Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3146-3153
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311326

Bergman空间上以拟齐次函数与径向函数的和函数为符号的Toeplitz算子的双正规性

王晓琳

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年10月1日；录用日期：2023年11月1日；发布日期：2023年11月9日

摘　要

本文刻画了Bergman空间上以拟齐次函数与径向函数的和函数为符号的Toeplitz算子的双正规性。

关键词

Bergman空间，Toeplitz算子，拟齐次函数，径向函数，双正规性

Binormality of Toeplitz Operators with the Sum Function of Quasi-Homogeneous Function and Radial Function Symbols on the Bergman Space

Xiaolin Wang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 1st, 2023; accepted: Nov. 1st, 2023; published: Nov. 9th, 2023

Abstract

In this paper, we describe the binormality of Toeplitz operators with the sum of quasi-homogeneous function and radial function symbols on the Bergman space.

文章引用: 王晓琳. Bergman 空间上以拟齐次函数与径向函数的和函数为符号的 Toeplitz 算子的双正规性[J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3146-3153. DOI: 10.12677/pm.2023.1311326

Keywords

Bergman Space, Toeplitz Operator, Quasi-Homogeneous Function, Radial Function, Binormality

1. 引言

函数空间上的算子理论是泛函分析中一个较为活跃的分支。其中 Toeplitz 算子理论不仅与函数论、微分方程、Banach 代数等数学学科中的问题相互关联、相互推动，并且在很多实际问题中有广泛应用。这使得 Toeplitz 算子一度成为学者们研究的热点且一直保持着很强的发展势态。正规性是 Toeplitz 算子的重要性质之一。迄今为止，Toeplitz 算子的正规性已经得到了十分全面的刻画。于是人们将其推广拟正规性、双正规性和亚正规性。通过查阅资料发现，许多学者对于 Bergman 空间上以径向函数为符号的亚正规性得到了一些结果。Sumin [1]丰富了 Bergman 空间上以径向函数为符号的 Toeplitz 算子的正规性的相关结论。Cuckovic [2]研究了 Bergman 空间上以径向函数为符号的 Toeplitz 算子的正规性的充分必要条件。Lu 和 Shi [3]进一步刻画了加权 Bergman 空间上以径向函数为符号的 Toeplitz 算子的亚正规性的充分必要条件。同样对于 Bergman 空间上以拟齐次函数为符号的亚正规性得到了一些结果。Lu 和 Liu [4]刻画了加权 Bergman 空间上以拟齐次函数为符号的 Toeplitz 算子的亚正规的充分必要条件。但对于以拟齐次函数与径向函数的和函数为符号的 Toeplitz 算子的正规性、拟正规性、双正规性研究较少。本文的主要内容是 Bergman 空间上以拟齐次函数与径向函数的和函数为符号的 Toeplitz 算子的正规性、拟正规性、双正规性。

如果 Hilbert 空间上的有界线性算子 S 满足 $S^*S=SS^*$，那么称算子 S 是正规的。如果 Hilbert 空间上的有界线性算子 S 满足 $S^*SS=SS^*S$，那么称算子 S 是拟正规的。如果 Hilbert 空间上的有界线性算子 S 满足 $S^*SSS^*=SS^*S^*S$，那么称算子 S 是双正规的。并且这些性质有如下关系：

正规性→拟正规性→双正规性

正规算子一定是拟正规算子，拟正规算子一定为双正规算子。

记 $\mathbb{D}$ 为复平面上的开单位圆盘。Bergman 空间 $A^2(\mathbb{D})$ 中，对任意 $f,g\in A^2(\mathbb{D})$，其上内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{D}}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}A(z).$$

$L^\infty(\mathbb{D})$ 是 $\mathbb{D}$ 上本性可测函数的空间。对于 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D})$，以 φ 为符号的 Toeplitz 算子 $T_\varphi:A^2(\mathbb{D})\to A^2(\mathbb{D})$ 定义为

$$T_\varphi f=P(\varphi f),f\in A^2(\mathbb{D}).$$

令 P 为 $L^2(\mathbb{D})$ 到 $A^2(\mathbb{D})$ 的正交投影。对任意 $f\in L^2(\mathbb{D})$ 和 $z\in\mathbb{D}$，则有

$$Pf(z)=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(w)}{(1-\bar{z}w)^2}\mathrm{d}A(w).$$

