Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3295-3315
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311343

具有记忆项的对数 Boussinesq 型方程解的长时间行为研究

王 爽，闫 龙

东北电力大学理学院，吉林 吉林

收稿日期：2023 年 10 月 19 日；录用日期：2023 年 11 月 20 日；发布日期：2023 年 11 月 27 日

摘 要

本文考虑一类具有记忆项的对数梁方程的初边值问题。利用 Galerkin 方法结合对数 Sobolev 不等式及对数 Gronwall 不等式，我们证明了解的全局存在性。在此基础上，我们借助位势井思想进一步得到了系统在适当初值条件下的指数衰减及指数增长。

关键词

对数梁方程，记忆项，整体存在性，指数增长，能量衰减

Study on the Longtime Behavior of the Solution of Logarithmic Boussinesq Type Equations with Memory

Shuang Wang, Long Yan

School of Science, Northeast Electric Power University, Jilin Jilin

Received: Oct. 19^{th}, 2023; accepted: Nov. 20^{th}, 2023; published: Nov. 27^{th}, 2023

文章引用: 王爽, 闫龙. 具有记忆项的对数 Boussinesq 型方程解的长时间行为研究 [J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3295-3315. DOI: 10.12677/pm.2023.1311343

Abstract

This paper is concerned with the initial value problem of a logarithmic beam equations with memory. Using Galerkin method, logarithmic Sobolev inequality and the Gronwall inequality, we obtain the global existence of the solutions. Moreover, we prove the exponential decay and exponential growth of the system by using potential well theory.

Keywords

Logarithmic Beam Equations, Memory, Global Existence, Exponential Growth, Energy Decay

1. 引言

在本文中我们考虑如下对数黏弹性梁方程的初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}+u_{xxxx}-u_{xx}-u_{xxtt}-(g*u_{xxxx})(t)+u_t-u_{xxt}+(u_x\ln|u_x|^k)_x=0, & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+, \\ u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u_{xx}(0,t)=u_{xx}(l,t)=0, & t\in\mathbb{R}^+, \\ u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega=(0,l)$ 为有界区间，$(g*u_{xxxx})(t)=\int_0^t g(t-\tau)u_{xxxx}(\tau)d\tau$ 为记忆项，$k\geq 1$ 为满足 $e^{-(1+\frac{1}{k})}<\sqrt{\frac{\pi l_0}{k}}$ 的常数。

梁方程可以用来描述工程学中房屋、铁路、桥梁、隧道、堤坝等梁的振动问题，因为梁的材质不同，所以它们在振动时的性质也不同，因此关于梁方程解的稳定性的研究具有十分重要的实际意义。Boussinesq 型方程可视为是一种梁方程。

问题(1.1)对应一类推广的 Boussinesq 方程，该类方程首先由 Boussinesq 在 [1] 中提出，用以描述浅水表面长波的传播，该系统的解可以描述丰富的动力学行为，一直以来都是偏微分方程研

究领域的热门对象之一。1974 年，Zakharov [2] 提出了广义 Boussinesq 系统，该系统不仅可以用来描述具有自由表面的薄膜振动，而且可以用来描述非线性弦、形状记忆合金、弹性棒及耦合电路中波的传播，还适用于多孔地下层中水的渗透问题。

Boussinesq 型方程基本形式如下

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_{xxxx} = \beta(u^2)_{xx},$$

其中 $u(x,t)$ 是流体自由表面的高度，系数 α 和 β 由流体本身性质决定。Liu 在 [3] 中讨论了该方程解的有限时间爆破的条件，证明了在低初始能量状态下的解在有限时间内爆破。为了研究具有表面张力的水波问题 Wang 等人在 [4] 中考虑了以下形式的 Boussinesq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxxtt} + \alpha u_{xxxx} = f(u)_{xx},$$

其中 $f(u) = \beta|u|^p, \alpha > 0, \beta > 0, p > 0$，并得到了解的全局稳定性以及解在无穷远处的爆破性。

近年来，关于对数型源项 $u\ln|u|^k$ 对双曲方程解的长时间行为影响的研究成为热点之一，该类源项源自于超对称场理论、宇宙膨胀理论及量子力学理论研究 [5]，关于对数源项在 Boussinesq 方程中的情况，许多学者也做了研究。在 2015 年 Wazwaz [6] 等人首次考虑了具有对数源项的 Boussinesq 型方程

$$u_{tt} + u_{xx} + u_{xxxx} + (u\log|u|^k)_{xx} = 0,$$

得到了该方程的孤立波的存在性。在此基础上 Hu 和 Zhang [7] 等人研究了如下具有强阻尼项和对数源 Boussinesq 型方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxx} + (u\log|u|^k)_{xx} = 0, x \in \Omega, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, u_{xx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \end{cases}$$

其中 $k \geq 1, \Omega = (0,l)$。利用 Galaerkin 方法、对数 Sobolev 不等式和 Gronwall 不等式，他们得到了弱解全局存在性，进一步利用位势井理论，他们得出在次临界能量级下解的指数增长。关于对数 Boussinesq 方程的相关研究还可参见 [8]。

另一方面，自 Renardy [9] 在 1987 年提出黏弹性系统的相关数学问题以来，带有黏弹性项的偏微分方程解的性态就成为了相关领域研究热点之一。由于黏弹性材料可以储存其历史形变，即粘弹性项具有耗散能量的性质，因此会对系统解的性态带来一定的影响。Marcelo 在 [10] 研究了如下具有黏弹性项梁方程解的长时间行为

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)d\tau = 0, \quad \Omega \times (0,\infty),$$

证明了当黏弹性核 g 按指数形式衰减时，系统能量也会按照指数形式衰减。

Park 等人在 [11] 中进一步研究了具有非线性阻尼和黏弹性项的梁方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} - \int_0^t \kappa(t-\tau) u_{xxxx}(\tau) d\tau + g(u_t) = 0\ , \quad \Omega \times R^+,$$

并且得到了解的全局存在性的结果。在此基础上，Narciso 等人在 [12] 中研究了具黏弹性项梁方程的动力学结构，证明了该方程具有稳定的全局吸引子。

Peyravi A 等人在 [13] 中考虑了如下在三维空间中同时具有黏弹性项、阻尼项和对数源项的波动方程

$$u_{tt} - \Delta u + u + (g * \Delta u)(t) + h(u_t)u_t + |u|^2 u = u \log |u|^k,$$

其中，$h(s) = k_0 + k_1 |s|^{s-1}$，得到了解的一般稳定性以及粘弹性核 g 不需要满足一些限制性条件就可以得到解的爆破性。吴晓霞 [14] 等人在研究三维空间中具有线性黏弹性项波动方程解的性质的基础上进行了扩展，研究在 $\mathbb{R}^n$ 空间中波动方程的性质。

针对黏弹性项对 Boussinesq 型方程解的动力学行为的影响，相关研究也比较丰富。代亚辉等人在 [15] 中考虑如下一类具有黏弹性项及非线性阻尼的 Boussinesq 方程的初边值问题，

$$u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xx} - u_{xxtt} + \int_0^t g(t-s) u_{xxxx} ds = f(x, t, u, u_t),$$

并给出了解的爆破性条件。

当对数源项及黏弹性项同时作用在 Boussinesq 型方程上时，系统的动力学行为会更为复杂，据作者所知，目前关于这方面的研究还比较少，本文考虑方程(1.1)解的全局存在性长时间行为。在本文中我们利用对数 Sobolev 不等式、Gronwall 不等式和 Galerkin 方法得到问题(1.1)弱解的全局存在性；在此基础上，通过位势井理论，给出了在适当条件下解在无穷远处爆破；最后，受到 Peyravi 等人 [13] 对黏弹性项估计的方法及修改经典凸性的方法的启发，通过构造适当能量泛函，给出方程能量一般衰减估计。

