Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3336-3341
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311346

Hans汉斯

一道高等代数竞赛考研题的一题多解研究

陈国华，廖小莲

湖南人文科技学院数学与金融学院，湖南 娄底

收稿日期：2023年10月21日；录用日期：2023年11月22日；发布日期：2023年11月29日

摘 要

矩阵理论是高等代数课程教学中重要的基础内容，而矩阵秩相关问题更是高等代数竞赛考研中一类常见问题。针对一道竞赛考研试题，我们给出了6种求解方法：利用矩阵的分块初等变换、利用多项式互素与矩阵的分块初等变换、利用矩阵秩的不等式、利用矩阵的特征值与特征向量、利用线性变换的值域和利用线性变换的核，这些方法对于理解高等代数矩阵问题的代数证法与几何证法，提高逻辑思维能力大有裨益。

关键词

矩阵，秩，分块初等变换，特征值与特征向量，线性变换的值域与核

A Study on Multiple Solutions to a Competition and Postgraduate Entrance Examination Question from Higher Algebra

Guohua Chen, Xiaolian Liao

School of Mathematics and Finance, Hunan University of Humanities, Science and Technology, Loudi Hunan

Received: Oct. 21st, 2023; accepted: Nov. 22nd, 2023; published: Nov. 29th, 2023

Abstract

The matrix theory is an important basic content in the teaching of advanced algebra courses, and the issue of matrix rank is a common problem in the competition and the postgraduate entrance examination. Six methods for solving a competition question or a postgraduate entrance exam

文章引用: 陈国华, 廖小莲. 一道高等代数竞赛考研题的一题多解研究[J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3336-3341.
DOI: 10.12677/pm.2023.1311346

question were provided, including using block elementary transformation of matrices, polynomial coprime and block elementary transformation of matrices, inequality of matrix rank, eigenvalues and eigenvectors of matrices, range of linear transformations, and kernel of linear transformations. All the methods are of great benefit for understanding the algebraic and geometric proofs of advanced algebraic matrix problems, and improving logical thinking abilities.

Keywords

Matrix, Rank, Block Elementary Transformation, Eigenvalues and Eigenvectors, Range and Kernel of Linear Transformations

1. 引言

《高等代数》是大学数学类专业的主要基础课之一，也是数学类专业研究生入学考试的必考科目。矩阵理论是高等代数课程教学中重要的内容，而矩阵秩相关的问题更是高等代数竞赛考研中一类常见问题。许多学者对矩阵秩相关问题做了研究。文献[1]中，任芳过等简化并深化了矩阵的普通加法与乘法对矩阵秩影响的重要结果，并通过例子帮助学生加深对矩阵秩的理解与应用，提高学生学习高等代数的能力；文献[2]中，王守峰等以矩阵的 Frobenius 不等式为出发点，给出了关于矩阵秩的习题课的教学设计，将矩阵秩的相关习题串联起来，有利于提高学生解决矩阵秩方面的习题的解题技巧；文献[3]中，安玉莲等从线性映射的视角考察了高等代数知识，重点利用线性映射对矩阵秩的几个重要命题给出了比较简洁的证明；文献[4]中，薛丽娜结合实例探讨了矩阵秩的几种常用求解方法。文献[5]中，黄述亮对矩阵秩的估计、秩的降阶等不等式进行了研究，并举例说明了不等式在分块矩阵、线性方程组及判断线面位置关系等问题中的应用。本文以一道竞赛题目为例，从不同的观察角度出发，利用高等代数不同部分的知识给出六种解法，希望能给学习高等代数的同学一点启发。

2. 一道高等代数竞赛考研题的一题多解研究

2023 年湖南科技大学数学竞赛试题中有如下试题：

设 $A\in M_n(F)$，已知 $R(E-A)+R(E-A)=n$，这里 E 为 n 阶单位矩阵，证明：$A^2=E$。

本文中，我们将用 $R(A)$ 表示矩阵 A 的秩，$M_{m\times n}(F)$ 表示数域 F 上 m 行 n 列矩阵，$M_n(F)$ 表示数域 F 上 n 阶方阵，E 表示 n 阶单位矩阵；其它未作说明的符号及概念参见文献[6]。

