Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3185-3192
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311330

具奇异敏感的趋化模型解的整体有界性

牛　聪，陈　越

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2023年10月5日；录用日期：2023年11月6日；发布日期：2023年11月14日

摘　要

本文研究齐次Neumann边界条件下的具奇异敏感的抛物–椭圆趋化模型：$u_t = u_{xx} - \chi\left(\frac{u}{v^{\alpha}}v_x\right)_x$，$0 = v_{xx} - v + u^{\beta}$，其中$\Omega \subset \mathbb{R}$为有界区间，$\alpha,\beta,\chi > 0$。当$\alpha \in \left(0,\frac{3}{2}\right),\beta \in (0,2)$时，模型存在整体有界的古典解。

关键词

奇异敏感，古典解，整体有界性

Global Boundedness of the Solution for Chemotaxis Model with Singular Sensitivity

Cong Niu, Yue Chen

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 5th, 2023; accepted: Nov. 6th, 2023; published: Nov. 14th, 2023

Abstract

This article studies a parabolic-elliptical chemotaxis model with singular sensitivity under homogeneous Neumann boundary conditions: $u_t = u_{xx} - \chi\left(\frac{u}{v^{\alpha}}v_x\right)_x$, $0 = v_{xx} - v + u^{\beta}$, where $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\alpha,\beta,\chi > 0$. It's proved that the classical solution of $\alpha \in \left(0,\frac{3}{2}\right),\beta \in (0,2)$ is globally bounded.

文章引用：牛聪，陈越. 具奇异敏感的趋化模型解的整体有界性[J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3185-3192.
DOI: 10.12677/pm.2023.1311330

Keywords

Singular Sensitivity, Classical Solution, Global Boundedness

1. 前言

趋化性是细胞在化学信号影响下定向运动的生物学现象，这个过程在各种生物学应用中起着很大的作用，例如胚胎发育、伤口愈合和血管形成。Keller 和 Segel 首先提出关于趋化性的数学模型，在此之后 Keller-Segel 模型在过去的几十年中已经得到了深入的研究，并且发现了一系列性质，如解的存在性、有界性、有限时间内爆破。本文在一维背景下研究一类具奇异敏感的抛物－椭圆趋化模型：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - \chi\left(\dfrac{u}{v^\alpha} v_x\right)_x, & x \in \Omega, t > 0, \\ 0 = v_{xx} - v + u^\beta, & x \in \Omega, t > 0, \\ u_x = v_x = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\alpha, \beta, \chi > 0, \Omega \subset \mathbb{R}$ 是有界区间，$u = u(x,t)$ 表示细胞密度，$v = v(x,t)$ 表示化学信号浓度，初值 $u_0 \in C^0(\bar{\Omega})$ 并且 $u_0 \ge 0$。交叉扩散项 $-\chi\left(\dfrac{u}{v^\alpha} v_x\right)_x$ 刻画了奇异趋化敏感效应，其中 $\dfrac{\chi}{v^\alpha}$ 为指标 α 的敏感函数。根据奇异敏感函数 $\dfrac{\chi}{v^\alpha}$ 可知，当 v 变小时，趋化强度增强，能否证明 v 的一致下界对建立古典解的整体动力学行为至关重要。

现回顾 $\alpha = 1$ 时的相关结论。若 $\beta = 1$，文献[1]证明了当 $n = 2$ 或 $n \ge 3, 0 < \chi < \dfrac{2}{n-2}$ 时径向解是整体有界的，当 $n \ge 3$，$\chi > \dfrac{2n}{n-2}$ 且 $\int_\Omega u_0 |x|^2$ 足够小时解在有限时间内爆破；文献[2]讨论了经典非径向解的整体存在性和一致有界性，证明了当 $0 < \chi < \dfrac{2}{n}$ 时系统具有唯一的全局有界古典解。若(1.1)中的化学信号产生项 u^β 用 $g(u) \in C^1([0,\infty))$ 代替，满足次线性增长 $\lambda_1 \le g(u) \le \lambda_2 (1+u)^\beta$，$0 < \lambda_1 \le \lambda_2$，文献[3]证明了当 $\beta \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ 时解是整体有界的。对于相应的抛物－抛物趋化模型，其中 $0 < g(u) \le K u^\beta \left(K, \beta > 0\right)$，Liu 证明了当 $0 < \beta < 2 + \dfrac{2}{n}$，$0 < \chi < \min\left\{1, \sqrt{\dfrac{2}{n\beta}}\right\}$ 时存在全局经典解[4]。