2. 主要结论

引理 2.1 设 $\varphi\in L^1([0,1],rdr)$. 如果存在一个序列 $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$ 满足

$$\hat{\varphi}(n_k)=0\text{和}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n_k}=\infty,$$

那么，对于所有的 $z\in\{z:\operatorname{Re}z>2\}$ 有 $\hat{\varphi}(z)=0$，于是有 $\varphi\equiv 0$。

引理 2.2 在 $A^2(\mathbb{D})$ 中，设 a,b 为非负整数，

$$P\left(z^a\overline{z}^b\right)=\begin{cases}\dfrac{a-b+1}{a+1}z^{a-b}, & a\geq b;\\ 0, & a<b.\end{cases}$$

引理 2.3 [4]在 $A_\alpha^2(\mathbb{D})$ 中，令 $\varphi(re^{i\theta})=e^{i\delta\theta}\varphi_0(r)\in L^\infty(\mathbb{D})$，其中 $\delta\in\mathbb{Z}$，$\varphi_0(r)\in\zeta_a=\left\{a:\mathbb{D}\to\mathbb{C}\left|\int_0^1|a(r)|^2 r(1-r^2)^\alpha\,\mathrm{d}r<\infty\right.\right\}$。则对于 $n\in\mathbb{N}_0$，有

$$T_\varphi z^n=\begin{cases}\dfrac{(2n+2\delta+2)\Gamma(n+\delta+2+\alpha)}{(n+\delta+1)!\Gamma(1+\alpha)}\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n+\delta+2)z^{n+\delta}, & n+\delta\geq 0,\\ 0, & n+\delta<0.\end{cases}$$

$$T_{\overline{\varphi}}z^n=\begin{cases}\dfrac{(2n-2\delta+2)\Gamma(n-\delta+2+\alpha)}{(n-\delta+1)!\Gamma(1+\alpha)}\hat{\varphi}_{\alpha,0}(2n-\delta+2)z^{n-\delta}, & n-\delta\geq 0,\\ 0, & n-\delta<0.\end{cases}$$

定理 2.4 设 $\phi(re^{i\theta})=e^{i\delta\theta}\varphi(r)+r^{2p}$，其中 $\delta\in\mathbb{N}$，$p\in\mathbb{N}$ 若 T_ϕ 在 $A^2(\mathbb{D})$ 是双正规算子当且仅当 $\varphi\equiv 0$。

证明：第一种情况，考虑 $\delta>0$，由 Toeplitz 算子的性质可知 $T_\phi z^k=T_{\varphi_1}z^k+T_{\varphi_2}z^k$，其中 $\varphi_1=e^{i\delta\theta}\varphi(r)$，$\varphi_2=r^{2p}$。

$$\begin{aligned}T_{\varphi_2}z^k&=P\left(\varphi_2 z^k\right)(w)\\&=\int_{\mathbb{D}}\varphi_2(w)w^k\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\mathrm{d}A(w)\\&\overset{w=re^{i\theta}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\int_0^1\int_0^{2\pi}e^{i(k-n)\theta}r^{2p+k+n}\frac{r}{\pi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\&=\frac{k+1}{p+k+1}z^k\,(k\geq 0),\end{aligned}$$

由引理 2.3 知

$$T_{\varphi_1}z^k=\begin{cases}2(k+\delta+1)\hat{\varphi}(2k+\delta+2)z^{k+\delta}, & k+\delta\geq 0\\ 0, & k+\delta<0\end{cases},$$

故

$$T_\phi z^k=\begin{cases}2(k+\delta+1)\hat{\varphi}(2k+\delta+2)z^{k+\delta}+\dfrac{k+1}{p+k+1}z^k, & k+\delta\geq 0\\ \dfrac{k+1}{p+k+1}z^k, & k+\delta<0\end{cases}.$$

