Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3219-3225
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311335

两个度量的Gromov双曲性和强双曲性

徐　畅，张孝惠

浙江理工大学理学院，浙江　杭州

收稿日期：2023年10月11日；录用日期：2023年11月13日；发布日期：2023年11月22日

摘　要

本文提出了在同一空间上的两个度量是sign-型的概念，研究了两个sign-型的Gromov双曲度量的和也具有Gromov双曲性，并推广至其线性组合的Gromov双曲性。在Ptolemy空间中，我们构造了一种强双曲度量。

关键词

Sign-型度量，Gromov双曲性，强双曲性

Gromov Hyperbolicity and Strong Hyperbolicity of Two Metrics

Chang Xu, Xiaohui Zhang

School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang

Received: Oct. 11th, 2023; accepted: Nov. 13th, 2023; published: Nov. 22nd, 2023

Abstract

We introduce the notion of sign-likeness of two metrics on the same space, and study the Gromov hyperbolicity of the sum of two sign-like metrics which is generalized to the Gromov hyperbolicity of their linear combinations. In a Ptolemy space, we also construct a strongly hyperbolic metric.

Keywords

Sign-Like Metric, Gromov Hyperbolicity, Strong Hyperbolicity

文章引用: 徐畅, 张孝惠. 两个度量的 Gromov 双曲性和强双曲性[J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3219-3225.
DOI: 10.12677/pm.2023.1311335

1. 引言

设 (D,d) 是一个度量空间，若存在 $\delta \ge 0$，对于任意的 $x,y,z,t \in D$，都有：

$$(x|y)_t \ge (x|z)_t \wedge (y|z)_t - \delta \tag{1}$$

其中 $(x|y)_t = \frac{1}{2}\left[d(x,t)+d(y,t)-d(x,y)\right]$，则称度量空间 (D,d) 为 δ -双曲空间或 Gromov 双曲空间。式(1)等价于如下四点不等式：

$$d(x,y)+d(z,t) \le \left(d(x,z)+d(y,t)\right) \vee \left(d(x,t)+d(y,z)\right)+2\delta,$$

其中：对于任意的实数 r 和 s，$r \vee s = \max\{r,s\}$，$r \wedge s = \min\{r,s\}$。

Gromov 双曲性[1]是 Gromov 在研究抽象度量空间的“负曲率”弯曲时引入的一个重要概念。如果一个度量空间中的点都可以用测地线段相互连结，并且如果存在某个一致的常数 δ，使得对任何以测地线段为边的三角形，都存在某点到三边的距离都小于 δ，那么在这个空间中，边再长的三角形也还是显得比较瘦。具有这种瘦三角形性质的测地度量空间就称为 δ -双曲空间，也就是 Gromov 双曲空间。Gromov 双曲性被广泛应用于几何、分析和拓扑等领域的研究中，尤其是与几何群论、微分几何等领域有密切的联系[2] [3] [4]。

双曲度量和双曲型度量是推动几何函数论发展的重要工具，许多在几何函数论中有重要应用的双曲型度量也具有 Gromov 双曲性，例如拟双曲度量[5]、Cassinian 度量[6]、三角比度量[7]以及 Ibragimov 度量[8]等。Aksoy 等[9]构造了两个单点型伸缩不变 Cassinian 度量的平均并证明了它们的 Gromov 双曲性，文中也举例说明了一般情况下两个 Gromov 双曲度量的和度量不一定具有 Gromov 双曲性。

Nica [10]在 2016 年提出了强双曲空间的概念。设 (D,d) 是一个度量空间，若存在 $\delta \ge 0$，对于任意的 $x,y,z,t \in D$，都有：

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon(x|y)_t} \le \mathrm{e}^{-\varepsilon(x|z)_t} + \mathrm{e}^{-\varepsilon(z|y)_t} \tag{2}$$

成立，则称度量空间 (D,d) 为 ε -双曲空间或强双曲空间。式(2)等价于如下四点不等式：

$$\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{2}(d(x,y)+d(z,t))} \le \mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{2}(d(x,z)+d(y,t))} + \mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{2}(d(x,t)+d(y,z))}$$