当 $\beta \in (0,1)$ 时，因无法确定 v 的一致正下界，这给证明模型解的整体存在及有界性带来困难；当 $\beta \ge 1$ 时，可以确定 v 的一致正下界，但是趋化项的处理困难。在本文模型中细胞质量守恒，我们根据抛物－椭圆方程组理论以及 Neumann 热半群理论来证明模型的古典解整体有界。为了探究出 α, β 满足什么条件，模型的古典解整体有界，我们通过分类讨论的形式来证明。

定理 1.1 假设 $\alpha\in\left(0,\frac{3}{2}\right),\beta\in(0,2)$，则系统(1.1)存在整体有界古典解。

注 尽管次线性产生($\beta\in(0,1)$)不能直接建立化学信号 v 先验的正下界，但在一维情形下，借助 Hölder 不等式与 u 的 L^p 估计来刻画 v 的一致正下界并得到超对数敏感($\alpha\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$)情形古典解的整体有界性。

2. 预备知识

采用不动点理论和标准的抛物–椭圆正则性理论，可以得到古典解局部存在性，详细证明参考文献[5]。

引理 2.1 (局部存在性)假设 $\chi>0,\alpha\in\left(0,\frac{3}{2}\right),\beta\in(0,2)$，则存在 $T_{\max}\in(0,\infty]$ 及唯一非负函数 (u,v)，其中 $u\in C^0\left([0,T_{\max});C^0(\bar{\Omega})\right)\times C^{2,1}\left(\bar{\Omega}\times(0,T_{\max})\right),v\in C^{2,0}\left(\bar{\Omega}\times(0,T_{\max})\right)$，在古典解意义下满足系统(1.1)。另外，当 $T_{\max}<\infty$ 时，$\lim_{t\to T_{\max}}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\infty$ 或者 $\lim_{t\to T_{\max}}\inf_{x\in\Omega}v(x,t)=0$。

令 (u,v) 是模型(1.1)的局部古典解，然后我们有以下的基本估计。

引理 2.2 存在一些非负常数 m_0 和 $L_i\ (i=1,2,3)$ 使得

$$\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x=\int_\Omega u_0\mathrm{d}x=:m_0,\ t\in(0,T_{\max}),\tag{2.1}$$

和

$$\begin{cases}\|v_x\|_{L^\infty(\Omega)}\le L_1, & \beta\in(0,1),\\ \|v_x\|_{L^p(\Omega)}\le L_2, & \beta=1,\\ \|v_x\|_{L^{\frac{1}{\beta-1}}(\Omega)}\le L_3, & \beta\in(1,2),\end{cases}\tag{2.2}$$

并且有

$$\int_\Omega\frac{v_x^2}{v^2}\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{u^\beta}{v}\mathrm{d}x=|\Omega|.\tag{2.3}$$

3. 主要结果

引理 3.1 如果 $\chi>0,\alpha\in\left(0,\frac{3}{2}\right),\beta\in(0,2)$，则对于 $p>1$，存在常数 $L_4>0$ 使得

$$\int_\Omega u^p\mathrm{d}x\le L_4,\ t\in(0,T_{\max}).\tag{3.1}$$

证明 首先，由常数变易公式

$$u=\mathrm{e}^{t\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-1\right)}u_0-\chi\int_0^t\mathrm{e}^{(t-s)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-1\right)}\left(\frac{u}{v^\alpha}v_x\right)_x\mathrm{d}s,\ t\in(0,T_{\max}).$$