同理可得

$$T_{\overline{\varphi}_2}z^k=\frac{k+1}{p+k+1}z^k\,(k\geq 0),$$

再由引理 2.3 知

$$T_{\bar{\varphi}_1} z^k = \begin{cases} 2(k-\delta+1)\hat{\varphi}(2k-\delta+2) z^{k-\delta}, k-\delta \ge 0 \\ 0, \qquad\qquad\qquad k-\delta<0 \end{cases},$$

故

$$T_{\bar{\phi}} z^k = \begin{cases} 2(k-\delta+1)\hat{\varphi}(2k-\delta+2) z^{k-\delta} + \dfrac{k+1}{p+k+1} z^k, k-\delta \ge 0 \\ \dfrac{k+1}{p+k+1} z^k, \qquad\qquad\qquad k-\delta<0 \end{cases}.$$

当 $0 \le k < \delta$，

$$T_\phi T_\phi^* z^k = \frac{k+1}{p+k+1} T_\phi z^k = \frac{(k+1)^2}{(p+k+1)^2} z^k + \frac{2(k+\delta+1)(k+1)}{p+k+1} \hat{\varphi}(2k+\delta+2) z^{k+\delta}.$$

进而

$$\begin{aligned} & T_\phi T_\phi T_\phi^* z^k \\ = & \left[\frac{2(k+\delta+1)^2 (k+1)}{(p+k+\delta+1)(p+k+1)} \hat{\varphi}(2k+\delta+2) + \frac{2(k+1)^2 (k+\delta+1)}{(p+k+1)^2} \hat{\varphi}(2k+\delta+2) \right] z^{k+\delta} \\ & + \frac{4(k+\delta+1)(k+1)(k+2\delta+1)}{p+k+1} \hat{\varphi}(2k+\delta+2) \hat{\varphi}(2k+3\delta+2) z^{k+2\delta} \\ & + \frac{(k+1)^3}{(p+k+1)^3} z^k. \end{aligned}$$

再由直接计算得到

$$\begin{aligned} & T_\phi^* T_\phi T_\phi T_\phi^* z^k \\ = & \left[\frac{8(k+\delta+1)^2 (k+1)(k+2\delta+1)}{p+k+1} \hat{\varphi}(2k+\delta+2) \left| \hat{\varphi}(2k+3\delta+2) \right|^2 \right. \\ & \left. + \frac{2(k+1)^2 (k+\delta+1)^2}{(p+k+1)^2 (p+k+\delta+1)} \hat{\varphi}(2k+\delta+2) + \frac{2(k+\delta+1)^3 (k+1)}{(p+k+\delta+1)^2 (p+k+1)} \hat{\varphi}(2k+\delta+2) \right] z^{k+\delta} \\ & + \frac{4(k+\delta+1)(k+1)(k+2\delta+1)^2}{(p+k+1)(p+k+2\delta+1)} \hat{\varphi}(2k+\delta+2) \hat{\varphi}(2k+3\delta+2) z^{k+2\delta} \\ & + \left[\frac{4(k+1)^3 (k+\delta+1)}{(p+k+1)^2} \left| \hat{\varphi}(2k+\delta+2) \right|^2 + \frac{(k+1)^4}{(p+k+1)^4} \right. \\ & \left. + \frac{4(k+1)^2 (k+\delta+1)^2}{(p+k+1)(p+k+\delta+1)} \left| \hat{\varphi}(2k+\delta+2) \right|^2 \right] z^k. \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} & T_\phi^* T_\phi z^k \\ = & \left[4(k+1)(k+\delta+1) \left| \hat{\varphi}(2k+\delta+2) \right|^2 + \frac{(k+1)^2}{(p+k+1)^2} \right] z^k + \frac{2(k+\delta+1)^2}{p+k+\delta+1} \hat{\varphi}(2k+\delta+2) z^{k+\delta}. \end{aligned}$$

