Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3463-3469
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312359

Hans汉斯

对象转化策略在高中数学解题中的应用

李士凯

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年11月9日；录用日期：2023年12月11日；发布日期：2023年12月20日

摘　要

对象转化策略是解决数学问题的重要策略，其蕴含的转化思想更是数学思想的灵魂。本文通过具体问题论述对象转化策略中边角转化、三角函数转化、语言转化、数形结合、构造法和几何问题代数化在高中数学解题中的应用，体现其简单化、直观化、熟悉化及和谐化的特点，充分发挥等价转化策略在解题过程中的优势和作用，以提高学生的解题能力。

关键词

对象转化策略，转化思想，等价转化，解题

Application of Object Transformation Strategy in High School Mathematics Problem Solving

Shikai Li

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Nov. 9th, 2023; accepted: Dec. 11th, 2023; published: Dec. 20th, 2023

Abstract

Object transformation strategy is an important strategy for solving mathematical problems, and the transformation idea contained in it is the soul of mathematical thinking. This article discusses the application of edge and angle transformation, trigonometric function transformation, language transformation, number-shape combination, construction method and algebraization of geometric problems in high school mathematics problem solving through specific problems in the object transformation strategy, reflecting its simplification, intuitiveness and familiarity. And the

文章引用: 李士凯. 对象转化策略在高中数学解题中的应用[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3463-3469.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312359

characteristics of harmony, give full play to the advantages and role of equivalent transformation strategies in the problem-solving process, so as to improve students' problem-solving abilities.

Keywords

Object Transformation Strategy, Transformation Ideas, Equivalent Transformation, Problem Solving

1. 引言

1956年布鲁纳等人首次提出"认知策略"的概念，心理学家纽厄尔(Newell)、肖(Shaw)和西蒙斯(Si-mon)随之利用计算机有效地模仿了问题解决策略，从而形成了"学习策略"的概念[1]，由此兴起了学习策略的研究热潮。所谓学习策略，就是学习者为了提高学习的效果和效率，有目的、有意识地制定的有关学习过程的复杂方案[2]。随着研究的深入和细化，特定学科的学习策略也相继出现。数学学习作为一个复杂的认知过程，涉及到许多的学习策略，如对象转化策略、阅读策略和直观化策略等。

在新高考背景之下，高中教育受到越来越多的关注。高考以能力为重、知识为基，关键能力是高考重要的考核目标，也是测试和评价的核心指标和因素[3]。传统的题海战术、死记硬背模式已经无法适应新高考的要求，而数学学习策略在充分发挥数学学习活动的效益，培养学生创新精神和实践能力的过程中扮演着重要作用[4]。因此，帮助学生掌握数学思想、数学学习策略不仅是现实的需要更是学生未来发展的要求。对象转化策略则是最为重要的数学学习策略，它的基本思想是将原问题转化为一个等价的问题，通过解决这个等价问题来获得原问题的解。随着数学的发展，对象转化策略逐渐得到了系统的总结和发展。在古希腊数学中，欧几里得的《几何原本》中就包含了一些转化的思想和方法；在中国古代数学中，刘徽的《九章算术》中也包含了一些转化策略的应用；现代数学中，转化策略已经成为了一种重要的解题方法，并且在数学各个领域中都有广泛的应用，包括代数、几何、概率论等。对象转化策略可以帮助人们更好地理解和解决问题，提高问题解决的效率。在此背景之下，本文选取数学学习策略中的对象转化策略作为研究对象，总结对象转化策略的特点，以具体问题为例分析对象转化策略在解题过程中的优势和作用，帮助学生理解掌握对象转化策略，以提升学生解决问题的能力，培养学生的发散思维。

2. 对象转化策略的概念与功能

在一定条件下，数学对象之间可以通过数学映射实现相互转化，即在两个数学结构 A 和 B 之间定义一个映射 φ，就可以将结构 A 中的问题转换为结构 B 中的问题，这就是对象转化策略。