根据 Neumann 热半群理论(参考[6])，对于 $p>1$ 有

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(\Omega)}&\le\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{p}}+\chi K_4\int_0^t\left(1+(t-s)^{-1+\frac{1}{2p}}\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1(t-s)}\left\|\frac{u}{v^\alpha}v_x\right\|_{L^1(\Omega)}\mathrm{d}s\\&\le C_1+C_2\sup_{s\in(0,t)}\left\|\frac{u}{v^\alpha}v_x\right\|_{L^1(\Omega)},\ t\in(0,T_{\max}),\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中，$C_1=\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{p}},C_2=\chi K_4\int_0^t\left(1+(t-s)^{-1+\frac{1}{2p}}\right)e^{-\lambda_1(t-s)}ds,\lambda_1>0$ 表示齐次 Neumann 边界条件下 $-\Delta$ 的第一个非零特征值。

1) $\beta\in(0,1)$

根据 Hölder 不等式和 Young 不等式及引理 2.2 有

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{u}{v^\alpha}v_x dx &= \int_\Omega\left(\frac{u^{\frac{\beta}{2}}v_x}{v^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2\alpha}{3}} v_x^{1-\frac{2\alpha}{3}}u^{1-\frac{\alpha\beta}{3}}dx \\
&\le \left(\int_\Omega \frac{u^{\frac{\beta}{2}}v_x}{v^{\frac{3}{2}}}dx\right)^{\frac{2\alpha}{3}}\left(\int_\Omega v_x u^{\frac{3-\alpha\beta}{3-2\alpha}}dx\right)^{\frac{3-2\alpha}{3}} \\
&\le \left(\int_\Omega \frac{v_x^2}{v^2}dx+\int_\Omega\frac{u^\beta}{v}dx\right)^{\frac{2\alpha}{3}}\left(\int_\Omega v_x u^{\frac{3-\alpha\beta}{3-2\alpha}}dx\right)^{\frac{3-2\alpha}{3}} \\
&\le |\Omega|^{\frac{2\alpha}{3}}L_1^{\frac{3-2\alpha}{3}}\left(\int_\Omega u^{\frac{3-\alpha\beta}{3-2\alpha}}dx\right)^{\frac{3-2\alpha}{3}}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

由插值不等式得

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega u^{\frac{3-\alpha\beta}{3-2\alpha}}dx\right)^{\frac{3-2\alpha}{3}} &= \|u\|_{L^{\frac{3-\alpha\beta}{3-2\alpha}}(\Omega)}^{\frac{3-\alpha\beta}{3}} \\
&\le \left(\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{(3-2\alpha)p-(3-\alpha\beta)}{(3-\alpha\beta)(p-1)}}\|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha(2-\beta)p}{(3-\alpha\beta)(p-1)}}\right)^{\frac{3-\alpha\beta}{3}} \\
&\le m_0^{\frac{(3-2\alpha)p-(3-\alpha\beta)}{3(p-1)}}\|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha(2-\beta)p}{3(p-1)}}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

结合(3.2)，(3.3)，(3.4)，对 $p>\dfrac{3}{3-\alpha(2-\beta)}$，由 Young 不等式得

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(\Omega)} &= C_1+C_2|\Omega|^{\frac{2\alpha}{3}}L_1^{\frac{3-2\alpha}{3}}m_0^{\frac{(3-2\alpha)p-(3-\alpha\beta)}{3(p-1)}}\sup_{s\in(0,t)}\|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha(2-\beta)p}{3(p-1)}} \\
&\le C_1+\frac{1}{2}\sup_{s\in(0,t)}\|u\|_{L^p(\Omega)} \\
&\quad + m_0^{\frac{(3-2\alpha)p-(3-\alpha\beta)}{(3+\alpha\beta-2\alpha)p-3}}\left(C_2|\Omega|^{\frac{2\alpha}{3}}L_1^{\frac{3-2\alpha}{3}}\right)^{\frac{3(p-1)}{(3+\alpha\beta-2\alpha)p-3}},\ t\in(0,T_{\max}).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