进而

$$T_\phi^* T_\phi^* T_\phi z^k$$
$$=\left[\frac{4(k+1)^2(k+\delta+1)}{p+k+1}\left|\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\right|^2+\frac{4(k+1)(k+\delta+1)^2}{p+k+\delta+1}\left|\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\right|^2+\frac{(k+1)^3}{(p+k+1)^3}\right]z^k$$
$$+\frac{2(k+\delta+1)^3}{(p+k+\delta+1)^2}\hat{\varphi}(2k+\delta+2)z^{k+\delta}.$$

再由直接计算得到

$$T_\phi T_\phi^* T_\phi^* T_\phi z^k$$
$$=\left[\frac{8(k+1)^2(k+\delta+1)^2}{p+k+1}\left|\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\right|^3+\frac{8(k+\delta+1)^3(k+1)}{p+k+\delta+1}\left|\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\right|^3\right.$$
$$\left.+\frac{2(k+1)^3(k+\delta+1)}{(p+k+1)^3}\hat{\varphi}(2k+\delta+2)+\frac{2(k+\delta+1)^4}{(p+k+\delta+1)^3}\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\right]z^{k+\delta}$$
$$+\frac{4(k+\delta+1)^3(k+2\delta+1)}{(p+k+\delta+1)^2}\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\hat{\varphi}(2k+3\delta+2)z^{k+2\delta}$$
$$+\left[\frac{4(k+1)^3(k+\delta+1)}{(p+k+1)^2}\left|\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\right|^2+\frac{(k+1)^4}{(p+k+1)^4}\right.$$
$$\left.+\frac{4(k+1)^2(k+\delta+1)^2}{(p+k+1)(p+k+\delta+1)}\left|\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\right|^2\right]z^k.$$

当 $0\le k<\delta$ 时，T_ϕ 在 $A^2(\mathbb{D})$ 是双正规算子则有 $T_\phi^* T_\phi T_\phi T_\phi^* = T_\phi T_\phi^* T_\phi^* T_\phi$，那么有 $T_\phi^* T_\phi T_\phi T_\phi^* z^k = T_\phi T_\phi^* T_\phi^* T_\phi z^k$，对比 $z^{k+2\delta}$ 的系数可知：

$$\frac{4(k+\delta+1)(k+1)(k+2\delta+1)^2}{(p+k+1)(p+k+2\delta+1)}\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\hat{\varphi}(2k+3\delta+2)$$
$$=\frac{4(k+\delta+1)^3(k+2\delta+1)}{(p+k+\delta+1)^2}\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\hat{\varphi}(2k+3\delta+2)$$

即

$$4(k+\delta+1)(k+2\delta+1)\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\hat{\varphi}(2k+3\delta+2)$$
$$\times\left[\frac{(k+\delta+1)^2}{(p+k+\delta+1)^2}-\frac{(k+1)(k+2\delta+1)}{(p+k+1)(p+k+2\delta+1)}\right]=0$$

但当 $0\le k<\delta$，若

$$\frac{(k+\delta+1)^2}{(p+k+\delta+1)^2}-\frac{(k+1)(k+2\delta+1)}{(p+k+1)(p+k+2\delta+1)}$$
$$=\frac{\delta^2 p\left[2(k+1)+p+2\delta\right]}{(p+k+\delta+1)^2(p+k+1)(p+k+2\delta+1)}=0,$$

则 $k=-\frac{p}{2}-\delta-1<0$，矛盾。所以有 $\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\hat{\varphi}(2k+3\delta+2)=0$。

若 $\hat{\varphi}(2k+\delta+2)=0$，则等式成立。若 $\hat{\varphi}(2k+\delta+2)\neq 0,\hat{\varphi}(2k+3\delta+2)=0$，则 $z^{k+\delta}$ 的系数不相等。故当 $0\leq k<\delta$，有 $\hat{\varphi}(2k+\delta+2)=0$，根据引理 2 得到 $\varphi=0$。

第二种情况，考虑 $\delta<0$，当 $0\leq k<-\delta$，

$$T_\phi T_\phi^* z^k =\left[4(k+1)(k-\delta+1)\left|\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\right|^2+\frac{(k+1)^2}{(p+k+1)^2}\right]z^k+\frac{2(k-\delta+1)^2}{p+k-\delta+1}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)z^{k-\delta}.$$

