

定义于椭球面上的多元切触插值问题研究

周鹏宇, 王心蕊, 崔利宏*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年11月9日; 录用日期: 2023年12月11日; 发布日期: 2023年12月20日

摘要

以定义于平面代数曲线上的切触插值研究结果为基础, 对定义于椭球面上的切触插值问题进行了研究。给出了定义于椭球面上的切触插值和插值正则性条件组问题提法, 对插值条件组的拓扑结构进行了较为深入的研究, 得到了定义于椭球面上的切触插值正则条件组的判定定理以及迭加构造方法, 最后给出了实验算例验证了算法的有效性。

关键词

椭球面, 多元切触插值, 正则条件组

Research on the Multivariate Contact Interpolation Problem Defined on an Ellipsoid

Pengyu Zhou, Xinrui Wang, Lihong Cui*

School of Mathematic, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Nov. 9th, 2023; accepted: Dec. 11th, 2023; published: Dec. 20th, 2023

Abstract

Based on the research results of tangent interpolation defined on planar algebraic curves, the problem of tangent interpolation defined on an ellipsoid was studied. The formulation of the tangent interpolation problem defined on an ellipsoid and the regularization condition set for interpolation were given. The topological structure of the interpolation condition set was thoroughly studied, and the decision theorem and superposition method for the tangent interpolation regula-

*通讯作者。

rization condition set defined on an ellipsoid were obtained. Finally, experimental examples were provided to verify the effectiveness of the algorithm.

Keywords

Ellipsoid, Multivariate Contact Interpolation, Regular Condition Group

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 将多元函数插值[1]应用到实际的生产生活中一直是计算数学专业研究领域的一个极其重要的研究内容[2], 而多元多项式切触插值[3]则是多元多项式插值研究的重点方向。在进行多元切触插值问题时, 首先要解决的就是插值适定性问题, 1965年, 梁学章研究了二元多元多项式插值问题, 提出了多元插值适定结点组的基本概念, 并且给出两种全新得构造方法: 一种是添加相关直线法, 另一种是用圆锥曲线表达的相关方法[1]。1977年, Chung和Yao也提出了类似构造方法[4]。1982年M. Gasca对直线迭加插值法进行了扩展与补充[5]。目前, 有关在整个空间进行插值以及关于定义于空间中一般代数流形切触插值的研究结果相对系统与完整, 关于定义于一些具体流形上的Lagrange插值也有一部分详细研究[6][7][8], 而关于有着重要生产生活实用价值的具体流形上的插值结果却相对较少。

椭球面是一类重要的二次代数曲面, 其在地理测绘和导航、工程测量以及通信和卫星技术等方面有着重要实际应用。比如卫星通信和导航系统通常需要考虑地球的椭球面形状。通过使用椭球面模型, 可以更精确地计算卫星轨道、通信传播路径等参数, 提高通信系统的性能。除此之外, 在石油和矿产资源勘探中, 对地球表面的准确建模对于找到资源的位置和规模至关重要。椭球面模型可以提供更真实的地球形状, 有助于资源勘探的精确性。因此, 椭球面上的多元切触插值的研究有着十分重要的实际应用价值。

2. 基本定义和基本定理

本文主要研究沿三维欧式空间 R^3 中的椭球面上 $F = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \right\}$ 进行切触插值的正则性问题, 为此本文首先引入若干基本定义。