因此，解这个不等式有

$$
\|u\|_{L^p(\Omega)}\le 2C_1+2m_0^{\frac{(3-2\alpha)p-(3-\alpha\beta)}{(3+\alpha\beta-2\alpha)p-3}}\left(C_2|\Omega|^{\frac{2\alpha}{3}}L_1^{\frac{3-2\alpha}{3}}\right)^{\frac{3(p-1)}{(3+\alpha\beta-2\alpha)p-3}},\ t\in(0,T_{\max}).
\tag{3.6}
$$

2) $\beta = 1$

文献[1]引理 2.1 有，存在 $\eta_1 > 0$ 使得对于非负函数 $f \in C^1(\bar{\Omega})$，当在边界 $\partial\Omega$ 处 $\frac{\partial\varphi}{\partial\upsilon} = 0$ 时，$-\Delta\varphi + \varphi = f$ 的解满足

$$\varphi(x) \ge \eta_1 \int_\Omega f\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

因此 $\beta = 1$ 时根据 Hölder 不等式，插值不等式和引理 2.2，对 $p > 2$ 有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{u}{v^\alpha} v_x \mathrm{d}x &\le \frac{1}{\eta^\alpha}\int_\Omega u v_x \mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{\eta^\alpha}\|u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} v_{x L^p(\Omega)} \\ &\le \frac{L_2}{\eta^\alpha}\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{p-2}{p-1}}\|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}} \\ &\le \frac{L_2}{\eta^\alpha} m_0^{\frac{p-2}{p-1}}\|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

把(3.8)代入(3.2)，由 Young 不等式得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(\Omega)} &\le C_1 + \frac{C_2 L_2}{\eta^\alpha} m_0^{\frac{p-2}{p-1}} \sup_{s\in(0,t)} m_0^{\frac{p-2}{p-1}} \sup_{s\in(0,t)} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}} \\ &\le C_1 + \frac{1}{2}\sup_{s\in(0,t)}\|u\|_{L^p(\Omega)} + m_0\left(\frac{C_2 L_2}{\eta^\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-2}},\ t\in(0,T_{\max}).\end{aligned} \tag{3.9}$$

因此，解这个不等式得

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le 2C_1 + 2m_0\left(\frac{C_2 L_2}{\eta^\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-2}},\ t\in(0,T_{\max}). \tag{3.10}$$

3) $\beta \in (1,2)$

根据 Hölder 不等式和插值不等式及引理 2.2，对 $p > \frac{1}{2-\beta}$ 有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{u}{v^\alpha} v_x \mathrm{d}x &\le \frac{1}{\eta^\alpha}\int_\Omega u v_x \mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{\eta^\alpha}\|v_x\|_{L^{\frac{1}{\beta-1}}(\Omega)}\|u\|_{L^{\frac{1}{2-\beta}}(\Omega)} \\ &\le \frac{L_3}{\eta^\alpha}\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{(2-\beta)p-1}{p-1}}\|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{(\beta-1)p}{p-1}} \\ &\le \frac{L_3}{\eta^\alpha} m_0^{\frac{(2-\beta)p-1}{p-1}}\|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{(\beta-1)p}{p-1}}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

将(3.11)代入(3.2)，并且由 Young 不等式得

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(\Omega)} &= C_1 + \frac{C_2 L_3}{\eta^\alpha} m_0^{\frac{(2-\beta)p-1}{p-1}} \sup_{s\in(0,t)} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{(\beta-1)p}{p-1}} \\
&\le C_1 + \frac{1}{2}\sup_{s\in(0,t)}\|u\|_{L^p(\Omega)} + m_0\left(\frac{C_2 L_3}{\eta^\alpha}\right)^{\frac{p-1}{(2-\beta)p-1}},\ t\in\left(0,T_{\max}\right).
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