进而

$$\begin{aligned}T_\phi T_\phi T_\phi^* z^k &=\left[\frac{4(k+1)^2(k-\delta+1)}{p+k-\delta+1}\left|\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\right|^2+\frac{4(k+1)(k-\delta+1)^2}{p+k+1}\left|\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\right|^2+\frac{(k+1)^3}{(p+k+1)^3}\right]z^k\\&\quad+\frac{2(k-\delta+1)^3}{(p+k-\delta+1)^2}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)z^{k-\delta}.\end{aligned}$$

再由直接计算得到

$$\begin{aligned}T_\phi^* T_\phi T_\phi T_\phi^* z^k &=\left[\frac{8(k+1)^2(k-\delta+1)^2}{p+k+1}\left|\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\right|^3+\frac{8(k-\delta+1)^3(k+1)}{p+k-\delta+1}\left|\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\right|^3\right.\\&\quad\left.+\frac{2(k+1)^3(k-\delta+1)}{(p+k+1)^3}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)+\frac{2(k-\delta+1)^4}{(p+k-\delta+1)^3}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\right]z^{k-\delta}\\&\quad+\frac{4(k-\delta+1)^3(k-2\delta+1)}{(p+k-\delta+1)^2}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\hat{\varphi}(2k-3\delta+2)z^{k-2\delta}\\&\quad+\left[\frac{4(k+1)^3(k-\delta+1)}{(p+k+1)^2}\left|\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\right|^2+\frac{(k+1)^4}{(p+k+1)^4}\right.\\&\quad\left.+\frac{4(k+1)^2(k-\delta+1)^2}{(p+k+1)(p+k-\delta+1)}\left|\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\right|^2\right]z^k.\end{aligned}$$

另一方面

$$T_\phi^* T_\phi z^k=\frac{k+1}{p+k+1}T_\phi^* z^k=\frac{(k+1)^2}{(p+k+1)^2}z^k+\frac{2(k-\delta+1)(k+1)}{p+k+1}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)z^{k-\delta}.$$

进而

$$\begin{aligned}T_\phi^* T_\phi^* T_\phi z^k&=\left[\frac{2(k-\delta+1)^2(k+1)}{(p+k-\delta+1)(p+k+1)}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)+\frac{2(k+1)^2(k-\delta+1)}{(p+k+1)^2}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\right]z^{k-\delta}\\&\quad+\frac{4(k-\delta+1)(k+1)(k-2\delta+1)}{p+k+1}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\hat{\varphi}(2k-3\delta+2)z^{k-2\delta}+\frac{(k+1)^3}{(p+k+1)^3}z^k.\end{aligned}$$

再由直接计算得到

$$
\begin{aligned}
&T_\phi T_\phi^* T_\phi^* T_\phi z^k \\
&=\left[\frac{8(k-\delta+1)^2(k+1)(k-2\delta+1)}{p+k+1}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\left|\hat{\varphi}(2k-3\delta+2)\right|^2\right. \\
&\qquad\left.+\frac{2(k+1)^2(k-\delta+1)^2}{(p+k+1)^2(p+k-\delta+1)}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)+\frac{2(k-\delta+1)^3(k+1)}{(p+k-\delta+1)^2(p+k+1)}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\right]z^{k-\delta} \\
&\qquad+\frac{4(k-\delta+1)(k+1)(k-2\delta+1)^2}{(p+k+1)(p+k-2\delta+1)}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\hat{\varphi}(2k-3\delta+2)z^{k-2\delta} \\
&\qquad+\left[\frac{4(k+1)^3(k-\delta+1)}{(p+k+1)^2}\left|\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\right|^2+\frac{(k+1)^4}{(p+k+1)^4}\right. \\
&\qquad\left.+\frac{4(k+1)^2(k-\delta+1)^2}{(p+k+1)(p+k-\delta+1)}\left|\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\right|^2\right]z^k.
\end{aligned}
$$