由于某些分析性质的研究需要，空间的 Gromov 双曲性是不够的，强双曲性提供了一种空间的强化。强双曲空间是一类在无穷远处具有良好的度量性质的 Gromov 双曲空间，例如，CAT(-1)空间和双曲平面 H^2 空间都是参数为 1 的强双曲空间[10]。因此，构造一些合适的强双曲空间是非常有意义的[11] [12]，这将有助于完善对强双曲空间的研究工作。

既然两个一般的 Gromov 双曲度量空间之和不一定仍是 Gromov 双曲的，那么自然地我们要问什么样的度量空间的和能保持 Gromov 双曲性呢？为了回答这一问题，本文首先定义一类 sign-型的度量，研究 sign-型度量之和的 Gromov 双曲性(定理 1)，扩展了 Gromov 双曲度量的和具有 Gromov 双曲性这一性质，并进一步证明 sign-型度量的线性组合也具有 Gromov 双曲性(推论 1)；其次，在 Ptolemy 空间中，我们推广一种特殊的构造强双曲空间的方法(定理 2)。

2. 主要结论

本文采用的符号如下：$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间。$d(x,y)$ 表示度量空间 (D,d) 中任意的两点 x 和 y 之间的距离，$d(x)$ 表示 x 与 D 的边界 ∂D 之间的距离。当 $D \subseteq \mathbf{R}^n$ 时，$|x-y|$ 表示 x 和 y 之间的欧氏距离。

设 (D,d_1) 和 (D,d_2) 是两个度量空间，对于任意的 $x,y,z,t \in D$，都有：

$$\left[d_1(x,z)+d_1(y,t)-d_1(x,t)-d_1(y,z)\right]\left[d_2(x,z)+d_2(y,t)-d_2(x,t)-d_2(y,z)\right] \geq 0 \tag{3}$$

则称 d_1 和 d_2 是 sign-型度量。例如，当 d_1 和 d_2 是线性关系时，那么 d_1 和 d_2 是 sign-型度量。

下面给出 sign-型度量求和的 Gromov 双曲性的结论。

定理 1 设 (D,d_1) 和 (D,d_2) 是两个 Gromov 双曲空间，如果 d_1 和 d_2 是 sign-型度量，那么空间 (D,d)，$d=d_1+d_2$ 是 Gromov 双曲空间。

设 (D,d) 是一个度量空间，若对于所有的 $x,y,z,t \in D$，都有

$$d(x,y)d(z,t) \leq d(x,z)d(y,t)+d(x,t)d(y,z),$$

则称 (D,d) 是 Ptolemy 空间。在 Ptolemy 空间中，我们构造出如下形式的强双曲空间。

定理 2 设 (D,d) 是一个 Ptolemy 空间，设 $d'=d+\sqrt{2}\,\mathrm{sgn}(d)$，sgn 为符号函数，那么度量空间 $\left(D,\log\sqrt{1+d'^2}\right)$ 是带有参数 2 的强双曲空间。

3. 定理的证明及推论

3.1. 定理 1 的证明及推论

引理 1 设 (D,d_1) 和 (D,d_2) 是两个度量空间，对于任意的 $x,y,z,t \in D$，设

$$T=\left(d_1(x,z)+d_1(y,t)+d_2(x,z)+d_2(y,t)\right)\vee\left(d_1(x,t)+d_1(y,z)+d_2(x,t)+d_2(y,z)\right)$$

