Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3447-3454
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312357

Hans汉斯

导函数的极限与函数渐近线的关系

成凯歌

浙江旅游职业学院公共教学部，浙江 杭州

收稿日期：2023年11月9日；录用日期：2023年12月11日；发布日期：2023年12月20日

摘 要

导函数作为一类非常重要的函数，其自身具有一些独特的性质，在研究函数过程中起到了重要的作用。函数的渐近线同样也是函数性质的一个重要表现。导函数是否具有水平渐近线刻划的就是导函数在在自变量趋向无穷大时是否有极限的问题。通过对函数及导函数极限的讨论，获得函数具有水平渐近线和导函数具有水平渐近线的关系，以及函数，导函数，二阶导数和三阶导数具有水平渐近线的条件，此外，对已有的一个研究结果进行了改进。

关键词

函数，导函数，极限，渐近线

Relationships between the Limits of Derivative Functions and the Asymptotes of Functions

Kaige Cheng

Department of Public Teaching, Tourism College of Zhejiang, Hangzhou Zhejiang

Received: Nov. 9th, 2023; accepted: Dec. 11th, 2023; published: Dec. 20th, 2023

Abstract

The derivative function is one of very important function, it not only has some unique properties, but also plays a very important role in studying functions. The asymptote of the function is also an important expression of the functional properties. Whether the derivative function has a horizontal asymptote is equivalent to the question that whether the derivative function has a limit when the independent variable tends to infinity. Through discussing the limits of the function and the derivative function, we obtain the relationship between the function has horizontal asymptote and

文章引用: 成凯歌. 导函数的极限与函数渐近线的关系[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3447-3454.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312357

the derivative function has horizontal asymptote, moreover, we obtain the conditions of the function, the derivative, the second derivative and the third derivative having the horizontal asymptote. In addition, one of the existing research results is improved.

Keywords

Function, Derivative Function, Limit, Asymptote

1. 引言

假设坐标平面上有曲线 C，如果曲线 C 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时，点 P 与某定直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线[1]。渐近线可分为垂直渐近线、水平渐近线和斜渐近线。

曲线和其渐近线往往出现可以无限靠近但永不相交的状态。在足够远处，通常可以用曲线的渐近线近似代替曲线，从而更方便研究曲线在足够远处的变化。

给定曲线 $y=f(x)$，如果

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

都存在，则曲线 $y=f(x)$ 有渐近线 $y=kx+b$。对于 $x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$ 也有相应的结果[1]。

给定曲线 $y=f(x)$，如果满足

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\ \ (\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty,\ \ \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty),$$

则曲线 $y=f(x)$ 有垂直于 x 轴的渐近线 $x=x_0$，称为垂直渐近线[1]。

如果

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\ \ (\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=A),$$

则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=A$。

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，并称该极限为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数，记作 $f'(x_0)$。

令 $x=x_0+\Delta x$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则上述极限可改写为

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

所以导数是函数增量 Δy 与自变量的增量 Δx 之比的极限。这个增量比是函数关于自变量的平均变化率(也称为差商)，而导数 $f'(x_0)$ 则是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处关于自变量 x 的变化率[1]。

若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上每一点都可导，则称 $f(x)$ 为区间 I 上的可导函数。此时对每一个 $x\in I$，都有 f 的一个导数 $f'(x)$ 与之对应。这样就定义了一个在 I 上的函数，称为 f 在 I 上的导函数，也简称为

导数，记作 f', y' 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ [1]，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \quad x\in I.$$

函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 由原函数 $f(x)$ 产生，如果函数 $f(x)$ 有导函数 $f'(x)$，那么通过讨论 $f'(x)$，可以揭示函数 $f(x)$ 的性质，此外，导函数 $f'(x)$ 本身的性质也很值得讨论和研究，结合极限的重要意义，许多学者对讨论导函数的极限都给出研究成果[2]-[9]。