本文的结构如下：在第 2 节，我们介绍本文出现的一些数学符号和重要引理；在第 3 节，我们利用 Galerkin 方法得到了整体解的存在性；在第 4 节与第 5 节，我们分别证明了解的指数增长性以及系统能量的一般衰减。

2. 预备知识

在本节中，我们给出问题(1.1)弱解定义及相关记号与引理。令 $H = L^2(\Omega)$，$(,)$ 为其上内积，$\|.\|_p$ 为 $L^p(\Omega)$ 上范数，且当 $p = 2$ 时，简记为 $\|.\|$。设 $W^{k,p}$ 为经典意义下的 Sobolev 空间，当 $p = 2$ 时，将 $W^{s,2}$ 简记为 H^s，用 H_0^s 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 H^s 上的完备化，且当 $s = 1$ 时，记 $V_1 = H_0^1$。我们首先给出问题(1.1)弱解的定义。

定义 2.1. *称 u 是问题(1.1)的弱解，若对任意 $T > 0$ 有*

$$u \in L^\infty([0,T), H_0^2(\Omega))\ ,\ u_t \in C([0,T), L^2(\Omega)) \cap L^{m+1}([0,T), L^2(\Omega)),$$

$$u(x,0)=u_0(x)\ ,\ u_t(x,0)=u_1(x),$$

并且对于 $\forall\phi\in H_0^2,\forall t\in[0,T)$，有

$$\begin{aligned}&(u_{tt},\phi)+(u_{xx},\phi_{xx})+(u_x,\phi_x)+(u_{xt},\phi_x)-\int_0^t g(t-s)\left(u_{xx}\left(s\right),\phi_{xx}\right)ds\\&+(u_t,\phi)+(u_{xt},\phi_x)-(u_x\ln|u_x|^k,\phi_x)=0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

在对系统能量及对数源项进行估计时，我们用到以下引理：

引理 2.1. 对数 *Sobolev* 不等式 [16]：假设 $u\in L^\infty(0,T,V_1)$, 则对任意实数 $a>0$，有

$$2\int_\Omega |u|^2\log|u|\,dx\le\frac{a^2}{\pi}\int_\Omega |u_x|^2dx+\left[\log\|u\|^2-(1+\log a)\right]\|u\|^2.$$

引理 2.2. 对数 *Gronwall* 不等式 [16]：如果 $\phi(0)\ge 0$ 并且 $\phi(t)$ 是一个非负的函数，满足

$$\phi(t)\le\phi(0)+b\int_0^t\left(a+\phi(s)\right)\log\left[a+\phi(s)\right]ds\ ,\ t\in[0,T]\,.$$

其中 $a\ge 1,b>0$ 都为正常数，则

$$\phi(t)\le\left(a+\phi(0)\right)e^{bt},t\in[0,T]\,.$$

上述两个引理的具体证明参考文献 [16]，由于篇幅原因故在这不再展开叙述。

3. 弱解的全局存在性

在这一节，我们给出问题(1.1)弱解的存在性定理，并且利用 Galerkin 方法进行证明。首先，我们对黏弹性核 g 以及对数源项系数 k 进行如下假设：

条件 3.1. g 是一阶连续可微函数，使得

$$g(0)>0,\int_0^{+\infty}g(s)\,ds<+\infty\ ,\ 1-\int_0^{+\infty}g(s)\,ds=l_0>0.$$

条件 3.2. 存在一个非增可微函数 $\zeta:R^+\to R^+$ 使得

$$g'(t)\le-\zeta(t)\,g(t)\ \ ,\ \int_0^{+\infty}\zeta(s)\,ds=+\infty.$$

条件 3.3. 在对数源项中 $k\ge 1$ 且满足 $e^{-(1+\frac{1}{k})}<\sqrt{\frac{\pi l_0}{k}}$.

需要说明的是满足如上条件的 $g(t)$ 和 k 是存在的，例如当 $\zeta(t)=2$ 时，由条件3.2知 $g(t)$ 可以取 e^{-2t}，此时的 $g(t)$ 是一阶连续可微函数，并且 $l_0=\frac{1}{2}>0$ 满足条件3.1，为保证解的全局存在性，条件3.3是必要的，这时通过简单计算可得，k 可以取 $\sqrt{\pi l_0}$, $l_0>\frac{1}{\pi}$。

为叙述方便，设

$$(g\circ v)(t)=\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |v(t,x)-v(s,x)|^2dxds. \tag{3.1}$$

我们有如下引理

引理 3.1. 假设 $g=g(t), v=v(.,t)$ 可微，则

$$\begin{aligned}\int_\Omega v_t(g*v)(t)\,dx=&-\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |v(x,t)|^2dx+(g'\circ v)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ v)(t)\\&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)\,ds\int_\Omega |v(x,t)|^2dx\right).\end{aligned} \tag{3.2}$$

证明. 对等式(3.1)两端同时求导可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ v)(t)=&\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{dt}g(t-s)\int_\Omega |v(t,x)-v(s,x)|^2\\&+\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |v(t,x)-v(s,x)|\frac{d}{dt}v(t,x)dxds.\end{aligned} \tag{3.3}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |v(t,x)-v(s,x)|\frac{d}{dt}v(t,x)dxds\\=&\int_0^t g(t-s)\int_\Omega v(t,x)\frac{d}{dt}v(t,x)dxds-\int_0^t g(t-s)\int_\Omega v(s,x)\frac{d}{dt}v(t-x)dxds.\end{aligned}$$

将上式代入等式(3.3)得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ v)(t)=&\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{dt}g(t-s)\int_\Omega |v(t,x)-v(s,x)|^2dxds\\&+\int_0^t g(t-s)\int_\Omega v(t,x)\frac{d}{dt}v(t,x)dxds-\int_0^t g(t-s)\int_\Omega v(s,x)\frac{d}{dt}v(t-x)dxds,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\int_0^t g(t-s)\int_\Omega v(s,x)\frac{d}{dt}v(t-x)dxds=&\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{dt}g(t-s)\int_\Omega |v(t,x)-v(s,x)|^2dxds-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ v)(t)\\&+\int_0^t g(t-s)\int_\Omega v(t,x)\frac{d}{dt}v(t,x)dxds,\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中

$$\int_\Omega v_t(t)(g*v)(t)dx=\int_0^t g(t-s)\int_\Omega v(s,x)\frac{d}{dt}v(t-x)dxds,$$

$$(g'\circ v)(t)=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{dt}g(t-s)\int_\Omega |v(t,x)-v(s,x)|^2dxds.$$

于是有

$$\int_{\Omega} v_t\,(t)(g*v)(t)dx=\frac{1}{2}\left(g'\circ v\right)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ v)(t)+\int_0^t g(t-s)\int_{\Omega} v(t,x)\frac{d}{dt}v(t,x)dxds.$$

由于

$$\int_0^t g\,(t-s)\,ds=\int_0^t g\,(s)ds.$$

故

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} v_t\,(t)(g*v)(t)dx&=\frac{1}{2}\left(g'\circ v\right)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ v)(t)+\int_0^t g(s)ds\int_{\Omega}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v(t,x)|^2dx\\&=\frac{1}{2}\left(g'\circ v\right)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ v)(t)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)\int_{\Omega}|v(t,x)|^2dxds\\&-\frac{1}{2}g(t)\int_{\Omega}|v(t,x)|^2dxds.\end{aligned}\tag{3.5}$$