那么我们有

$$d_1(x,z)+d_1(y,t)+d_2(x,t)+d_2(y,z) \leq T \tag{4}$$

$$d_1(x,t)+d_1(y,z)+d_2(x,z)+d_2(y,t) \leq T \tag{5}$$

当且仅当 d_1 和 d_2 是 sign-型的。

证明 首先我们先证明必要性，假设 d_1 和 d_2 是 sign-型的，那么根据 T 的选择可以分成两种情况：

i) $T=d_1(x,z)+d_1(y,t)+d_2(x,z)+d_2(y,t)$ 时，由 d_1 和 d_2 是 sign-型的，我们可以得出

$$d_1(x,z)+d_1(y,t) \geq d_1(x,t)+d_1(y,z)$$

$$d_2(x,z)+d_2(y,t) \geq d_2(x,t)+d_2(y,z)$$

因此，可以推出(4) (5)成立。

ii) $T=d_1(x,t)+d_1(y,z)+d_2(x,t)+d_2(y,z)$ 时，由 d_1 和 d_2 是 sign-型的，我们可以得出

$$d_1(x,z)+d_1(y,t) \leq d_1(x,t)+d_1(y,z)$$

$$d_2(x,z)+d_2(y,t) \leq d_2(x,t)+d_2(y,z)$$

因此，可以推出(4) (5)成立。

同理，考虑上面 T 的两种情况，充分性显然成立。 □

定理 1 的证明 设空间 (D,d_1) 为 δ_1-双曲空间、空间 (D,d_2) 为 δ_2-双曲空间，对于任意的 $x,y,z,t \in D$，

由四点不等式，我们有

$$d_1(x,y)+d_1(z,t)\le\left(d_1(x,z)+d_1(y,t)\right)\vee\left(d_1(y,z)+d_1(x,t)\right)+2\delta_1,$$

$$d_2(x,y)+d_2(z,t)\le\left(d_2(x,z)+d_2(y,t)\right)\vee\left(d_2(y,z)+d_2(x,t)\right)+2\delta_2,$$

这两个不等式意味着

$$\begin{aligned}d(x,y)+d(z,t)&=d_1(x,y)+d_2(x,y)+d_1(z,t)+d_2(z,t)\\&\le\Big[\left(d_1(x,z)+d_1(y,t)+d_2(x,z)+d_2(y,t)\right)\\&\quad\vee\left(d_1(x,z)+d_1(y,t)+d_2(y,z)+d_2(x,t)\right)\\&\quad\vee\left(d_1(y,z)+d_1(x,t)+d_2(x,z)+d_2(y,t)\right)\\&\quad\vee\left(d_1(y,z)+d_1(x,t)+d_2(y,z)+d_2(x,t)\right)\Big]+2(\delta_1+\delta_2)\end{aligned}$$

根据引理 1

$$\begin{aligned}d(x,y)+d(z,t)&\le\Big[\left(d_1(x,z)+d_1(y,t)+d_2(x,z)+d_2(y,t)\right)\\&\quad\vee\left(d_1(y,z)+d_1(x,t)+d_2(y,z)+d_2(x,t)\right)\Big]+2(\delta_1+\delta_2)\\&=\left(d(x,z)+d(y,t)\right)\vee\left(d(x,t)+d(y,z)\right)+2(\delta_1+\delta_2)\end{aligned}$$

因此，空间(D,d)是$(\delta_1+\delta_2)$-双曲空间。

推论 1 设(D,d_1)和(D,d_2)是两个 Gromov 双曲空间，如果 d_1 和 d_2 是 sign-型度量，那么它们的线性组合也是 Gromov 双曲的。即空间(D,d)， $d=\alpha d_1+\beta d_2,\alpha\ge0,\beta\ge0$是 Gromov 双曲空间。

证明 显然，当$\alpha=0$或$\beta=0$时，由四点不等式，空间(D,d)一定是 Gromov 双曲空间。当$\alpha>0,\beta>0$时，设$d_1'=\alpha d_1$和$d_2'=\beta d_2$，那么(D,d_1')和(D,d_2')是 Gromov 双曲空间。又由于 d_1 和 d_2 是 sign-型度量，这意味着d_1'和d_2'也是 sign-型的，因此，由定理 1 可以得出空间(D,d)是 Gromov 双曲空间。