这是一道矩阵秩相关的题目，但由于矩阵秩问题的复杂性，难以入手解决；但如果对分块矩阵的应用有比较深入的了解，则会很容易地看出该题目的本质而得到解决。

证法一、(利用分块初等变换)考察下列的分块矩阵的分块初等变换

$$\begin{pmatrix} E-A & O \\ O & E+A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E-A & E+A \\ O & E+A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2E & E+A \\ E+A & E+A \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} 2E & E+A \\ O & \dfrac{E-A^2}{2} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2E & O \\ O & \dfrac{E-A^2}{2} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E & O \\ O & E-A^2 \end{pmatrix}$$

由分块初等变换不改变矩阵的秩，故

$$R\begin{pmatrix} E-A & O \\ O & E+A \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} E & O \\ O & E-A^2 \end{pmatrix},$$

从而有

$$R(E-A)+R(E+A)=R(E)+R(E-A^2)=n+R(E-A^2)$$

由已知 $R(E-A)+R(E+A)=n$ 可得 $R(E-A^2)=0$，从而有 $E-A^2=O$，即 $A^2=E$。

上面的解法的关键是把构造的分块矩阵化为含有分块 $E-A^2$ 的分块矩阵，这里我们可以利用多项式的互素性质。

证法二、(利用多项式互素分块初等变换)考虑到 $(x-1,x+1)=1$，从而存在多项式 $u(x),v(x)\in F[x]$ 使得

$$u(x)(x-1)+v(x)(x+1)=1,$$

存而有

$$u(A)(A-E)+v(A)(A+E)=E$$

或

$$u(A)(A-E)+(A+E)v(A)=E$$

考察下列的分块矩阵的分块初等变换

$$\begin{pmatrix} E-A & O \\ O & E+A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E-A & O \\ u(A)(E-A) & E+A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E-A & O \\ u(A)(E-A)+(E+A)v(A) & E+A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E-A & O \\ E & E+A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} O & A^2-E \\ E & E+A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} O & A^2-E \\ E & O \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & O \\ O & A^2-E \end{pmatrix}$$

由分块初等变换不改变矩阵的秩，故

$$R\begin{pmatrix} E-A & O \\ O & E+A \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} E & O \\ O & A^2-E \end{pmatrix},$$

从而有

$$R(E-A)+R(E+A)=R(E)+R(A^2-E)=n+R(A^2-E)$$

由已知 $R(E-A)+R(E+A)=n$ 可得 $R(A^2-E)=0$，从而有 $A^2-E=O$，即 $A^2=E$。

关于矩阵秩有很多已知不等式，如果对矩阵秩相关不等式有较深的了解，本题依然能解决；下面我们利用矩阵秩的不等式来证明。我们先给出一个引理。

引理 1 [1]设 $A,B\in M_n(F)$，且 $AB=BA$，则有 $R(A)+R(B)\geq R(A+B)+R(AB)$ (证明见文献[1] p. 101，例 3.6.7)

证法三、(利用矩阵秩不等式)由于

$$(E-A)(E+A)=E-A^2=(E+A)(E-A),$$

利用引理 1，有

$$\begin{aligned} R(E-A)+R(E+A) &\geq R(E-A^2)+R((E+A)+(E-A)) \\ &= R(E-A^2)+R(2E)=R(E-A^2)+n \end{aligned}$$

即 $n \ge R(E-A^2)+n$，则有 $R(E-A^2)\le 0$。显然 $R(E-A^2)\ge 0$，故 $R(E-A^2)=0$，从而有 $A^2-E=O$，即 $A^2=E$。

n 阶矩阵秩的问题联系到矩阵的行列式是否等于零，行列式等于零又能联想到矩阵的特征多项式及特征值问题，如果对矩阵的特征值与特征向量有较深的了解，本题依然能解决。

下面我们利用矩阵的特征值与特征向量来证明。

证法四、(利用矩阵的特征值与特征向量)