设 k 为正整数, $r \in N$ 。令 $p_n^{(3)}$ 表示全部全次数小于等于 n 的三元代数多项式所构成的集合, $P_{n,r}^{(3)}[q(k)]$ 表示定义在 k 次代数曲面 $q(x, y, z) = 0$ 上的全次数小于等于 nx 且有 n 阶方向导数的三元代数多项式空间。定义 $d_{n,u}(k)$ 如下:

$$d_{n,u}(k) = \binom{n+3}{3} - \binom{n-(\mu+1)k+3}{3} \\ = \begin{cases} \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3), n < (\mu+1)k \\ \frac{1}{6}(\mu+1)k(3n(n-(\mu+1)k) + 12n + (\mu+1)^2 k^2 - 6(\mu+1)k + 11), n \geq (\mu+1)k \end{cases}$$

$$l_{n,r}(k) = \frac{1}{2}(n-rk)k(n-(r+1)k+4) + \binom{k-1}{3} + 1$$

而且有 $\dim P_{n,r}^3[q(k)] = d_{n,u}(k)$ 。

假设 $q(x, y, z) = 0$ 是一个 k 次没有重复分量的代数曲面, $\mathfrak{B} = \{Q_i^{(r)} \mid r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(k)\}$ 是这个曲面上的一个切触插值条件组。对于任意给定的一组实数组 $\{f_i^{(r)} \mid r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(k)\}$, 要寻找一个在 $p_n^{(3)}$ 中的多项式 $p(x, y, z)$, 并使其满足下述切触插值条件:

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = f_i^{(r)}, r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(k) \quad (1)$$

式中 $\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)})$ 代表多项式 $p(x, y, z)$ 在曲面 $q(x, y, z) = 0$ 上条件组 \mathfrak{B} 中点 $Q_i (i = 1, \dots, l_{n-r}(k))$ 处沿这个曲面的 r 阶法向导数。(即沿曲面位于该点处的切平面的法方向的 r 阶方向导数)

定义 1: (R^3 中的全次数型多元切触插值)

设 $z_q \in Z$ 且 $z_q \geq 0$, $q = 1, \dots, m; m \geq 0$ 及一个由 m 个结点组成的集合 $\mathcal{A} = \{Q_q\}_{q=1}^m$ 。 R^3 中的全次数型多元切触插值问题就是如果对于给定的数组 $C_{q,\alpha}$, $q = 1, \dots, m$ 及 $|\alpha| \leq z_q$, 在 $p_n^{(3)}$ 中寻找一个多项式 $p(x, y, z)$ 满足:

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} p(Q_q) = C_{q,\alpha}, q = 1, \dots, m; |\alpha| \leq z_q$$

假定 z_q 及 n 满足 $\binom{n+d}{d} = \sum_{q=1}^m \binom{z_q+d}{d}$, 则称 \mathcal{A} 及求导条件构成的插值条件组为 $p_n^{(3)}$ 的一个正则切触插值正则条件组。如果 z_q , $q = 1, \dots, m$ 都相同, 则该切触插值问题被称为一致切触插值问题。

定义 2: (椭球面 $F(x, y, z)$ 上的切触插值正则条件组)

设 $F(x, y, z)$ 为如上所定义的椭球面, $\mathfrak{B} = \{Q_i^{(r)} \mid r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(2)\}$ 为沿二次代数曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ 的一个 n 次 r 阶切触插值正则条件组, 并简记为 $\mathfrak{B} \in I_{n,r}^3(q)$ (这里 $I_{n,r}^3(q)$ 表示全部沿该曲面的一个 n 次 r 阶切触插值正则条件组的集), 如果对于任意给定的一组数组

$\{f_i^{(r)}, r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(2)\}$, 在 $p_n^{(3)}$ 中恒存在多项式 $p(x, y, z)$, 满足

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = f_i^{(r)}, r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(2)。$$

注记: 设 $F(x, y, z)$ 为如上所定义的锥面, 是一个二次没有重复分量的代数曲面,

$\mathfrak{B} = \{Q_i^{(r)} \mid r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(2)\}$ 为这个曲面上的一个切触插值条件组。如果对于每个任意给定的数组 $\{f_i^{(r)}, r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(2)\}$

方程组 (1) 总是存在一组解等价于若 $p_n^{(3)}$ 中存在 $p(x, y, z)$ 满足齐次切触插值条件:

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = f_i^{(r)}, r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(2), \text{ 可推出在曲面 } F(x, y, z) \text{ 上总是有 } p(x, y, z) \text{ 恒等于零。}$$

我们同时能够得到结论: 定义于锥面上的切触插值正则条件组所包含的条件总数与插值空间的维数是要相等的。

定义 3: (理想)

一个子集 $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$, 如果其满足下述三个条件:

1) $0 \in I$;

- 2) 如果 $f, g \in I$, 则有 $f + g \in I$;
 3) 如果 $f \in I$ 且 $h \in K[x_1, \dots, x_n]$, 则有 $hf \in I$ 。那么 I 被称为是一个理想。

定义 4: (生成理想)

令 f_1, \dots, f_s 为 n 元多项式环中的 s 个多项式, 则定义:

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^s h_i f_i, h_1, \dots, h_s \in K[x_1, \dots, x_n] \right\}$$

显然, $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ 是一个理想, 称 $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ 是 f_1, \dots, f_s 的生成理想。

定义 5: (根理想)

设 $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ 是一个理想, 用 \sqrt{I} 表示 I 的根理想, 它是集合: $\{f \mid f^m \in I, m \in \mathbb{Z}, m \geq 1\}$

定义 6: (关于 r 阶理想 I 的一个强 H-基)

设 f_1, \dots, f_s 为 $K[x_1, \dots, x_s]$ 中的 s 个多项式, $\deg(f_i) = l_i$, 且理想 $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ 。若对于每个给定的多项式 $p \in I \cap P_m^{(n)}$, 在 $K[x_1, \dots, x_s]$ 中恒存在多项式 p_1, \dots, p_s , 使得

$$p = \sum_{i=1}^s p_i f_i^{r+1}, \deg(p_i) \leq n - (r+1)l_i, i = 1, \dots, s \text{ 称多项式集 } \{f_1, \dots, f_s\} \text{ 是关于 } r \text{ 阶理想 } I \text{ 的一个强 H-基。}$$

命题 1:

设 I 为一个理想且令 V_1, V_2 为两个仿射簇, 则有 $V_1 \subset V_2$ 蕴含 $I(V_1) \supset I(V_2)$ 。

命题 2:

若 f 是一个 $K[x_1, \dots, x_s]$ 中的 s 元多项式, $I = \langle f \rangle$ 是由 f 生成的素理想, $f = f_1^{\alpha_1} \dots f_n^{\alpha_n}$ 是 f 的不可约多项式的分解, 则有 I 的根理想为 $\sqrt{\langle f \rangle} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ 。

特别, 假若 f 是一个没有重复分量的代数多项式, 则有 I 的根理想与 I 相等。(注: 素理想是由一个元素生成的理想)

本文所获得的研究结果如下:

定理 1: (椭球面 $F(x, y, z)$ 上的 n 次 r 阶切触插值正则条件组判定定理)

由如上定义的椭球面 $F(x, y, z)$ 上的切触插值条件组 $\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} \mid r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(2)\}$ 能够做成定义在该曲面的一个 n 次 r 阶切触插值正则条件组的充分必要条件是: 若 $p_n^{(3)}$ 中存在多项式 $p(x, y, z)$, 满足下述齐次切触插值条件:

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = f_i^{(r)}, r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(2) \text{ 则一定在 } P_{n-2(\mu+1)} \text{ 中存在多项式 } p_1(x, y, z), \text{ 使得}$$

$$p(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)^{\mu+1} \cdot p_1(x, y, z)$$

若 $n < 2(\mu+1)$, $p_1(x, y, z)$ 恒等于零。

定理 2: (构造 $p_n^{(3)}$ 上的切触插值正则条件组的添加椭球面法)

设关于 $p_n^{(3)}$ 的一个切触插值正则条件组为 $\Phi = \{D_{\mathcal{A}}(Q_i \mid \mathcal{A} \in \mathcal{A}, i = 0, 1, \dots, t)\}$, 且 Φ 中任何点都不在椭球面 $F(x, y, z)$ 上, 则对 $F(x, y, z)$ 上的一个 $n + 2(\mu + 1)$ 次 r 阶切触插值正则条件组