3.2. 定理 2 的证明

引理 2 设$x^2\ge4m$和$y^2\ge4n$，那么

$$\sqrt{1+(m+n)^2+\frac{(x+y)^2}{2}}\le\sqrt{1+x^2-2m+m^2}+\sqrt{1+y^2-2n+n^2}$$

证明 将上式两边同时平方化简，等价于如下形式

$$-\frac{1}{2}(x-y)^2+2(1+m)(1+n)-3\le2\sqrt{\left(1+x^2-2m+m^2\right)\left(1+y^2-2n+n^2\right)}\tag{6}$$

注意到$x^2\ge4m$和$y^2\ge4n$，因此我们有

$$\begin{aligned}(1+m)(1+n)&\le\sqrt{\left((1+m)^2+x^2-4m\right)\left((1+n)^2+x^2-4n\right)}\\&=\sqrt{\left(1+x^2-2m+m^2\right)\left(1+y^2-2n+n^2\right)}\end{aligned}$$

并且对于任意x,y，有$-\frac{1}{2}(x-y)^2-3\le0$，这就得出(6)式成立，完成了证明。

推论 2 一个 Ptolemy 空间(D,d)，具有如下性质：

$$\sqrt{\left(1+d_{12}^2\right)\left(1+d_{34}^2\right)}\le\sqrt{\left(1+d_{13}^2\right)\left(1+d_{24}^2\right)}+\sqrt{\left(1+d_{23}^2\right)\left(1+d_{14}^2\right)}$$

其中 $d_{ij} := d\left(x_i, x_j\right), x_i, x_j \in D$。

证明　注意到 (D,d) 是度量空间，由三角不等式，我们有

$$d_{12} \le d_{13} + d_{32}, d_{12} \le d_{14} + d_{42}$$
$$d_{34} \le d_{31} + d_{14}, d_{34} \le d_{32} + d_{24}$$

整理可得

$$d_{12} \le \frac{d_{13} + d_{14} + d_{23} + d_{24}}{2},\quad d_{34} \le \frac{d_{13} + d_{14} + d_{23} + d_{24}}{2}$$

因此，可以得到

$$d_{12}^2 + d_{34}^2 \le \frac{\left(d_{13} + d_{14} + d_{23} + d_{24}\right)^2}{2}$$

下面记

$$m = d_{13}d_{24},\quad x = d_{13} + d_{24},\quad n = d_{14}d_{23},\quad y = d_{14} + d_{23}$$

由 (D,d) 是 Ptolemy 空间和引理 2，我们有

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(1+d_{12}^2\right)\left(1+d_{34}^2\right)} &= \sqrt{1 + d_{12}^2 d_{34}^2 + \left(d_{12}^2 + d_{34}^2\right)} \\
&\le \sqrt{(1 + \left(d_{13}d_{24} + d_{14}d_{23}\right)^2 + \frac{\left(d_{13} + d_{14} + d_{23} + d_{24}\right)^2}{2}} \\
&\le \sqrt{1 + \left(d_{13} + d_{24}\right)^2 - 2d_{13}d_{24} + d_{13}^2 d_{24}^2} + \sqrt{1 + \left(d_{14} + d_{23}\right)^2 - 2d_{14}d_{23} + d_{14}^2 d_{23}^2} \\
&= \sqrt{\left(1+d_{13}^2\right)\left(1+d_{24}^2\right)} + \sqrt{\left(1+d_{23}^2\right)\left(1+d_{14}^2\right)}
\end{aligned}$$

完成了证明。

引理 3　如果 (D,d) 是一个度量空间，那么 $\left(D, d + t\operatorname{sgn}(d)\right), t \ge 0$ 也是一个度量空间。

证明　需要证明 $d' = d + t\operatorname{sgn}(d), t \ge 0$ 是一个度量。显然，对任意 $x, y \in D$，$d'(x,y) \ge 0$，$d'(x,y) = d'(y,x)$ 并且 $d'(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$。所以只需要证明三角不等式即可。也就是说，对任意 $x, y, z \in D$，

$$d'(x,y) \le d'(x,z) + d'(z,y)$$

如果 $x = y$，那么我们有

$$0 = d'(x,y) \le d'(x,z) + d'(z,y)$$

如果 $x \ne y$，那么有

$$\begin{aligned}
d'(x,y) &= d(x,y) + t\operatorname{sgn}\left(d(x,y)\right) \\
&= d(x,y) + t \\
&\le d(x,z) + d(z,y) + t \\
&\le d'(x,z) + d'(z,y)
\end{aligned}$$