令等式(3.2)中 $v=u_{xx}$，形式上我们有

$$\begin{aligned}\int_0^t g(t-s)\left(u_{xx}(s),u_{xxt}\right)dsdx=&-\frac{1}{2}g(t)\int_{\Omega}\left(u_{xx}\right)^2dx+\frac{1}{2}(g'\circ u_{xx})(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ u_{xx})\\&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_0^t g(s)ds\int_{\Omega}|u_{xx}|^2dx).\end{aligned}\tag{3.6}$$

在给出存在性定理之前，我们定义如下泛函

$$I\,(u)=I\,(u\,(t))=I\,(t)=\|u_x\|^2+\left(1-\int_0^t g\,(s)ds\right)\|u_{xx}\|^2+g\circ u_{xx}(t)-\int_0^l {u_x}^2\log|u_x|^k dx,$$

$$J\,(u)=\frac{1}{2}I\,(u)+\frac{k}{4}\|u_x\|^2,$$

$$E\,(u)=E\,(u\,(t))=E\,(t)=\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2+\|u_{xt}\|^2\right)+J\,(u)\,.$$

定理 3.1. 如果初值满足 $u_0\in H_0^2, u_1\in H^1$ 那么则对任意的 $T>0$，问题(1.1)存在一个满足定义*2.1*的弱解，使得

$$u\in L^{\infty}\left(0,+\infty;H_0^2(\Omega)\right),u_t\in L^{\infty}\left(0,+\infty;L^2(\Omega)\right),u_{tt}\in L^{\infty}\left(0,+\infty;H^{-1}(\Omega)\right).$$

Proof. 我们运用 Galerkin 方法，设 $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ 为 H 中的标准正交基，则 $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ 也是 H_0^2 中的标准正交基，设 H_m 是由前 m 个基底构成的 H_0^2 的有限维子空间，即

$$H_m=Span\,\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}\,.$$

我们定义投影映射 $P_m:H_0^2\to H_m$，对于初值 $u_0\,(x)$, $u_1\,(x)$ 令

$$u_{0m}(x) = P_m u_0 \ , \ u_{1m}(x) = P_m u_1,$$

则

$$u_{0m} \to u_0 \text{ 在 } H_0^2 \text{ 中},$$

$$u_{1m} \to u_1 \text{ 在 } L^2 \text{ 中}.$$

在 H_0^2 中考虑如下初值问题

$$\begin{cases} (u_{mtt}, \phi) + (u_{mxx}, \phi_{xx}) + (u_{mx}, \phi_x) + (u_{mxt}, \phi_x) + (u_{mt}, \phi) + (u_{mxt}, \phi_x) \\ -\displaystyle\int_\Omega g(t-s)\left(u_{mxx}(s), \phi_{xx}\right) ds - (u_x \ln |u_{mx}|^k, \phi_x) = 0, \qquad \forall \phi \in H_0^2. \\ u_m(x,0) = u_{0m}(x) \ , \ u_{mt}(x,0) = u_{1m}(x). \end{cases}$$

对任意固定的 m, 令 $\phi = \omega_j, j = 1, ..., m$, 上述问题可化为由 m 个方程构成的常微分方程组的初值问题。基于常微分方程的知识，存在 T_m 使得上述方程在 $(0, T_m)$ 内有如下形式的解：

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} g_{km}(t) w_k(x), m = 1, 2, ...$$

下面证明 T_m 可以延拓为任意的 $T > 0$，为此我们需要进行一系列的先验估计。令(2.1)中 $\phi = u_{mt}$，则

$$\begin{aligned} &(u_{mtt}, u_{mt}) + (u_{mxx}, u_{mxxt}) + (u_{mx}, u_{mxt}) + (u_{mxtt}, u_{mxt}) - \int_0^t g(t-s)(u_{mxx}, u_{mxxt}) ds \\ &+ (u_{mt}, u_{mt}) - (u_{mx} \ln |u_{mx}|^k, u_{mxt}) = 0 \ , \qquad s = 1, 2, ..., m. \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中

$$\begin{aligned} (u_{mx} \ln \|u_{mx}\|^k, u_{mxt}) &= \frac{k}{2} \int_\Omega \left(\frac{d}{dt} \|u_{mx}\|^2 \right) \ln \|u_{mx}\| dx, \\ &= \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u_{mx}|^2 \ln |u_{mx}| \, dx - \frac{k}{2} \int_\Omega |u_{mx}|^2 \frac{d}{dt} \ln |u_{mx}| \, dx, \\ &= \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u_{mx}|^2 \ln |u_{mx}| \, dx - \frac{k}{4} \frac{d}{dt} \|u_{mx}\|^2. \end{aligned}$$

于是(3.7)可化为

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_{mt}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{mxx}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{mx}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{mxt}\|^2 + \int_0^t g(t-s)(u_{mxx}, u_{mxxt}) ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t g(s) ds \|u_{mxx}(t)\|^2 - \frac{1}{2} \left[k \cdot \int_0^l |u_{mx}|^2 \ln |u_{mx}| dx - \frac{k}{2} \|u_{mx}\|^2 \right] \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \|u_{mxt}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{mt}\|^2 = 0. \end{aligned}$$

利用由引理3.1可得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2+\frac{1}{2}\|u_{mxx}\|^2+\frac{1}{2}\|u_{mx}\|^2+\frac{1}{2}\|u_{mxt}\|^2+\frac{1}{2}g\circ u_{mxx}(t)-\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|u_{mxx}(t)\|^2\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left[k\cdot\int_0^l |u_{mx}|^2\ln|u_{mx}|dx-\frac{k}{2}\|u_{mx}\|^2\right]\right) \tag{3.8}$$
$$-\frac{1}{2}(g'\circ u_{mxx}(t))+\frac{1}{2}g(t)\|u_{mxx}(t)\|^2+\frac{1}{2}\|u_{mxt}\|^2+\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2=0.$$

令 $E_m(t)=E(u_m(t))$，则

$$\frac{d}{dt}E_m(t)=\frac{1}{2}(g'\circ u_{mxx}(t))-\frac{1}{2}g(t)\|u_{mxx}(t)\|^2-\frac{1}{2}\|u_{mxt}\|^2-\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2\leq 0. \tag{3.9}$$

即 $E_m(t)$ 是一个非增的函数。

因为 $u_m(0)\in H_0^2$，由基本不等式 $|t^2\ln t|\leq c(1+t^3)$，$t>0$ 和 Sobolev 嵌入定理，我们有

$$\int_0^l \|u_{0mx}^2\ln u_{0mx}\|^k dx\leq\int_0^l c(1+\|u_{0m}\|^3)dx=C(1+\|u_{0m}\|_{H_0^2}^3). \tag{3.10}$$

由于 $E_m(t)\leq E_m(0)$，于是

$$\|u_{mt}\|^2+\|u_{mxt}\|^2+\|u_{mx}\|^2+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|u_{mxx}\|^2+g\circ u_{mxx}$$
$$-\int_0^l {u_{mx}}^2\log|u_{mx}|^k dx+\frac{k}{4}\|u_{mx}\|^2 \tag{3.11}$$
$$\leq C_0+\int_0^l {u_{0mx}}^2\ln|u_{0mx}|^k dx,$$

其中 $C_0=C(\|u_0\|_{H^1},\|u_1\|)$ 是正常数，进一步我们有

$$\|u_{mt}\|^2+\|u_{mxt}\|^2+\left(1+\frac{k}{4}\right)\|u_{mx}\|^2+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|u_{mxx}\|^2+g\circ u_{mxx}$$
$$<C+2\int_0^l {u_{mx}}^2\log|u_{mx}|^k dx. \tag{3.12}$$

利用引理2.1对等式(3.12)右边最后一项进行估计

$$2\int_0^l {u_{mx}}^2\log|u_{mx}|^k dx=2k\int_0^l {u_{mx}}^2\left(\log\frac{|u_x|}{\|u_{mx}\|}+\log\|u_{mx}\|\right)dx$$
$$\leq k(\frac{a^2}{\pi}\|u_{mxx}\|^2-(1+\log a)\|u_{mx}\|^2+\|u_{mx}\|^2\log\|u_{mx}\|^2)\text{，}k\geq 1. \tag{3.13}$$