$\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} \mid r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n+2r(\mu+1)}(2)\}$, 则 $\mathcal{B} \cup \Phi$ 一定构成一个关于 $P_{n+2(\mu+1)}^3$ 的切触插值正则条件组。

定理 1 和定理 2 中的结果是在前人研究的基础上, 构造了椭球面切触插值的正则条件组, 并将二元切触插值的通过“添加直线法”来构造插值适定泛函组, 推广到三元情况的添加椭球面法构造切触插值正则条件组。

由定理 1 和文献 3 中的结果, 我们得到如下推论:

推论 1: (构造椭球面 $F(x, y, z)$ 上切触插值正则条件组的添加圆锥曲线法)

设二次代数曲线 $s(x, y) = p^2 + c^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0$, p 为正的常数, 与另一条 $l(l \geq 2)$ 次代数曲线 $\omega(x, y) = 0$ 正好交于 $2l$ 个互不相同的点, 由此确定一个插值条件组, 将其记为 $\mathcal{A} = \{Q_i^{(r)} \mid r=0, \dots, \mu; i=1, \dots, 2l\}$ (求导方向既有沿曲线 $p^2 + c^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0$, p 为正的常数的法方向又有沿曲线 $\omega(x, y) = 0$ 的法方向), 而 $\{s, \omega\}$ 正好做成关于理想 $\langle s, \omega \rangle$ 的强 H-基. 若 $\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} \mid r=0, \dots, \mu; i=1, \dots, e_{n-r}(2)\} \in I_{n-r}^{(2)}(w)$, 其中 $e_{n-r}(2) = 2(n-2r) - \binom{2-1}{2} + 1$, 且满足 $\mathcal{B} \cap \mathcal{A} = \emptyset$, 则有 $\mathcal{B} \cap \mathcal{A} \in I_{n+(\mu+1)l-r}^2(w)$.

这样我们就可以通过垂直于 z 轴的平面与锥面 $F(x, y, z)$ 一次次相交, 即把添加圆锥曲线法构造锥面 $F(x, y, z)$ 上切触插值正则条件组的问题转化为添加曲线交点法构造平面代数曲线上切触插值正则条件组的问题.

3. 定理的证明

定理 1 的证明:

由注记, 充分性得证, 以下只需证明定理的必要性.

设 $\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} \mid r=0, \dots, \mu; i=1, \dots, l_{n-r}(2)\}$

是定义在椭球面 $F(x, y, z)$ 上的一个 n 次 r 阶切触插值正则条件组, 且在 $p_n^{(3)}$ 中存在多项式 $p(x, y, z)$ 满足

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = f_i^{(r)}, r=0, \dots, \mu; i=1, \dots, l_{n-r}(2)$$

则若 $r=0$, 由注记可得, 沿椭球面 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ 恒有 $p(x, y, z) = 0$, 将 $\langle F \rangle$ 记为 I_1 , 将 $\langle p \rangle$ 记为 I_2 , 则有 $V(I_1) \subset V(I_2)$ 蕴含 $I(V(I_1)) \supset I(V(I_2))$, 而椭球面

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

是一个二次没有重复分量的代数曲面, 所以有

$I(V(I_1)) = \sqrt{I_1} = I_1$ 又由 $I(V(I_2)) = \sqrt{I_2} = I_2$ 故有 $I_2 \subset I_1$, 则根据理想的定义可知, 存在 $p_n^{(3)}$ 中的 $p_1(x, y, z)$, 使得

$$p(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \cdot p_1(x, y, z)$$

假定结论对 $r=s, r \in Z$ 且 $r > 0$ 成立, 即有 $\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} \mid r=0, \dots, \mu; i=1, \dots, l_{n-r}(2)\}$ 为定义在曲面 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ 的 n 次 s 阶切触插值正则条件组, 同时满足条件