完成了证明。

引理 4　如果 (D,d) 是一个 Ptolemy 空间，那么 $\left(D, d + t\operatorname{sgn}(d)\right), t \ge 0$ 也是一个 Ptolemy 空间。

证明　由引理 3，我们知道 $d' = d + t\operatorname{sgn}(d)$ 是一个度量。记 $d_{ij} := d\left(x_i, x_j\right), x_i, x_j \in D$，下面我们需要

证明

$$d'_{12}d'_{34} \le d'_{13}d'_{24} + d'_{14}d'_{23}$$

显然，当 $x_1 = x_2$ 或 $x_3 = x_4$ 时，那么有 $0 = d'_{12}d'_{34} \le d'_{13}d'_{24} + d'_{14}d'_{23}$。下面考虑 $x_1 \ne x_2$ 和 $x_3 \ne x_4$ 的情况。

i) 如果 $x_1 = x_3$ 或 $x_2 = x_4$，那么有 $d'_{13}d'_{24} = 0$，因此

$$\begin{aligned} d'_{12}d'_{34} &= \left(d_{12} + t\right)\left(d_{34} + t\right) \\ &= d_{12}d_{34} + \left(d_{12} + d_{34}\right)t + t^2 \\ &= d_{14}d_{23} + \left(d_{14} + d_{23}\right)t + t^2 \\ &= d'_{14}d'_{23} \\ &= d'_{13}d'_{24} + d'_{14}d'_{23} \end{aligned}$$

ii) 如果 $x_1 \ne x_3$ 或 $x_2 \ne x_4$，那么有

$$\begin{aligned} d'_{12}d'_{34} &= \left(d_{12} + t\right)\left(d_{34} + t\right) \\ &= d_{12}d_{34} + \left(d_{12} + d_{34}\right)t + t^2 \\ &\le d_{13}d_{24} + d_{14}d_{23} + \left(d_{13} + d_{24} + d_{14} + d_{23}\right)t + 2t^2 \\ &= \left(d_{13}d_{24} + \left(d_{13} + d_{24}\right)t + t^2\right) + \left(d_{14}d_{23} + \left(d_{14} + d_{23}\right)t + t^2\right) \\ &= d'_{13}d'_{24} + d'_{14}d'_{23} \end{aligned}$$

完成了证明。

定理 2 的证明　首先证明 $d^* = \log\sqrt{1 + d'^2}$ 是一个度量。对于任意的 $x, y, z \in D$，显然 $d^*(x, y) \ge 0$，$d^*(x, y) = d^*(y, x)$，$d^*(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$，因此只需要证明 d^* 满足三角不等式。即，

$$d^*(x, y) \le d^*(x, z) + d^*(z, y),$$

这等价于

$$1 + d'^2(x, y) \le \left(1 + d'^2(x, z)\right)\left(1 + d'^2(z, y)\right) \tag{7}$$

注意到

$$d'(x, y) = \begin{cases} d(x, y) + \sqrt{2} > \sqrt{2}, & x \ne y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

因此 $d'(x, z)d'(z, y) = 0$ 或 $d'(x, z)d'(z, y) > 2$，这意味着

$$2d'(x, z)d'(z, y) \le d'^2(x, z)d'^2(z, y)$$

由上述讨论可得

$$\begin{aligned} 1 + d'^2(x, y) &\le 1 + \left(d'(x, z) + d'(z, y)\right)^2 \\ &= 1 + d'^2(x, z) + d'^2(z, y) + 2d'(x, z)d'(z, y) \\ &\le 1 + d'^2(x, z) + d'^2(z, y) + d'^2(x, z)d'^2(z, y), \\ &= \left(1 + d'^2(x, z)\right)\left(1 + d'^2(z, y)\right) \end{aligned}$$

