutions to a Logistic Chemotaxis Model with Singular Sensitivity and Signal Absorption. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **46**, 421-445. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.09.012

[5] Winkler, M. (2022) Approaching Logarithmic Singularities in Quasilinear Chemotaxis-Consumption Systems with Signal-Dependent Sensitivities. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **27**, 6565-6587. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2022009

[6] Winkler, M. (2010) Aggregation vs. Global Diffusive Behavior in the Higher-Dimensional Keller-Segel Model. *Journal of Differential Equations*, **248**, 2889-2905. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.02.008