1) 当 $R(E-A)=0$ 或 $R(E+A)=n$ 时，有 $E=A$ 或 $E=-A$，都有 $A^2=E$，

2) 当 $0<R(E-A)<n$，$0<R(E+A)<n$ 时，都有 $|E-A|=0$ 与 $|E+A|=0$。此时 -1.1 均为矩阵 A 的特征值，设 $R(E-A)=r,(0<r<n)$，则由已知有 $R(E+A)=n-r$，由线性方程组理论可知：矩阵 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量的个数为 $n-R(E-A)=n-r$，矩阵 A 的属于特征值 -1 的线性无关的特征向量的个数为 $=n-R(E+A)=r$，又不同特征值的特征向量线性无关，则矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量，从而矩阵 A 可对角化，即存在可逆矩阵 P 使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix},$$

则

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1},$$

从而

$$A^2=P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}=E$$

由于线性空间的线性变换在取定基的情况下每个线性变换都对应一个矩阵，并且这种对应关系是 1-1 的，这样导致很多矩阵问题可以利用线性变换来解决，矩阵秩的问题就能与线性变换像空间与核空间的维数联系起来。如果对这一知识点较深的了解，本题依然能解决。

下面我们利用线性变换的值域与核来证明。

证法五、(利用线性变换的值域)设 V 为数域 F 上 n 为线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基，σ 为矩阵 A 确定的线性变换，即

$$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

从而有

$$(e-\sigma)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(E-A)$$

$$(e+\sigma)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(E+A)$$

这里 e 为 V 上的单位变换，记 $\sigma_1=e-\sigma,\sigma_2=e+\sigma$，则有

$$\dim\sigma_1(V)=R(E-A),\dim\sigma_2(V)=R(E+A),$$

则由已知有

$$\dim\sigma_1(V)+\dim\sigma_2(V)=n \tag{1}$$

显然有 $\sigma_1(V)+\sigma_2(V)\subseteq V$，又 $\forall\alpha\in V$，有

$$\alpha=\frac{\alpha-\sigma(\alpha)}{2}+\frac{\alpha+\sigma(\alpha)}{2}=(e-\sigma)\left(\frac{\alpha}{2}\right)+(e+\sigma)\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=\sigma_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sigma_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\in\sigma_1(V)+\sigma_2(V)$$

即有 $V\subseteq\sigma_1(V)+\sigma_2(V)$

从而可得

$$V=\sigma_1(V)+\sigma_2(V) \tag{2}$$

由(1) (2)可得 $V=\sigma_1(V)\oplus\sigma_2(V)$

下面考察线性变换 $e-\sigma^2$：$\forall\alpha\in V$，

$$\left(e-\sigma^2\right)(\alpha)=\alpha-\sigma^2(\alpha)=\alpha-\sigma(\alpha)+\sigma(\alpha)-\sigma^2(\alpha)=\alpha-\sigma(\alpha)+\sigma(\alpha-\sigma(\alpha))$$
$$=(e+\sigma)(\alpha-\sigma(\alpha))\in(e+\sigma)(V)=\sigma_1(V)$$
$$\left(e-\sigma^2\right)(\alpha)=\alpha-\sigma^2(\alpha)=\alpha+\sigma(\alpha)-\sigma(\alpha)-\sigma^2(\alpha)=\alpha+\sigma(\alpha)-\sigma(\alpha+\sigma(\alpha))$$
$$=(e-\sigma)(\alpha+\sigma(\alpha))\in(e-\sigma)(V)=\sigma_2(V)$$

即 $\left(e-\sigma^2\right)(\alpha)\in\sigma_1(V)\cap\sigma_2(V)$，而由 $V=\sigma_1(V)\oplus\sigma_2(V)$ 可知 $\sigma_1(V)\cap\sigma_2(V)=\{0\}$，故 $\left(e-\sigma^2\right)(\alpha)=0$，由 α 的任意性可知 $e-\sigma^2=\theta$，即 $\sigma^2=e$，这里 θ 表示零变换。