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = 0, \forall Q_i^{(s)} \in \mathcal{B} \quad (2)$$

有

$$p(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \cdot p_1(x, y, z) \quad (3)$$

则若 $r = s + 1$

我们对公式(2)两端求法向导数直到 $s + 1$ 阶, 并使用 Leibniz 公式, 有

$$r(Q_i^{(r)}) = 0, \forall Q_i^{(r)} \in \mathcal{B} \text{ 因为 } p_1(x, y, z) \in P_{n-2}^{(3)}$$

同时经过唯一且确定的 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ 的所有条件点, 所以沿 $F(x, y, z)$ 上总有 $p_1(x, y, z) \equiv 0$ 。由 $r = 0$

情况同理可得

$$p_1(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \cdot p_1'(x, y, z) \quad (4)$$

将公式(4)代入到公式(3)中得:

$$p(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)^{s+2} \cdot p_1'(x, y, z)$$

由归纳法知, 结论成立。

定理 2 的证明:

只需证明仅存在零多项式满足所给出的齐次切触插值条件即得出结论成立。可知所有的条件数是:

$$\begin{aligned} & \binom{n+3}{3} + \sum_{r=0}^{\mu} l_{n+2(\mu+1), r} \quad (2) \\ &= \binom{n+3}{3} + \sum_{r=0}^{\mu} \left(2 \cdot \frac{1}{2} (n+2(\mu+1) - 2r) (n+2(\mu+1) - 2(r+1) + 4) + \binom{2-1}{3} + 1 \right) \\ &= \binom{n+3}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} (\mu+1) (3 \cdot 2n(n+(\mu+1)) + 12n + 4(\mu+1)^2 - 6 \cdot 2(\mu+1) + 11) \\ &= \binom{n+3}{3} + \binom{n+2(\mu+1)+3}{3} - \binom{n+3}{3} \\ &= \binom{n+2(\mu+1)+3}{3} \end{aligned}$$

显然这与多项式空间 $P_{n+2(\mu+1)}^3$ 的维数相等。

假设 $P_{n+2(\mu+1)}^3$ 中存在满足齐次切触插值条件的多项式 $p(x, y, z)$, 即有:

$$D_{\mathcal{N}} p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in \mathcal{N}$$

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = 0, \forall Q_i^{(s)} \in \mathcal{B}$$

因为 $\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = 0, \forall Q_i^{(s)} \in \mathcal{B}$, 同时有 $\mathcal{B} \in I_{n+2(\mu+1), r}^3(F)$, $p(x, y, z) \in P_{n+2(\mu+1)}^3$ 。

则据定理 1 可得, 在 $P_n^{(3)}$ 中存在多项式 $p_1(x, y, z)$, 使得

$$p(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \cdot p_1(x, y, z) \quad (5)$$

对公式(5)两端求直到 $\mu+1$ 阶导数, 得到

$$0 = D_{\mathbf{x}} p(Q_2) = D_{\mathbf{x}} \left\{ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)^{s+2} \cdot p'_1(x, y, z) \right\}, \forall Q_i \in \mathcal{N}$$

因为对 $\forall Q_i \in \mathcal{N}$ 在 $F(x, y, z)$ 上取值都不为零, 则根据 Leibniz 公式得对任意 $\forall Q_i \in \mathcal{N}$, $D_{\mathbf{x}} r(Q_i) = 0$ 。但 Φ 是关于 $p_n^{(3)}$ 的正则切触插值条件组, 则有 $p_1(x, y, z) \equiv 0$, 即有 $p(x, y, z) \equiv 0$ 。