朱佩珍[10]，许智勇和赵曾云[11]，陆毅[12]，黄华[13]讨论了导函数在一点的极限和单侧极限问题，假设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内连续，在 $U^o(x_0,\delta)$ 内可导，那么，(1)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在且有限，则 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$；(2)如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ ($\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$)存在且有限，则 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处右(左)可导，且 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)\left(f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)\right)$。

许智勇和赵曾云[11]还讨论了导函数在极限和函数水平渐近线的关系问题，指出在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$ 具有水平渐近线的充要条件是 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$，其中 $x\to\infty$ 还包括 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 的情形；在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$ 具有斜率为 k 的渐近线的充要条件是 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，其中 $x\to\infty$ 还包括 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 的情形。

陆毅[12]和王小强[14]讨论了导函数的间断点问题，设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 在上连续，$c\in(a,b)$，$f(x)$ 在 $(a,c)\cup(c,b)$ 上可导，若 $x=c$ 是 $f'(x)$ 的跳跃间断点，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导。

范丽君和郭挺[15]讨论了一类单调有界光滑函数的导函数的极限问题，得到在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调有界光滑函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不一定存在，如果再增加条件 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，那么一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$。毛俊杰和刘晓薇[16]对范丽君和郭挺得到的结论进一步给出研究，给出了在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调有界且可微函数在 $x\to\infty$ 时导函数极限为零的两个充分条件。

2. 主要结果及讨论

许智勇和赵曾云在文[11]中给出在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$ 具有水平渐近线的充要条件是 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$；在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$ 具有斜率为 k 的渐近线的充要条件是 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$。事实上，这个充要条件值得商榷。$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$ 既不是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$ 具有斜率为 k 的渐近线的充分条件，也不是必要条件；特别地，$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$ 既不是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$ 具有水平渐近线的充分条件，也不是必要条件。

例 1 设 k 为常数，令

$$f(x)=\begin{cases} kx+x^{\frac{1}{3}}-\dfrac{2}{3}, x\in[1,+\infty), \\ \left(k+\dfrac{1}{3}\right)x, x\in(-1,1), \\ kx+x^{\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}, x\in(-\infty,-1]. \end{cases}$$

则容易验证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导，且

$$f'(x)=\begin{cases} k+\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty), \\ k+\dfrac{1}{3}, x\in(-1,1). \end{cases}$$

虽然有 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=k$，但由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$，及 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\infty$，可得 $f(x)$ 没有斜率为 k 的渐近线。特别地，当 $k=0$ 时，就有函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}, x\in[1,+\infty), \\ \frac{1}{3}x, x\in(-1,1), \\ x^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}, x\in(-\infty,-1] \end{cases}$$

满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=0$，但 $f(x)$ 没有水平渐近线。

例 2 设 k 为常数，令

$$f(x)=\begin{cases} kx+\frac{\sin x^2}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 可导是明显的，当 $x=0$ 时，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(k+\frac{\sin x^2}{x^2}\right)=k+1,$$

从而，$f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，并且由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$，以及 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x^2}{x}=0$，得 $f(x)$ 具有斜率为 k 的渐近线 $y=kx$，但由

$$f'(x)=\begin{cases} k+\frac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}, & x\neq 0, \\ k+1, & x=0, \end{cases}$$

可得 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ 不存在。特别地，函数

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x^2}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

有水平渐近线，但 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ 不存在。

定理 1 如果 $f(x)$ 是区间 $[a,+\infty)$ 上的有界可导函数，则在 $[a,+\infty)$ 上存在数列 $x_n\to+\infty(n\to+\infty)$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x_n)=0$。