将(3.13)代入(3.12)，可得

$$\|u_{mt}\|^2+\|u_{mxt}\|^2+(1+k+k\log a)\|u_{mx}\|^2+g\circ u_{mxx}+\left(1-\int_0^t g(s)ds-\frac{ka^2}{\pi}\right)\|u_{mxx}\|^2$$
$$\le C(1+\|u_{mx}\|^2\log\|u_{mx}\|^2). \tag{3.14}$$

通过假设3.1和3.2，在(3.14)中取合适的 a，使得 $1+k+k\log a>0$，$1-\int_0^t g(s)ds-\frac{ka^2}{\pi}>0$，则有

$$\|u_{mt}\|^2+\|u_{mxt}\|^2+\|u_{mx}\|^2+\|u_{mxx}\|^2+g\circ u_{mxx}\le C(1+\|u_{mx}\|^2\log\|u_{mx}\|^2). \tag{3.15}$$

注意到

$$u_{mx}(t)=u_{mx}(0)+\int_0^t u_{mxt}(s)ds.$$

于是

$$\|u_{mx}\|^2\le 2\|u_{mx}(0)\|^2+2T_m\int_0^t\|u_{mxt}\|^2(s)ds$$
$$\le 2\|u_{mx}(0)\|^2+\max\{1,2T_m\}\frac{1+C}{C}\int_0^t\|u_{mxt}\|^2(s)ds.$$

再由等式(3.15)可得

$$\|u_{mx}\|^2\le 2\|u_{mx}(0)\|^2+\max\{1,2T_m\}(1+C)T_m+\max\{1,2T_m\}(1+C)\int_0^t\|u_{mx}\|^2\log\|u_{mx}\|^2ds.$$

令 $A=2\|u_{mx}(0)\|^2+\max\{1,2T_m\}(1+C)T_m, B=\max\{1,2T_m\}(1+C)$ 我们有

$$\|u_{mx}\|^2\le A+B\int_0^t\|u_{mx}\|^2\log\|u_{mx}\|^2ds,$$

又因为当 $B\ge 1$ 时，$x\log x\le(x+B)\log(x+B)$，利用对数 Gronwall 不等式，可以得到

$$\|u_{mx}\|^2\le(A+B)e^{Bt}\le C_T, \tag{3.16}$$

于是，从(3.14)和(3.15)式可得

$$\|u_{mt}\|^2+\|u_{mxt}\|^2+\|u_{mx}\|^2+\|u_{mxx}\|^2+g\circ u_{mxx}\le\tilde{C}_T. \tag{3.17}$$

其中 $\tilde{C}_T$ 与 m 无关，于是 $\{u_m\}$ 的存在区间可以由 $(0,T_m)$ 延拓到 $(0,T)$。最后利用经典方法可得 u_{mtt} 在 $L^\infty(0,T;H^{-2})$ 中一致有界，于是存在 $\{u_m\}$ 的子序列，仍记为 $\{u_m\}$，使得

在 $L^\infty(0,T;H_0^2)$ 中 $u_m\to u$ 弱 * 收敛，

在 $L^\infty(0,T;H^1)$ 中 $u_{mt}\to u_t$ 弱 * 收敛，

在 $L^\infty(0,T;H^{-2})$ 中 $u_{mtt} \to u_{tt}$ 弱 * 收敛。

下面只需证明当 $m \to \infty$ 时，

$$(u_{mx} \ln |u_{mx}|^k, \phi_x) \to (u_x \ln |u_x|^k, \phi_x), \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega). \tag{3.18}$$

由 Aubin-Lions 引理知，$|u_{mx}| \to |u_x|$ 是强收敛，所以 $\|u_{mx}\| \to \|u_x\|$ 几乎处处收敛，又因为映射 $x \ln |x|^k$ 是连续的，所以可以得到 $\left|u_{mx} \log |u_{mx}|^k - u_x \log |u_x|^k\right| \to 0$ 即 $u_{mx} \log |u_{mx}|^k \to u_x \log |u_x|^k$ 几乎处处收敛，由类似方程(3.10)方法可以得到 $u_{mx} \log |u_{mx}|^k$ 有界的，进一步由 Lebesgue 控制收敛定理，于是在 $L^\infty(0,T;L^2)$ 中 $u_{mx} \log |u_{mx}|^k \to u_x \log {u_x}^k$ 弱 * 收敛，故(3.18)成立。

于是令(3.7)中 $m \to \infty$ 可得(2.1)成立，即问题(1.1)存在弱解。

□

4. 解在无穷远处的爆破性

这一节中，我们将证明问题(1.1)的解在无穷远处的爆破性。事实上，我们将证明在适当的初始条件下，解的 H_0^1 范数关于时间按指数增长。首先我们给出一些引理。

引理 4.1. 若 $u \in H_0^2 \backslash \{0\}$ 则

(i) $I(\lambda u) = \lambda \frac{d}{d\lambda} J(\lambda u)$ 且 $\lim\limits_{\lambda \to 0} J(\lambda u) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} J(\lambda u) = -\infty$,

(ii) 存在唯一的 $\lambda^* = \lambda^*(u)$ 使得 $\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u)|_{\lambda=\lambda^*} = 0$，且 $J(\lambda u)$ 满足在 $0 < \lambda < \lambda^*$ 单调递增，在 $\lambda^* \le \lambda < \infty$ 单调递减，并在 $\lambda^* = \lambda$ 取最大值，即存在唯一的 $\lambda^* \in (0,+\infty)$ 使得

$$I(\lambda u) = \lambda \frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) > 0, 0 < \lambda < \lambda^*; I(\lambda u) = 0, \lambda = \lambda^*; I(\lambda u) < 0, \lambda > \lambda^*.$$

这里 $\lambda^* = \exp\left(\frac{\left(1+\frac{k}{2}\right)\|u_x\|^2 + l_0\|u_{xx}\|^2 + (g \circ u_{xx}) - \int_0^l u_x^2 \log |u_x|^k dx}{k\|u_x\|^2}\right)$.

证明. 由 $J(u)$ 的定义有

$$\begin{aligned}
J(\lambda u) = &\frac{\lambda^2}{2}\|u_x\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|u_{xx}\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}(g \circ u_{xx}) \\
&- \frac{\lambda^2}{2}\int_0^l u_x^2 \log |\lambda u_x|^k dx + \frac{k\lambda^2}{4}\|u_x\|^2, \\
\le &\frac{\lambda^2}{2}\|u_x\|^2 + \frac{\lambda^2 l_0}{2}\|u_{xx}\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}(g \circ u_{xx}) - \frac{k\lambda^2}{2}\int_0^l u_x^2 \log u_x \| dx \\
&- \frac{k\lambda^2}{2}(\log|\lambda|)\|u_x\|^2 + \frac{k\lambda^2}{4}\|u_x\|^2.
\end{aligned}$$

这里我们应用了等式

$$\frac{\lambda^2}{2}\int_0^l u_x^2 \log |\lambda u_x|^k \mathrm{d}x = \frac{k\lambda^2}{2}\int_0^l u_x^2 \log |u_x| dx + \frac{k\lambda^2}{2}(\log|\lambda|)\|u_x\|^2$$