4. 实验算例

设被插值函数为 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 椭球面方程: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1$, 取该椭球面外的一点 $Q_0^0(0, 0, 0)$, 则该点是 $P_0^{(3)}$ 的一个正则结点组, 并且在此椭球面上取点 $Q_1^0(2, 0, 1)$, 此时求出在这点处一阶法向导数 $Q_1^1\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 由上述定理 1 知, 条件组 $\{Q_0^0, Q_1^0, Q_1^1\}$ 构成沿椭球面 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1$ 上的 1 次插值正则条件组, 如图 1 所示。设被插值函数在这些条件下的一次插值多项式为

$$p(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z + a_4$$

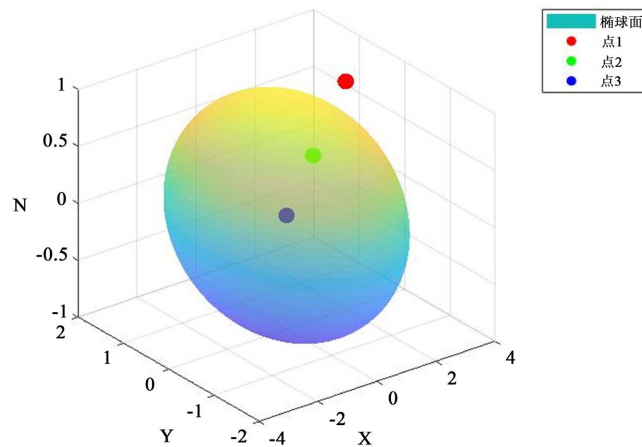


Figure 1. The picture of ellipsoidal point taking (Including nodes)
图 1. 椭球面取点图(含结点)

$$\text{插值条件: } \begin{cases} p(Q_0^0) = f_0^{(0)} \\ p(Q_1^0) = f_1^{(0)} \\ \frac{\partial^1}{\partial n^1} p(Q_1^1) = f_1^{(1)}, n=1 \end{cases} .$$

$$\text{代入条件得: } \begin{cases} a_4 = 0 \\ 2a_1 + a_3 + a_4 = \sqrt{5} \\ a_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} .$$

$$\text{解方程组得到: } \begin{cases} a_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ a_4 = 0 \end{cases} .$$

代入得到插值多项式为: $p(x, y, z) = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}z$ 。

经计算求得被插值函数和插值多项式在点 $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$

处的值分别是: $f\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \frac{1}{2}$, $p\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

误差为 $m = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right| \approx 0.0527$ 。

5. 结论

本文首先介绍了多元切触插值的相关定义与基本定理, 同时重点研究了定义于椭球面上的多元切触插值正则条件组, 提出构造椭球面上多元切触插值正则条件组的判定定理, 最后给出实验算例说明并验证有关结论。本文创新点为给出定义于一类具体流形椭球面上的切触插值结果, 其对生产生活有着重要的实用价值。在此研究基础上, 多元切触插值的研究领域还需我们进行不断的探索与完善, 从而使其应用范围更加广泛。

参考文献

- [1] 梁学章. 关于多元函数的插值与逼近[J]. 高等学校计算数学学报, 1979(1): 123-124.
- [2] 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与多元 Kergin 插值[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2003.
- [3] 崔利宏. 多元切触插值某些问题的研究[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2006.
- [4] Chung, K.C. and Yao, T.H. (1977) On Lattices Admitting Unique Lagrange Interpolation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **14**, 735-741. <https://doi.org/10.1137/0714050>
- [5] Gasca, M. and Maezu, J.I. (1982) On Lagrange and Hermite Interpolation in \mathbb{R}^k . *Numerische Mathematik*, **39**, 1-14. <https://doi.org/10.1007/BF01399308>
- [6] 牟朝会. 关于球面切触插值问题研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2021.
- [7] 刘海波, 惠婷婷, 崔利宏. 定义于双叶双曲面上的多元 Lagrange 插值问题[J]. 应用数学进展, 2017, 6(4): 547-552.
- [8] 惠婷婷, 刘海波, 崔利宏. 定义于椭球面上的多元 Lagrange 插值问题研究[J]. 应用数学进展, 2017, 6(4): 442-447.