证明 对任意正整数 $n(>a)$，根据已知条件，有 $f(x)$ 在区间 $[n,2n]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，因此，存在 $\xi_n\in[n,2n]$，使得

$$f(2n)-f(n)=f'(\xi_n)(2n-n)=f'(\xi_n)n,$$

一方面，由于 $n\le\xi_n\le 2n$，可得 $x_n\to+\infty(n\to+\infty)$，另一方面，由 $f(x)$ 是区间 $[a,+\infty)$ 上的有界函数，因此，存在常数 $M>0$，使得 $|f(x)|<M$ 对一切 $x\in[a,+\infty)$ 成立，进而，有

$$|f'(\xi_n)|=\left|\frac{f(2n)-f(n)}{n}\right|<\frac{2M}{n}\to 0(n\to+\infty),$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x_n)=0$ 成立。

定理 2 设 $f(x)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数。如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在且有限，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限的必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$。

证明 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=k$。如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ 存在，令 n 为任意正整数，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=a$。根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi_n\in(n,n+1)$，使得

$$f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)(n+1-n)=f'(\xi_n),$$

因此，

$$\lim_{n\to+\infty} f'(\xi_n)=\lim_{n\to+\infty}\left[f(n+1)-f(n)\right]=\lim_{n\to+\infty} f(n+1)-\lim_{n\to+\infty} f(n)=0,$$

根据函数极限和数列极限的关系，有 $k=\lim\limits_{n\to+\infty} f'(\xi_n)=0$。

定理 2 表明，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数 $f(x)$，如果其导数 $f'(x)$ 有水平渐近线，那么函数 $f(x)$ 有水平渐近线的必要条件是导数 $f'(x)$ 以 x 轴为水平渐近线。

定理 3 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，如果存在正常数 $p>0$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+pf'(x)\right]=A$，则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,\quad \lim_{x\to+\infty} f'(x)=0.$$

证明 利用洛必达法则，则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{p}}f(x)}{e^{\frac{x}{p}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{x}{p}}f(x)\right)'}{\left(e^{\frac{x}{p}}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{p}e^{\frac{x}{p}}f(x)+e^{\frac{x}{p}}f'(x)}{\frac{1}{p}e^{\frac{x}{p}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+pf'(x)\right]=A.$$

由此，$\lim\limits_{x\to+\infty} pf'(x)=0$，进而，有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$。

类似地，可得如下定理 4 及推论 1 和推论 2。

定理 4 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，如果存在负常数 $p<0$，使得 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-pf'(x)\right]=A$，则

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A,\quad \lim_{x\to-\infty} f'(x)=0.$$

推论 1 假设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+f'(x)\right]=A$，则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,\quad \lim_{x\to+\infty} f'(x)=0.$$

推论 2 假设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，如果 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-f'(x)\right]=A$，则

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A,\quad \lim_{x\to-\infty} f'(x)=0.$$

上述定理 3 和定理 4 表明：假设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，如果存在正常数 $p>0$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+pf'(x)\right]=A$，或者如果存在负常数 $p<0$，使得 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-pf'(x)\right]=A$，那么 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都有水平渐近线，而且 $f'(x)$ 的水平渐近线是 x 轴。

定理 5 设 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上有三阶导数，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)$ 都存在且有限，则

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty} f''(x)=\lim_{x\to+\infty} f'''(x)=0. \tag{1}$$

证明 由已知条件及洛必达法则，有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-f'(x)+f''(x)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(f(x)-f'(x)+f''(x)\right)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[e^x\left(f(x)-f'(x)+f''(x)\right)\right]'}{\left(e^x\right)'}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(f(x)-f'(x)+f''(x)\right)+e^x\left(f'(x)-f''(x)+f'''(x)\right)}{e^x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)-f'(x)+f''(x)\right)+\left(f'(x)-f''(x)+f'''(x)\right)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+f'''(x)\right]\end{aligned}$$

存在，于是，结合 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限，有

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-f'(x)+f''(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}f'''(x) \tag{2}$$

成立。由洛必达法则，结合 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-f(x)}{x}=0$ 和(2)式，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-f(x)}{x}+\frac{f'(x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-f(x)+f'(x)}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[-f(x)+f'(x)\right]'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\left[-f'(x)+f''(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}f'''(x)\end{aligned}$$