以及

$$\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u)=\lambda\|u_x\|^2+\lambda l_0\|u_{xx}\|^2+\frac{k\lambda}{2}\|u_x\|^2+\lambda\left(g\circ u_{xx}\right)-\lambda\int_0^l u_x^2\log|u_x|^k dx-\lambda\left(\log|\lambda|^k\right)\|u_x\|^2,$$

$$=\lambda\left[(1+\frac{k}{2})\|u_x\|^2+l_0\|u_{xx}\|^2\right]+\lambda\left(g\circ u_{xx}\right)-\lambda\int_0^l u_x^2\log|\lambda u_x|^k dx.$$

又因为 $\|u_x\|\neq 0$ 于是 $I(\lambda u)=\lambda\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u)$ 有 $\lim\limits_{\lambda\to 0}J(\lambda u)=0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}J(\lambda u)=-\infty$.
此外有

$$I(\lambda u)=\lambda\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u)>0,0<\lambda<\lambda^*;I(\lambda u)=0,\lambda=\lambda^*;I(\lambda u)<0,\lambda>\lambda^*,$$

这里 $\lambda^*=\exp\left(\frac{\left(1+\frac{k}{2}\right)\|u_x\|^2+l_0\|u_{xx}\|^2+(g\circ u_{xx})-\int_0^l u_x^2\log|u_x|^k dx}{k\|u_x\|^2}\right)$。$J(\lambda u)$ 在 $0<\lambda\leq\lambda^*$ 单调递增，在 $\lambda^*\leq\lambda<\infty$ 单调递减，并在 $\lambda^*=\lambda$ 时取得最大值。

下面我们定义 Nehari 流形及位势井深度

$$N=\left\{u|u\in H_0^2\backslash\{0\},I(u)=0\right\},$$

$$d=\inf\left\{\sup_{\lambda\geq 1}J(\lambda u)\,|u\in H_0^2\backslash\{0\}\right\}.$$

由引理4.1可以知道 $0<d=\inf\limits_{u\in N}J(u)$。我们给出如下形式的问题(1.1)稳定集 W 与不稳定集 V 的定义

$$W=\left\{u\in H_0^2|J(u)<d,I(u)>0\right\}\cup\{0\},$$

$$V=\left\{u\in H_0^2|J(u)<d,I(u)<0\right\}.$$

引理 4.2. 令 $u\in H_0^2, r=(\frac{2\pi l_0}{k})^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{2}}$,
(i) 若 $0<\|u_x\|<r$ 则 $I(u)>0$; (ii) 若 $I(u)<0$ 则 $\|u_x\|>r$; (iii) 若 $I(u)=0$ 且 $\|u_x\|\neq 0$，即 $v\in N$，则 $\|u_x\|>r$.

证明. 由对数 *Sobolve* 不等式，$\forall a>0$ 有

$$\begin{aligned}I(u)&=\|u_x\|^2+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|u_{xx}\|^2+(g\circ u_{xx})-k\int_0^l u_x^2\left(\log\frac{|u_x|}{\|u_x\|}+\log\|u_x\|\right)dx\\&\geq\left(1-\frac{ka^2}{2\pi}\right)\|u_x\|^2+\left(l_0-\frac{ka^2}{2\pi}\right)\|u_{xx}\|^2+\frac{k(1+\log a)}{2}\|u_x\|^2-k\|u_x\|^2\log\|u_x\|.\end{aligned}\tag{4.1}$$

在(3.9)式中取合适的 a，满足 $1-\frac{ka^2}{2\pi}>0$，$l_0-\frac{ka^2}{2\pi}>0$，可得

$$I(u)\geq k\left(\frac{2+\log a^2}{4}-\log\|u_x\|\right)\|u_x\|^2.\tag{4.2}$$

若 $0<\|u_x\|<r$ 则由(4.2)得 $I(u)>0$，若 $I(u)<0$ 利用(4.2)知

$$\frac{2+\log a^2}{4}-\log\|u_x\|<0.$$

表明 $\|u_x\|=(a^2)^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{2}}=r$，若 $I(u)=0$ 且 $\|u_x\|\neq 0$ 利用(4.2)得

$$\log\|u_x\|\geq\frac{2+\log a^2}{4}.$$

即 $\|u_x\|>r.$

关于位势井深度及深度及相关能量泛函，我们由如下估计。

引理 4.3. (i)$d\geq\frac{k}{4}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{2}}e=\frac{k}{4}r^2$. (ii) 若 $u\in H_0^2$ 且 $I(u)<0$, 则 $I(u)<2\left(J(u)-d\right)$.

证明. (i) 若 $I(u)=0$ 且 $\|u_x\|\neq 0$，由引理*4.2*可得 $\|u_x\|\geq r=(a^2)^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{2}}$，再结合 $J(u)$ 的定义有 $J(u)=\frac{1}{2}I(u)+\frac{k}{4}\|u_x\|^2\geq\frac{k}{4}(a^2)^{\frac{1}{2}}e$ ，则有 $d\geq\frac{k}{4}(a^2)^{\frac{1}{2}}e$。

(ii) 若 $u\in H_0^2$ 且 $I(u)<0$，利用引理*4.1*，存在 λ^* 使得 $0<\lambda^*<1$ 且 $I(\lambda^*u)=0$，由 d 的定义可知

$$d\leq J(\lambda^*u)=\frac{1}{2}I(\lambda^*u)+\frac{k}{4}\|\lambda^*u_x\|^2=\frac{k}{4}\|\lambda^*u_x\|^2<\frac{k}{4}\|u_x\|^2.$$

由 $I(u),J(u)$ 的定义得

$$d<\frac{k}{4}\|u_x\|^2=J(u)-\frac{1}{2}I(u),$$

即 $I(u)<2\left(J(u)-d\right)$。

引理 4.4. 假设 $u_0\in H_0^2$, $u_1\in H^1$ 且 $0<E(0)<d$, u 是问题(1.1)的弱解，那么

(i) 若 $I(u_0)>0$，则 $u\in W$.

(ii) 若 $I(u_0)<0$，则 $u\in V$.

证明. 由弱解的定义和等式(3.8)以及 $E(t)<E(0)$，有

$$\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2+\|u_{xt}\|^2\right)+J(u)\leq\frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2+\|u_{1x}\|^2\right)+J(u_0)<d,\quad\forall t\in[0,T).\tag{4.3}$$

(i) 我们断言 $u(t)\in W$ 对所有的 $t\in[0,T)$ 成立。否则，必存在 $t_0\in(0,T)$，使得 $u(t_0)\in\partial W$，于是

(a) $I(u(t_0))>0$ 且 $\|u_x(t_0)\|\neq 0$ 或 (b) $J(u(t_0))=d$ 成立。

由方程(4.3)知，(b) 是不可能的，于是 $I(u(t_0))>0$ 且 $\|u_x(t_0)\|\neq 0$，然而由 d 的定义可知 $J(u(t_0))\geq d$，这与 (b) 矛盾，从而 $\forall t\in(0,T)$ 有 $u\in W$。

(ii) 若存在 $t_0\in(0,T)$，使得对任意的 $0\leq t<t_0$，有 $u(x,t)\in V$ 而 $u(x,t_0)\in\partial V$，则

(c) $I(u(t_0))=0$ 或 (d) $J(u(t_0))=d$ 成立。

由(4.3)式知，(d) 不成立, 若 $I(u(t_0))=0$ 且对 $0<t<t_0$ 有 $I(u(t))<0$，则由*4.2*（*ii*)，对 $0<t<t_0$，有 $\|u_x\|>r$ 成立，于是由 d 的定义得 $J(u(t_0))\geq d$，但是与(4.3)矛盾. 因此表明对 $\forall t\in[0,T)$，有 $u(t)\in V$ 成立。

上述引理给出了函数位于稳定流形及不稳定流形中的充分条件，下面我们给出本节的主要定理。

定理 4.1. 假设 $u_0\in H_0^2$, $u_1\in H^1$，若 $u_0\in V$, $0<E(0)<d$, $(u_0,u_1)+(u_{0x},u_{1x})>0$，则问题(1.1)的解将会在 $t\to+\infty$ 时爆破。