由线性变变与矩阵的对应关系可知 $A^2=E$。

证法六、(利用线性变换的核)设 V 为数域 F 上 n 为线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基，σ 为矩阵 A 确定的线性变换，即

$$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

从而有

$$(e-\sigma)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(E-A)$$
$$(e+\sigma)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(E+A)$$

这里 e 为 V 上的单位变换

记 $\sigma_1=e-\sigma,\sigma_2=e+\sigma$，则有 $\dim\ker(\sigma_1)=n-R(E-A),\dim\ker(\sigma_2)=n-R(E+A)$，则由已知有

$$\dim\ker(\sigma_1)+\dim\ker(\sigma_2)=n \tag{3}$$
$$\forall\alpha\in\dim\ker(\sigma_1)\cap\dim\ker(\sigma_2),$$

由 $\alpha\in\dim\ker(\sigma_1)$，则 $\sigma_1(\alpha)=0$，即 $(e-\sigma)(\alpha)=0$，可得 $\alpha=\sigma(\alpha)$，又由 $\alpha\in\dim\ker(\sigma_2)$，则 $\sigma_2(\alpha)=0$，即 $(e+\sigma)(\alpha)=0$，可得 $\alpha=-\sigma(\alpha)$，从而

$$\alpha=0 \tag{4}$$

由(3) (4)可得 $V=\dim\ker(\sigma_1)\oplus\dim\ker(\sigma_2)$。

设 $\dim\ker(\sigma_1)=r$，则 $\dim\ker(\sigma_2)=n-r$，取 $\ker(\sigma_1)$ 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_r$，取 $\ker(\sigma_2)$ 的一组基 $\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$，则 $\beta_1,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$ 为 V 的一组基。

由上可知 $\sigma|\ker(\sigma_1)=e,\sigma|\ker(\sigma_2)=-e$，则有

$$\sigma(\beta_1,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & -E_{n-r}\end{pmatrix}$$

由一个线性变换在不同基下的矩阵相似可知存在可逆矩阵 P 使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix},$$

则

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1},$$

从而

$$A^2=P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}=E。$$

作为检验，读者可完成下面的一道常见的考研题目：

设 $A\in M_n(F)$，已知 $R(E-A)+R(A)=n$，这里 E 为 n 阶单位矩阵，证明：$A^2=A$。

3. 结束语

矩阵的秩相关问题是高等代数教学的主要内容，也是数学竞赛和研究生人学考试的热点问题之一，同时矩阵的秩在解决矩阵问题及在后续专业学习中发挥着非常重要的作用。本文针对一道竞赛考研试题，分别利用矩阵的分块初等变换、多项式互素与矩阵的分块初等变换、矩阵秩的不等式、矩阵的特征值与特征向量、线性变换的值域和线性变换的核相关知识，给出了该题的 6 种证明方法，既有高等代数矩阵问题的代数证法也有矩阵问题的几何证法，通过这些解题方法，深化矩阵秩的性质及应用，凸显矩阵秩在高等代数课程中的重要性，同时，能够更好地提高学生的逻辑思维能力和分析问题、解决问题的能力。

基金项目

湖南省一流建设专业数学与应用数学专业项目。

参考文献

[1] 任芳国, 王甜甜. 关于矩阵秩的重要性质及应用[J]. 高等数学研究, 2022, 25(5): 28-31.

[2] 王守峰, 杨义川. 矩阵的 Frobenius 不等式的证明及应用——关于矩阵秩的习题课的一个教学设计[J]. 高等数学研究, 2022, 25(4): 93-95.

[3] 安玉莲, 罗雪梅. 线性映射视角下矩阵的秩[J]. 大学数学, 2022, 38(2): 89-92.

[4] 薛丽娜. 浅谈矩阵秩的求法[J]. 数学学习与研究, 2021(26): 2-3.

[5] 黄述亮. 关于矩阵秩的几个重要不等式[J]. 辽东学院学报(自然科学版), 2021, 28(1): 61-65. https://doi.org/10.14168/j.issn.1673-4939.2021.01.12

[6] 陈国华, 廖小莲, 刘成志. 高等代数[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2022.