因此，解这个不等式有

$$
\|u\|_{L^p(\Omega)} \le 2C_1 + 2m_0\left(\frac{C_2 L_3}{\eta^\alpha}\right)^{\frac{p-1}{(2-\beta)p-1}},\ t\in\left(0,T_{\max}\right).
\tag{3.13}
$$

证毕。

引理 3.2 如果 $\chi>0,\alpha\in\left(0,\frac{3}{2}\right),\beta\in(0,2)$，则系统(1.1)存在一个整体古典解。

证明 由文献[1]引理 2.1 知，$\beta\ge 1$ 时，v 有一致正下界。

对 $\beta\in(0,1)$，根据引理 2.2 和 Hölder 不等式有

$$
\int_\Omega u(x,t)\,\mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega u(x,t)^\beta\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u(x,t)^{2-\beta}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\ t\in\left(0,T_{\max}\right).
\tag{3.14}
$$

因此，由(2.1)，(3.14)及引理 3.1 得

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &\ge \eta_1\int_\Omega u(x,t)^\beta\,\mathrm{d}x \\
&\ge \eta_1\frac{\left(\int_\Omega u(x,t)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_\Omega u(x,t)^{2-\beta}\,\mathrm{d}x} \\
&\ge \frac{\eta_1 m_0^2}{L_4},\ t\in\left(0,T_{\max}\right).
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

最后，利用(3.15)中 v 的一致正下界及文献[1]中关于整体存在性的类似论证，我们将得到系统(1.1)古典解的整体存在性。

证毕。

由于解的整体存在性，可以看出引理 2.2 及引理 3.1 中的 $T_{\max}\in(0,\infty)$。接下来给出 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ 的估计。

定理 1.1 证明

由 Neumann 热半群理论，对 $q>1$ 有

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty(\Omega)} &\le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \chi K_4\int_0^t\left(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}}\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1(t-s)}\left\|\frac{u}{v^\alpha}v_x\right\|_{L^q(\Omega)}\mathrm{d}s \\
&\le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + C_3\sup_{s\in(0,t)}\left\|\frac{u}{v^\alpha}v_x\right\|_{L^q(\Omega)},\ t>0
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

其中 $C_3=\chi K_4\int_0^t\left(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}}\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1(t-s)}\mathrm{d}s$。

1) $\beta\in(0,1)$

根据引理 3.1，Hölder 不等式和 Young 不等式，对 $\frac{3}{3-\alpha\beta+2\alpha}<1<q<\frac{3}{2\alpha}$ 有

$$\int_\Omega \frac{u^q}{v^{\alpha q}} v_x^q \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\frac{u^{\frac{\beta}{2}} v_x}{v^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2\alpha q}{3}} v_x^{q-\frac{2\alpha q}{3}} u^{q-\frac{\alpha\beta q}{3}} \mathrm{d}x$$

$$\le \left(\int_\Omega \frac{u^{\frac{\beta}{2}} v_x}{v^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{2\alpha q}{3}} \left(\int_\Omega v_x^{\frac{3q-2\alpha q}{3-2\alpha q}} u^{\frac{3q-\alpha\beta q}{3-2\alpha q}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{3-2\alpha q}{3}} \tag{3.17}$$

$$\le \left(\int_\Omega \frac{v_x^2}{v^2} \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{u^\beta}{v} \mathrm{d}x \right)^{\frac{2\alpha q}{3}} \left(\int_\Omega v_x^{\frac{3q-2\alpha q}{3-2\alpha q}} u^{\frac{3q-\alpha\beta q}{3-2\alpha q}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{3-2\alpha q}{3}}$$

$$\le |\Omega|^{\frac{2\alpha q}{3}} L_1^{\frac{3q-2\alpha q}{3}} L_4^{\frac{3-2\alpha q}{3}},$$