证明. 设 $u(x,t)$ 是问题(1.1)的弱解，并且 $J(u_0) < E(0) < d$，$I(u_0) < 0$，那么考虑函数 $\vartheta(t) : [0+\infty) \to R^+$，定义如下

$$\vartheta(t) = \|u_x\|^2 + \|u\|^2. \tag{4.4}$$

直接计算可以得到

$$\vartheta'(t) = 2(u_x, u_{xt}) + 2(u, u_t). \tag{4.5}$$

因此，根据问题(1.1)和 $I(u)$ 的定义，可以得到如下结果

$$\begin{aligned}\vartheta''(t) =& 2\|u_{xt}\|^2 + 2\|u_t\|^2 + 2(u, u_{tt}) + 2(u, u_{xxtt})\\ =& 2\|u_{xt}\|^2 + 2\|u_t\|^2\\ &- 2\left(\left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|u_{xx}\|^2 + \|u_x\|^2 - g\circ u_{xx}(t) - \int_0^l u_x^2 \log|u_x|^k dx\right)\\ =& 2\|u_{xt}\|^2 + 2\|u_t\|^2 - 2I(u).\end{aligned} \tag{4.6}$$

通过 *Cauchy-Schwarz* 不等式，(4.5)可化为

$$|\vartheta'(t)|^2 \le 4\vartheta(t)(\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2),$$

那么通过 $E(t)$ 的定义并注意到 $E(t) \le E(0)$，对于 $t \in [0,\infty)$ 我们有

$$\begin{aligned}\vartheta''(t)\vartheta(t) - [\vartheta'(t)]^2 &\ge 2\vartheta(t)\left[\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 - I(u(t))\right] - 4\vartheta(t)\left[\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2\right]\\ &= -2\vartheta(t)\left[\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + I(u(t))\right]\\ &\ge -2\vartheta(t)\left[E(0) - J(u(t)) + I(u(t))\right].\end{aligned}$$

因为 $u_0 \in V$，$E(0) < d$，所以通过引理*4.4*可得 $I(u(t)) < 0$。再利用引理*4.3(ii)*，我们得到

$$E(0) - J(u(t)) + I(u(t)) < d - J(u(t)) + 2(J(u(t)) - d) = J(u(t)) - d < 0.$$

$$\vartheta''(t)\vartheta(t) - [\vartheta'(t)]^2 > 0.$$

另一方面，通过直接计算，可以得到

$$(\log|\vartheta(t)|)' = \frac{\vartheta'(t)}{\vartheta(t)}. \tag{4.7}$$

$$(\log|\vartheta(t)|)'' = \left(\frac{\vartheta'(t)}{\vartheta(t)'}\right)' = \frac{\vartheta''(t)\vartheta(t) - [\vartheta'(t)]^2}{\vartheta^2(t)} > 0.$$

再结合(4.6)可以得到 $(\log|\vartheta(t)|)' = \frac{\vartheta'(t)}{\vartheta(t)}$ 关于 t 非增，于是将(4.7)从 t_0 到 t 积分可得

$$\log|\vartheta(t)|-\log|\vartheta(t_0)|=\int_{t_0}^{t}\log|\vartheta(\eta)|'d\eta=\int_{t_0}^{t}\frac{\vartheta'(\eta)}{\vartheta(\eta)}d\eta\geq\frac{\vartheta'(t_0)}{\vartheta(t_0)}(t-t_0)\,,\tag{4.8}$$

其中 $0\leq t_0<t$，则

$$\vartheta(t)\geq\vartheta(t_0)\exp(\frac{\vartheta'(t_0)}{\vartheta(t_0)}(t-t_0)).\tag{4.9}$$

若存在 t_0 足够的小使得 $\vartheta'(t_0)>0$，$\vartheta(t_0)>0$，则通过(4.9)可以得到 $\lim\limits_{t\to\infty}\vartheta(t)=+\infty$ 得证问题(1.1)的解将 $t\to+\infty$ 在时爆破。事实上，因为 $\vartheta(0)=\|u_0\|^2+\|u_{0x}\|^2>0$，$\vartheta'(0)=2(u_0,u_1)+2(u_{0x},u_{1x})$，则这样的 t_0 是存在的。

5. 能量的指数衰减性

在这一节中，我们考虑问题(1.1)的能量衰减估计。为叙述简介，我们定义如下常数

$$0<a<\sqrt{\frac{l_0\pi}{k}},\quad C_0=1+k\,(1+\log a)\,,\quad r^*=e^{\frac{C_0-k}{2k}},\quad E_1=\frac{k}{2}{r_*}^2.\tag{5.1}$$

引理 5.1. 如果条件*3.2*成立，并且 $u_{x0}(x)\in L^2(\Omega)$，$\|u_{x0}(x)\|<r^*$，$0<E_0<E_1$，那么 $\|u_x(x,t)\|<r^*$，对所有 $t\in[0,T)$ 成立。

证明. 根据 $E(t)$ 和 $J(t)$ 的定义可以得到

$$E(t)\geq J(t)\geq\frac{1}{2}\left[\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|u_{xx}\|^2+\|u_x\|^2-k\int_\Omega {u_x}^2\ln|u_x|\,dx+(g\circ u_{xx})\right],\tag{5.2}$$

通过 *Sobolev* 不等式可知

$$\begin{aligned}E(t)\geq&\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds-\frac{ka^2}{\pi}\right)\|u_{xx}\|^2+\frac{1}{2}(g\circ u_{xx})\\&+\frac{1}{2}\left[1+k\,(1+\log a)-k\log\|u_x\|^2\right]\|u_x\|^2,\end{aligned}\tag{5.3}$$

根据(5.1)可知那么

$$E(t)\geq\frac{C_0}{2}\|u_x\|^2-\frac{k}{2}\left(\ln\|u_x\|^2\right)\|u_x\|^2,\tag{5.4}$$

所以 $E(t)$ 在 $(0,r_*)$ 为增函数，在 $(r_*,+\infty)$ 为减函数，在 r_* 处取得最值

$$\max_{0<t<+\infty}E(t)=\frac{1}{2}C_0{r_*}^2-\frac{k}{2}\left(\ln{r_*}^2\right){r_*}^2=\frac{k}{2}{r_*}^2=E_1,\tag{5.5}$$

根据(5.1)知 r_* 取值。利用反证法，假设 $\|u_x(x,t)\|<r_*$ 在 $t\in[0,T)$ 不成立，那么通过 $u_x(t)$ 的连续性可得，当 $0<t_0<T$ 时，存在 $\|u_x(x,t_0)\|=r_*$，由(3.9)可以看出，$E'(t)\leq 0$ 并且 $0<E(0)<E_1$，与 $E_1<E(r_*)<E(0)<E_1$ 矛盾，假设不成立，所以 $\|u_x(x,t)\|<r_*$。

注 5.1. 通过5.1，$I(t)\ge 0$，$\forall t\ge 0$，利用 $I(t)$ 的定义和对数 *Sobolev* 不等式对 $\forall t\ge 0$ 有

$$\begin{aligned} I(u) &\ge \|u_x\|^2 + l_0\|u_{xx}\|^2 - \int_0^l {u_x}^2 \log|u_x|^k dx, \\ &\ge \|u_x\|^2 + l_0\|u_{xx}\|^2 - 2k\left(\frac{a^2}{\pi}\|u_{xx}\|^2 + \left[\log\|u_x\|^2 - (1+\log a)\right]\|u_x\|^2\right), \\ &\ge \|u_x\|^2 + (l_0 - \frac{2ka^2}{\pi})\|u_{xx}\|^2 + 2k\left(1+\log a - \log\|u_x\|^2\right)\|u_x\|^2 \ge 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