当 $0\le k<-\delta$ 时，T_ϕ 在 $A^2(\mathbb{D})$ 是双正规算子则有 $T_\phi^* T_\phi T_\phi T_\phi^* = T_\phi T_\phi^* T_\phi^* T_\phi$，那么有 $T_\phi^* T_\phi T_\phi T_\phi^* z^k = T_\phi T_\phi^* T_\phi^* T_\phi z^k$，对比 $z^{k-2\delta}$ 的系数可知：

$$
\begin{aligned}
&\frac{4(k-\delta+1)(k+1)(k-2\delta+1)^2}{(p+k+1)(p+k-2\delta+1)}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\hat{\varphi}(2k-3\delta+2) \\
&=\frac{4(k-\delta+1)^3(k-2\delta+1)}{(p+k-\delta+1)^2}\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\hat{\varphi}(2k-3\delta+2)
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&4(k-\delta+1)(k-2\delta+1)\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\hat{\varphi}(2k-3\delta+2) \\
&\times\left[\frac{(k-\delta+1)^2}{(p+k-\delta+1)^2}-\frac{(k+1)(k-2\delta+1)}{(p+k+1)(p+k-2\delta+1)}\right]=0
\end{aligned}
$$

但当 $0\le k<-\delta$，若

$$
\begin{aligned}
&\frac{(k-\delta+1)^2}{(p+k-\delta+1)^2}-\frac{(k+1)(k-2\delta+1)}{(p+k+1)(p+k-2\delta+1)} \\
&=\frac{\delta^2 p\left[2(k+1)+p-2\delta\right]}{(p+k-\delta+1)^2(p+k+1)(p+k-2\delta+1)}=0,
\end{aligned}
$$

则 $k=-\frac{p}{2}+\delta-1<0$，矛盾。所以有 $\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\hat{\varphi}(2k-3\delta+2)=0$。

若 $\hat{\varphi}(2k-\delta+2)=0$，对比各项系数相等，则 T_ϕ 是双正规算子。若 $\hat{\varphi}(2k-\delta+2)\ne 0,\hat{\varphi}(2k-3\delta+2)=0$，则 $z^{k-\delta}$ 的系数不相等。故当 $0\le k<-\delta$，有 $\hat{\varphi}(2k-\delta+2)=0$，根据引理 1 得到 $\varphi=0$。

充分性显然，当 $\varphi=0$，$\phi(re^{i\theta})=r^{2p}$，$T_\phi$ 是双正规算子，定理得证。

显而易见，正规算子蕴含拟正规算子，拟正规算子蕴含双正规算子，因此根据定理 2.4 还可以得到以下推论。

推论 2.5 设 $\phi(re^{i\theta})=e^{i\delta\theta}\varphi(r)+r^{2p}$，其中 $\delta\in\mathbb{N}$，$p\in\mathbb{N}$。若 T_ϕ 在 $A^2(\mathbb{D})$ 是双正规算子当且仅当 T_ϕ 在

$A^2(\mathbb{D})$是正规算子当且仅当T_ϕ在$A^2(\mathbb{D})$是拟正规算子。

证明：由定理 2.4 可知。

本文研究了 Bergman 空间上以径向函数与拟齐次函数的和函数为符号的 Toeplitz 算子的双正规性的充分必要条件。

参考文献

[1] Kim, S. and Lee, J. (2020) Normal Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Mathematics*, **8**, 1463. https://doi.org/10.3390/math8091463

[2] Cuckovi, Z. and Curto, R.E. (2018) A New Necessary Condition for the Hyponormality of Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Journal of Operator Theory*, **79**, 287-300.

[3] Lu, Y. and Shi, Y. (2009) Hyponormal Toeplitz Operators on the Weighted Bergman Space. *Integral Equations and Operator Theory*, **65**, 115-129. https://doi.org/10.1007/s00020-009-1712-z

[4] Lu, Y. and Liu, C. (2009) Commutativity and Hyponormality of Toeplitz Operators on the Weighted Bergman Space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **46**, 621-642. https://doi.org/10.4134/JKMS.2009.46.3.621