存在，假如

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=b\neq0,$$

不妨设 $b>0$，那么，存在 $x_0>b>0$，当 $x>x_0$ 时，都有 $\dfrac{f'(x)}{x}>\dfrac{b}{2}>0$，即有 $f'(x)>\dfrac{b}{2}x$ 于是，当 $x>x_0$ 时，有

$$f(x)-f(x_0)-\frac{b}{4}\left(x^2-x_0^2\right)=\int_{x_0}^{x}f'(t)\,dt-\frac{b}{2}\int_{x_0}^{x}t\,dt=\int_{x_0}^{x}\left[f'(t)-\frac{b}{2}t\right]dt\geq0,$$

那么，有

$$f(x)\geq f(x_0)+\frac{b}{4}\left(x^2-x_0^2\right),$$

这必然导致 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限矛盾。因此，必有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=0 \tag{3}$$

成立。再利用洛必达法则，结合(2)和(3)式，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)-2f''(x)\right]&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left[f'(x)-2f''(x)\right]}{e^x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left[f'(x)-2f''(x)\right]+e^x\left[f''(x)-2f'''(x)\right]}{e^x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)-f''(x)-2f'''(x)\right]\\&=-3\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=0\end{aligned}$$

再结合(2)和(3)式，得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-f'(x)+f''(x)+f'(x)-2f''(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}f'''(x)-3\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=-2\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=0\text{，}$$

即有 $\lim_{x\to+\infty}-f''(x)=0$，于是，有 $\lim_{x\to+\infty}f''(x)=0$。由(2)和(3)式，又得 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$，从而，(1)式得证。

定理 6 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,a)$ 上有三阶导数，如果 $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim_{x\to-\infty}f'''(x)$ 都存在且有限，则

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}f''(x)=\lim_{x\to-\infty}f'''(x)=0. \tag{4}$$

证明 将 $f(x)$ 看作是 $f_1(u)=f(-u)$ 以及 $u=-x$ 得复合，则

$$f'(x)=-f_1'(u)\text{，}\quad f''(x)=f_1''(u)\text{，}\quad f'''(x)=-f_1'''(u).$$

对 $f_1(u)$ 应用定理 5，即可得(4)式成立。

定理 5 和定理 6 表明，对于定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$，如果 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上存在三阶导数，且 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 都有水平渐近线，那么函数 $f'(x)$、$f''(x)$ 和 $f'''(x)$ 都以 x 轴为水平渐近线。

定理 7 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有 $n+1$ 阶导数，证明：如果 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim_{x\to+\infty}f^{(n+1)}(x)$ 都存在且有限，则 $\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k+1)}(x)=0$。

证明 考虑函数 $F(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)$，因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^xF(x)\right)'}{\left(\mathrm{e}^x\right)'}&=\lim_{x\to+\infty}\left[F(x)+F'(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k+1)}(x)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k+1)}(x)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1} f^{(k+1)}(x)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k+1)}(x)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1} f^{(k+1)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k+1)}(x)+(-1)^n f^{(n+1)}(x)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+(-1)^n f^{(n+1)}(x)\right]\end{aligned}$$

存在，由洛必达法则，

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^xF(x)}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^xF(x)\right)'}{\left(\mathrm{e}^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\left[F(x)+F'(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+(-1)^n f^{(n+1)}(x)\right]$$

存在，于是，$\lim_{x\to+\infty}F'(x)=\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k+1)}(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[F(x)+F'(x)\right]-\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$。

推论 如果定理 7 的条件成立，则 $\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)$ 存在，且有

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)=\lim_{x\to+\infty}(-1)^n f^{(n+1)}(x).$$

事实上，由 $\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k+1)}(x)=0$，得 $\lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k+1)}(x)+(-1)^n f^{(n+1)}(x)\right]=0$，那么，

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1} f^{(k+1)}(x)-(-1)^{n} f^{(n+1)}(x)\right]=(-1)\lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k} f^{(k+1)}(x)+(-1)^{n} f^{(n+1)}(x)\right]=0,$$