证得(7)式成立，完成了证明。

下面证明 $\left(D, \log\sqrt{1 + d'^2}\right)$ 是参数为 2 的强双曲空间。设 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in D$，为书写方便我们记以下记号：$d'_{ij} := d'\left(x_i, x_j\right), i, j \in 1,2,3,4$，$\rho_{ij} = \log\sqrt{1 + d'^2_{ij}}$。

现在需要证明

$$e^{\rho_{12}+\rho_{34}} \le e^{\rho_{13}+\rho_{24}} + e^{\rho_{14}+\rho_{23}}$$

上式等价于

$$\sqrt{\left(1+d_{12}^2\right)\left(1+d_{34}^2\right)} \le \sqrt{\left(1+d_{13}^2\right)\left(1+d_{24}^2\right)} + \sqrt{\left(1+d_{23}^2\right)\left(1+d_{14}^2\right)}$$

由推论 2 可直接得出上式成立，这就完成了证明。 □

4. 结论

单个度量的 Gromov 双曲性目前已经有广泛的研究，本文主要研究了 sign-型度量之和的 Gromov 双曲性，推广了度量求和具有 Gromov 双曲性。强双曲性目前研究的结论较少，本文给出了一种构造强双曲空间的方法，将有助于完善对强双曲空间的研究工作。

1) 定义了 sign-型度量，研究了 sign-型度量的性质，从而得出 sign-型度量之和具有 Gromov 性，并推广到 sign-型度量的线性组合也具有 Gromov 双曲性。

2) 研究了 Ptolemy 空间的性质，构造出一种新的度量，并证明这种度量具有强双曲性。

参考文献

[1] Gromov, M. (1987) Hyperbolic Groups. In: Gersten, S.M., Ed., *Essays in Group Theory*, Springer, New York, 75-263. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9586-7_3

[2] Bonk, M., Heinonen, J. and Koskela, P. (2001) Uniformizing Gromov Hyperbolic Spaces. Asterisque Société Mathématique de France, Paris, 270.

[3] Buyalo, S. and Schroeder, V. (2007) Elements of Asymptotic Geometry. EMS Press, Berlin. https://doi.org/10.4171/036

[4] Väisälä, J. (2005) Gromov Hyperbolic Spaces. *Expositiones Mathematicae*, **23**, 187-231. https://doi.org/10.1016/j.exmath.2005.01.010

[5] Gehring, F.W. and Osgood, B.G. (1979) Uniform Domains and the Quasihyperbolic Metric. *Journal d'Analyse Mathématique*, **36**, 50-74. https://doi.org/10.1007/BF02798768

[6] Ibragimov, Z. (2009) The Cassinian Metric of a Domain in R^n. *Uzbek Mathematical Journal*, **1**, 53-67.

[7] Chen, J., Hariri, P., Klén, R. and Vuorinen, M. (2015) Lipschitz Conditions, Triangular Ratio Metric, and Quasiconformal Maps. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae-Mathematica*, **40**, 683-709. https://doi.org/10.5186/aasfm.2015.4039

[8] Ibragimov, Z. (2011) Hyperbolizing Metric Spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **139**, 4401-4407. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2011-10857-8

[9] Aksoy, A., Ibragimov, Z. and Whiting, W. (2018) Averaging One-Point Hyperbolic-Type Metrics. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **146**, 5205-5218. https://doi.org/10.1090/proc/14173

[10] Nica, B. and Špakula, J. (2016) Strong Hyperbolicity. *Groups Geometry and Dynamics*, **10**, 951-964. https://doi.org/10.4171/GGD/372

[11] Zhang, Z. and Xiao, Y. (2019) Strongly Hyperbolic Metrics on Ptolemy Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **478**, 445-457. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.05.036

[12] Katz, N.N. (2021) Hyperbolic Metrics on Open Subsets of Ptolemaic Spaces with Sharp Parameter Bounds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **149**, 2213-2220. https://doi.org/10.1090/proc/15288