注 5.2. 通过注5.1可以得到如果 $\|u_{x0}\|<r_*$ 和 $E(0)<E_1$，那么 $J(t)\ge 0$，$E(t)\ge 0,\forall t\in[0,T)$，根据(5.8)和 $I(u)$，$J(u)$ 及 $E(u)$ 的定义，对 $t\in[0,T)$ 有如下估计

$$\|u_t\|^2 \le 2E(t) \le 2E(0),$$

$$\|u_{xt}\|^2 \le 2E(t) \le 2E(0),$$

$$\|u_x\|^2 \le \frac{4}{k+2}J(t) \le \frac{4}{k+2}E(t) \le \frac{4}{k+2}E(0),$$

$$\|u_{xx}\|^2 \le \frac{4}{4l_0-ak}I(t) \le \frac{8}{4l_0-ak}E(t) \le \frac{8}{4l_0-ak}E(0),$$

因为 *Poincare* 不等式 $\hat{c}\|u\|\le\|u_x\|$, 所以

$$\|u\| \le \frac{4}{(k+2)\hat{c}}J(t) \le \frac{4}{(k+2)\hat{c}}E(t) \le \frac{4}{(k+2)\hat{c}}E(0),$$

这表明解在一定时间内是有界的。

引理 5.2. $E:R^+\to R^+$ 是非增函数 ψ；$R^+\to R^+$ 是 C^2 上的函数，使得 $\psi(0)=0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\psi(t)=+\infty$，假设存在 $c>0$ 满足

$$\int_t^{+\infty}\psi'(s)E(s)\,ds \le cE(0)\,,\forall t\ge 0,$$

则

$$E(t) \le \lambda E(0)\,\mathrm{e}^{-\omega\psi(t)}.$$

其中 ω,λ 均为正常数。

定理 5.1. 如果 *A1-A3* 都成立，假设初值 u_0 和相关的能量 $E(0)$ 满足 $\|u_0\|<r_*$ 和 $0<E(0)<E_1$，那么存在两个正常数 k，$\hat{k}$，使得

$$E(t) \le kE(0)\exp\left(-\hat{k}\int_0^t\zeta(s)ds\right),\ t>0. \tag{5.7}$$

证明. 方程(1.1)两边同时乘以 $\zeta(t)\,u$ 并且在 $[t_1\,,\ t_2]\times\Omega, 0\le t_1<t_2<+\infty$ 积分得到如下方程

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega u\cdot u_{tt}dxdt-\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega u\cdot u_{xx}dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega u\cdot u_{xxxx}dxdt\\
&-\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega u\cdot u_{xxtt}dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega u\int_0^t g(t-s)u_{xxxx}(s)\,dsdxdt\\
&-\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega u\cdot u_{xxt}dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega u\cdot u_tdxdt\\
&+\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega u\cdot\left(u_x\ln|u_x|^k\right)_x dxdt=0.
\end{aligned}\tag{5.8}$$

通过(5.8)和 $\sigma>0$ 我们可以得到如下方程

$$\begin{aligned}
&\sigma\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)E(t)dt\\
=&-\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega uu_{tt}dxdt+\frac{\sigma}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_t\|^2dt+\left[\frac{\sigma}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)-1\right]\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_x\|^2dt\\
&+(\frac{\sigma}{2}-1)\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|u_{xx}\|^2dt+\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega u\cdot u_{xxtt}dxdt\\
&-\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega u_{xx}\int_0^t g(t-s)\left[u_{xx}(t)-u_{xx}(s)\right]dsdxdt+\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)u\cdot u_{xxt}dxdt\\
&+k\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega u_x^2\log|u_x|dxdt-\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)u\cdot u_tdxdt\\
&+\frac{\sigma}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_{xt}\|^2dt+\frac{\sigma}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\left(g\circ u_{xx}\right)dt.
\end{aligned}\tag{5.9}$$

利用 *Cauchy* 不等式对 $-\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)u\cdot u_tdxdt$ 进行估计可以得到

$$-\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)u\cdot u_tdxdt\le-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u\|^2dt-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_t\|^2dt.\tag{5.10}$$

同理可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)u\cdot u_{xxt}dxdt\le-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_x\|^2dt-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_{xt}\|^2dt.\tag{5.11}$$

接下来估计右边第一项可以得到

$$-\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega uu_{tt}dxdt=-\int_\Omega\zeta(t)uu_tdx\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\zeta'(t)\int_\Omega uu_tdxdt+\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\left\|u_t\right\|^2dt.\tag{5.12}$$

进一步估计得到

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega}\zeta(t)uu_t dx\Big|_{t_1}^{t_2} \leq \sum_{i=1}^{2}\left|\zeta(t)\int_{\Omega}uu_t dx\right|_{t=t_i} &\leq \sum_{i=1}^{2}\zeta(t)\left|\frac{1}{2}\int_{\Omega}u^2(t)dt+\frac{1}{2}\int_{\Omega}u_t^2(t)dt\right|_{t=t_i} \\
&= \sum_{i=1}^{2}\zeta(t)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{(k+2)\hat{c}}E\left(t\right)+\frac{1}{2}\cdot 2E\left(t\right)\right) \\
&\leq \left(\frac{4}{(k+2)\hat{c}}+2\right)\zeta(t_1)E(t_1).
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{t_1}^{t_2}\zeta'(t)\int_{\Omega}uu_t dxdt\right| &\leq -\left(\frac{2}{(k+2)\hat{c}}+1\right)\int_{t_1}^{t_2}\zeta'(t)E(t)dt \\
&= -\left(\frac{2}{(k+2)\hat{c}}+1\right)\left(\zeta(t)E(t)|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)E'(t)dt\right) \\
&\leq \left(\frac{2}{(k+2)\hat{c}}+1\right)\zeta\left(t_1\right)E\left(t_1\right).
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

将(5.13)和(5.14)代入(5.12)可以得到

$$
-\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_{\Omega}uu_{tt}dxdt \leq \left(\frac{6}{(k+2)\hat{c}}+3\right)\zeta\left(t_1\right)E\left(t_1\right)+\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\left\|u_t\right\|^2 dt \tag{5.15}
$$

对 $\int_{t_1}^{t_2}\zeta\left(t\right)\int_{\Omega}u\cdot u_{xxtt}dxdt$ 进行估计可以得到

$$
\int_{t_1}^{t_2}\zeta\left(t\right)\int_{\Omega}u\cdot u_{xxtt}dxdt \leq -\int_{\Omega}\zeta(t)u_x u_{xt}dx\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\zeta'(t)\int_{\Omega}u_x u_{xt}dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_{xt}\|^2 dt. \tag{5.16}
$$

按照(5.13)，(5.14)和(5.15)同样的方法(5.16)可以整理成如下方程

$$
\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_{\Omega}u_{u_{xxtt}}dxdt \leq \left(\frac{6}{(k+2)\hat{c}}+3\right)\zeta\left(t_1\right)E\left(t_1\right)+\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_{xt}\|^2 dt. \tag{5.17}
$$

利用 *Young* 不等式对记忆项进行估计，得到如下方程

$$
\begin{aligned}
&\left|-\int_{\Omega}u_{xx}\cdot\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))dsdx\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}u_{xx}(t)^2+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\Omega}\left|\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))ds\right|^2 dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}u_{xx}(t)^2+\frac{1}{2\varepsilon}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\int_{\Omega}\int_0^t g(t-s)|u_{xx}(t)-u_{xx}(s)|^2 dsdx \\
&\leq \frac{4\varepsilon}{4l_0-ak}E(t)+\frac{1-l_0}{2\varepsilon}(g\circ u_{xx})(t).
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