由(3.16)和(3.17)得

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + C_3 |\Omega|^{\frac{2\alpha q}{3}} L_1^{\frac{3q-2\alpha q}{3}} L_4^{\frac{3-2\alpha q}{3}},\ t > 0. \tag{3.18}$$

2) $\beta = 1$

由引理 2.2 和引理 3.1 及 Hölder 不等式，对 $\gamma > 1$ 有

$$\int_\Omega \frac{u^q}{v^{\alpha q}} v_x^q \mathrm{d}x \le \frac{1}{\eta^{\alpha q}} \int_\Omega u^q v_x^q \mathrm{d}x$$

$$\le \frac{1}{\eta^{\alpha q}} \left(\int_\Omega u^{q\gamma} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_\Omega v_x^{\frac{q\gamma}{\gamma-1}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{3.19}$$

$$\le \frac{1}{\eta^{\alpha q}} L_2^q L_4^{\frac{1}{\gamma}}.$$

将(3.19)代入(3.16)得

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + C_3 \frac{1}{\eta^{\alpha q}} L_2^q L_4^{\frac{1}{\gamma}},\ t > 0. \tag{3.20}$$

3) $\beta \in (1,2)$

根据引理 3.1 和 Hölder 不等式，对 $\frac{1}{\beta} < 1 < q < \frac{1}{\beta - 1}$ 有

$$\int_\Omega \frac{u^q}{v^{\alpha q}} v_x^q \mathrm{d}x \le \frac{1}{\eta^{\alpha q}} \int_\Omega u^q v_x^q \mathrm{d}x$$

$$\le \frac{1}{\eta^{\alpha q}} \left(\int_\Omega v_x^{\frac{1}{\beta-1}} \mathrm{d}x \right)^{q(\beta-1)} \left(\int_\Omega u^{\frac{q}{q+1-q\beta}} \mathrm{d}x \right)^{q+1-q\beta} \tag{3.21}$$

$$\le \frac{1}{\eta^{\alpha q}} L_3^q L_4^{q+1-q\beta}.$$

由(3.16)和(3.21)得，

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + C_3 \frac{1}{\eta^{\alpha q}} L_3^q L_4^{q+1-q\beta},\ t > 0. \tag{3.22}$$

证毕。

参考文献

[1] Nagai, T. and Senba, T. (1998) Global Existence and Blow-Up of Radial Solutions to a Parabolic-Elliptic System of Chemotaxis. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, **8**, 145-156.

[2] Fujie, K., Winkler, M. and Yokota, T. (2015) Boundedness of Solutions to Parabolic-Elliptic Keller-Segel Systems with Signal-Dependent Sensitivity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **38**, 1212-1224. https://doi.org/10.1002/mma.3149

[3] Viglialoro, G. and Woolley, T.E. (2020) Solvability of a Keller-Segel System with Signal-Dependent Sensitivity and Essentially Sublinear Production. *Applicable Analysis*, **99**, 2507-2525. https://doi.org/10.1080/00036811.2019.1569227

[4] Liu, D. (2020) Global Solutions in a Fully Parabolic Chemotaxis System with Singular Sensitivity and Nonlinear Signal Production. *Journal of Mathematical Physics*, **61**, Article ID: 021503. https://doi.org/10.1063/1.5111650

[5] Fujie, K., Winkler, M. and Yokota, T. (2014) Blow-Up Prevention by Logistic Sources in a Parabolic-Elliptic Keller-Segel System with Singular Sensitivity. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **109**, 56-71. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.06.017

[6] Winkler, M. (2010) Aggregation vs. Global Diffusive Behavior in the Higher-Dimensional Keller-Segel Model. *Journal of Differential Equations*, **12**, 2889-2905. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.02.008