则有

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k} f^{(k)}(x)=\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1} f^{(k+1)}(x)=\lim_{x\to+\infty}(-1)^{n} f^{(n+1)}(x)$$

成立。

3. 总结

函数在自变量趋向于无穷大时是否存在极限的问题其实就是函数是否存在水平渐近线的问题。本文首先举例说明对函数具有渐近线和其导函数具有水平渐近线的一个已有充要条件提出值得进一步讨论的理由。然后通过研究函数存在水平渐近线和导函数存在水平渐近线，获得函数具有水平渐近线和导函数具有水平渐近线的一个充要条件，以及获得了函数具有水平渐近线和导函数具有水平渐近线的一个条件，并且进一步讨论了二阶导数和三阶导数具有水平渐近线的一个条件，此外，还研究了在高阶导数具有水平渐近线的条件下，函数和各阶导数一个线性组和的极限问题。所有获得的结果填补了以往对函数渐近线和导函数渐近线研究的一个空白。但本文研究的导函数、二阶导数和三阶导数具有的水平渐近线都仅仅是 x 轴，对于是否还有其它条件使得导函数、二阶导数和三阶导数具有 x 轴这个水平渐近线，对于在什么条件下导函数、高阶导数具有更一般的水平渐近线，以及在什么条件下导函数、高阶导数具有斜渐近线将成为进一步研究的重要方向。此外，高阶导数更一般的线性组和的极限问题应该还有更多值得思考的内容，同样将进一步开展研究。

基金项目

浙江旅游职业学院优质课程资助项目(2017ZLY012)。

参考文献

[1] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析(上册) [M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019, 61-62, 83-86.

[2] 姚卫红. 几个典型例子在微积分(数学分析)教学中的应用[J]. 高等数学研究, 2020, 23(6): 45-48.

[3] 章建跃. 通过直观理解导数概念感悟极限思想运用导数研究函数性质解决实际问题[J]. 数学通报, 2021, 60(10): 7-12.

[4] 段成均. 关于导数极限定理的几个应用及其推广[J]. 高等数学研究, 2021, 24(5): 27-29.

[5] 张艳红, 邱红军. 导函数的极限与在该点的导数的关系[J]. 高师理科学刊, 2013, 33(4): 24.

[6] 吴艳. 导函数极限定理的应用及推广[J]. 高等数学研究, 2018, 21(5): 36-38.

[7] 邓书显, 于红霞. 导函数连续性定理及其推论[J]. 河南纺织高等专科学校学报, 2001(3): 39-40.

[8] 李国强. 对一道经典求极限问题的思考[J]. 四川文理学院学报, 2021, 31(5): 48-51.

[9] 李海鹏, 李高明. 关于导函数极限定理的注记[J]. 高等数学研究, 2017, 20(5): 23-24.

[10] 朱佩珍. 导函数的极限、速续与函数在一点处的可导性[J]. 天津轻工业学院学报, 1993, 15(1): 74-76.

[11] 许智勇, 赵曾云. 关于导函数的极限的研究[J]. 武汉科技学院学报, 2006, 19(9): 35-37.

[12] 陆毅. 导函数极限的存在性与函数可导性关系初[J]. 锦州师范学院学报(自然科学版), 2001, 22(4): 18-19.

[13] 黄华. 关于极限、连续、导函数的研究与探讨[J]. 牡丹江教育学院学报, 2008, 109(3): 81.

[14] 王小强. 导函数极限和连续的特殊性及其应用[J]. 长江大学学报(自然科学版), 2011, 8(12): 12-13.

[15] 范丽君, 郭挺. 一类单调有界光滑函数的导函数极限存在性[J]. 江西理工大学学报, 2010, 31(3): 69-73.

[16] 毛俊杰, 刘晓薇. 一类单调有界连续可微函数的导函数极限问题[J]. 齐鲁工业大学学报, 2019, 33(3): 79-80.