利用对数 $Sobolev$ 不等式对右边对数项进行估计得到

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\int_\Omega u_x^2\log|u_x|dxdt &\le \int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\left[\frac{a^2}{2\pi}\|u_{xx}\|^2+\frac{1}{2}\|u_x\|^2\log\|u_x\|^2-\frac{1}{2}\left(1+\log a\right)\|u_x\|^2\right]dt\\ &=\frac{a^2}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_{xx}\|^2dt+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\left(2\log\|u_x\|-(1+\log a)\right)\|u_x\|^2dt.\end{aligned}\tag{5.19}$$

将(5.16)，(5.10)，(5.15)，(5.17)，(5.18)和(5.19)不等式代入(5.9)得到

$$\begin{aligned}\sigma\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)E(t)dt\le&\left(\frac{12}{(k+2)\hat{c}}+3+3\right)\zeta\left(t_1\right)E\left(t_1\right)+\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_t\|^2dt+\frac{\sigma}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_t\|^2dt\\ &+\left[\frac{\sigma}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)-1\right]\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_x\|^2dt+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_{xt}\|^2dt\\ &+l_0\left(\frac{\sigma}{2}-1\right)\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_{xx}\|^2dt+k\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)\frac{a^2}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_{xx}\|^2dt\\ &+\left(\frac{\sigma}{2}+\frac{1-l_0}{2\varepsilon}\right)\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)(g\circ u_x)(t)dt+\left(\frac{4\varepsilon}{4l_0-ak}\right)\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)E(t)dt\\ &-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_t\|^2dt-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u\|^2dt+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_{xt}\|^2dt+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_x\|^2dt\\ &+\frac{k}{2}\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)(\log\|u_x\|^2-(1+\log a))\|u_x\|^2dt.\end{aligned}\tag{5.20}$$

通过 $E(t)$ 定义可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\left\|u_t\right\|^2dt\le 2\zeta\left(t_1\right)E\left(t_1\right),\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\left\|u_{xt}\right\|^2dt\le 2\zeta\left(t_1\right)E\left(t_1\right),$$
$$\zeta(t)(g\circ u_x)(t)\le-\left(g'\circ u_x\right)(t).$$

对(5.20)进一步整理可以得到

$$\begin{aligned}&\left[\sigma-\frac{4}{4l_0-ak}\varepsilon\right]\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)E(t)dt\\ \le&\left[\left(\frac{12}{(k+2)\hat{c}}+3+3+\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}+2\right)\zeta(0)+\sigma+\frac{1-l_0}{\varepsilon}\right]E\left(t_1\right)\\ &+\left(l_0-\frac{ka^2}{2\pi}\right)\left(\frac{\sigma}{2}-1\right)\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u_{xx}\|^2dt\\ &+\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\left[\frac{k}{2}(1-\frac{\sigma}{2})(\log\|u_x\|^2-(1+\log a))-\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{2}(1+\frac{k}{2})\right]\|u_x\|^2dt\\ &-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\zeta(t)\|u\|^2dt.\end{aligned}\tag{5.21}$$

其中 $k\geq 1$ 并且选择的 σ 足够小，可以得到 $0<\sigma<\sqrt[3]{\frac{1}{2+2k}}$，则 $\frac{\sigma}{2}-1<0$，$\left(l_0-\frac{ka^2}{2\pi}\right)\left(\frac{\sigma}{2}-1\right)<0$，选择 ε 足够小，使得

$$\sigma-\frac{4}{4l_0-ak}\varepsilon>0,-\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{2}(1+\frac{k}{2})<0.$$

由引理5.1得

$$k(1-\frac{\sigma}{2})(\log\|u_x\|^2-(1+\log a))<(1-\frac{\sigma}{2})(1-k)<0,\forall t\geq 0.$$

选择适当的 σ，ε 使得 $\sigma-\frac{4}{4l_0-ak}\varepsilon>0$

从而得证

$$\int_{t_1}^{t_2}\zeta\left(t\right)E\left(t\right)dt\leq cE\left(t_1\right),\forall t\geq 0,$$

其中 $\psi\left(t\right)=\int_0^t\zeta\left(s\right)ds$，让 $t_2\to+\infty$ 通过引理5.2可以证明定理5.1成立。

$$E\left(t\right)\leq\lambda E\left(0\right)\mathrm{e}^{-\omega\psi(t)}.$$

$$E\left(t\right)\leq kE\left(0\right)\exp\left(-\hat{k}\int_0^t\zeta\left(s\right)ds\right).\tag{5.22}$$

注 5.3. 从我们的证明方法中可以看出，在证明能量衰减性时，证明思想沿用了位势井理论的思想，但是在我们证明当中，无需构造另外 *Lyapunov* 泛函而是直接对能量泛函 E 进行处理即可。

参考文献

[1] Boussinesq, J. (1872) Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal-rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitessessen-siblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **17**, 55-108.

[2] Zakharov, V. (1973) On Stochastization of One-Dimensional Chains of Nonlinear Oscillators. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, **65**, 219-225.

[3] Liu, Y. (1995) Instability and Blow-Up of Solutions to a Generalized Boussinesq Equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **26**, 1527-1546. https://doi.org/10.1137/S0036141093258094

[4] Wang, Y. and Mu, C. (2007) Global Existence and Blow-Up of the Solutions for the Multidimensional Generalized Boussinesq Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **30**, 1403-1417. https://doi.org/10.1002/mma.846

[5] Górka, P. (2009) Logarithmic Klein-Gordon Equation. *Acta Physica Polonica B*, **40**, 59-66.

[6] Wazwaz, A. (2015) Gaussian Solitary Waves for the Logarithmic Boussinesq Equation and the

Logarithmic Regularized Boussinesq Equation. *Ocean Engineering*, **94**, 111-115. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2014.11.024

[7] Hu, Q., Zhang, H. and Liu, G. (2016) Global Existence and Exponential Growth of Solution for the Logarithmic Boussinesq-Type Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **436**, 990-1001. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.11.082

[8] Hu, Q. and Zhang, H. (2017) Initial Boundary Value Problem for Generalized Logarithmic Improved Boussinesq Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40**, 3687-3697. https://doi.org/10.1002/mma.4255

[9] Renardy, M., Hrusa, W.J. and Nohel, J.A. (1987) Mathematical Problems in Viscoelasticity. American Mathematical Society, New York.

[10] Cavalcanti, M.M., *et al.* (2017) Exponential Stability for the Wave Equation with Degenerate Nonlocal Weak Damping. *Israel Journal of Mathematics*, **219**, 189-213. https://doi.org/10.1007/s11856-017-1478-y

[11] Park, J. and Kim, J. (2004) Existence and Uniform Decay for Euler-Bernoulli Beam Equation with Memory Term. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **27**, 1629-1640. https://doi.org/10.1002/mma.512

[12] Narciso, V. (2015) Long-Time Behavior of a Nonlinear Viscoelastic Beam Equation with Past History. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **38**, 775-784. https://doi.org/10.1002/mma.3109

[13] Peyravi, A. (2020) General Stability and Exponential Growth for a Class of Semi-Linear Wave Equations with Logarithmic Source and Memory Terms. *Applied Mathematics Optimization*, **81**, 545-561. https://doi.org/10.1007/s00245-018-9508-7

[14] 吴晓霞, 马巧珍. 带有线性记忆的波方程在 R^n 上的时间依赖吸引子 [J]. 应用数学, 2021, 34(1): 73-85.

[15] 代辉亚, 张宏伟. 一类具记忆项的非线性强阻尼双曲方程解的爆破性 [J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(18): 266-270.

[16] Evans, L. (2003) Entropy and Partial Differential Equations. Library of Congress Cataloging-in-Publication.