对象转化策略有三个主要功能。其一，作为解决问题来看，当一个问题在一个结构 A 中不容易解决时，可以通过某种映射将问题转化到另一个结构 B 中去，而在结构 B 中问题容易得到解决，然后再通过逆映射回到结构 A 中去，求得原问题的解，这就是所谓的 RMI (关系映射反演)方法[5]。事实上，中学数学中的数形转换(点集到数集或数集到点集的映射)、变量替换(数集到数集的映射)、合同变换、相似变换、线性变换(均为点集到点集的映射)等，都是 RMI 方法的具体体现[6]。其二，通过数学映射的方法，可以发现一些新的结论。其三，通过映射可以使学习者从不同视角、不同侧面和不同结构中去认识一个对象，从而加深对该对象的感悟和理解。

3. 对象转化策略的特点

转化思想是对象转化策略的核心思想，也是数学常用的思想方法之一，转化思想的实质是知识与方法的迁移，即借助某个知识或方法将未知转化为已知；将高维转化为低维；将多元转化为一元；将空间转化为平面，从而使数学问题迎刃而解[7]。对象转化策略在实际应用时有以下特点：

1) 简单化，即将复杂问题通过转化策略变换为简单问题，从而解决问题。

2) 直观化，即将某些抽象的数学问题通过转化变得直观形象，从而达到求解问题的目的，如数学中抽象的数与直观的形的转化问题。

3) 熟悉化，即将不熟悉问题映射为熟悉的问题，再运用已有的知识、经验轻松求解。

4) 和谐化，即利用条件与结论之间数学形式的和谐一致性，找出问题的内在联系和规律，设法将问题予以转化，从而解决问题；或通过命题的转化，使其推导和判断符合数学思维规律。

4. 对象转化策略的应用

在应用对象转化策略解题的过程中，转化的对象可能是等价的，也可能是不等价的，在高中阶段数学解题过程中我们主要利用等价转化。等价转化指的是在研究和解决有关数学问题时，通过某种手段或技巧，把问题转变到一类已经解决或者比较容易解决的问题，进而解决问题的一种思路或方法[8]。等价转化的过程本质就是充分且必要过程，转化之后的结果与原问题的结果是等价的，边角转化、三角函数转化、语言转化、数形结合、构造法和几何问题代数化等都是高中数学中常用的等价转化策略。本节就以例题分析法来研究这几种常用的等价转化策略在数学解题中的应用。

例 1 记 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$。

若 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，求 B；(2) 求 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值。

分析 1： 问题(1)可以先考虑利用二倍角公式对条件 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$ 进行转化得到 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，进一步整理得到 $\sin B=\cos A\cos B-\sin A\sin B$，再利用两角差的余弦公式得到 $\sin B=\cos\left(A+B\right)=-\cos C=\dfrac{1}{2}$，根据条件 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $0<B<\dfrac{\pi}{2}$，得到 $B=\dfrac{\pi}{6}$。

分析 2： 问题(2)要求三角形三边关系的最值，而条件只给了三角形三角之间的关系，若要解决这个问题，首先应考虑利用正弦定理或余弦定理将题目中的三边之间的关系转化为三角之间的关系，再求最值，这就是对象转化策略中的一种等价转化。

由(1)可知 $\sin B=-\cos C>0$，即 $\dfrac{\pi}{2}<C<\pi$，$0<B<\dfrac{\pi}{2}$，

根据诱导公式 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$，得 $\sin B=-\cos C=\sin\left(C-\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $C=\dfrac{\pi}{2}+B$，即有 $A=\dfrac{\pi}{2}-2B$，

接下来根据正弦定理，将 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 转化为 $\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}$，

再将这个式子中的 A,C 进行代换得到 $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-2B\right)+\sin^2 B}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+B\right)}$，

整理得 $4\cos^2 B+\dfrac{2}{\cos^2 B}-5$，利用基本不等式求其最值，即

$$4\cos^2 B+\frac{2}{\cos^2 B}-5\ge 2\sqrt{4\cos^2 B\cdot\frac{2}{\cos^2 B}}-5=4\sqrt{2}-5,$$

综上，当且仅当 $\cos^2 B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得到 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-5$。

小结：解三角形问题是高考重点内容，考查方式也是多种多样。解三角形问题的基本思路是利用三角形的边角转化和三角函数转化。这两种思路中都包含着等价转化思想，因此，对象转化策略在解三角形问题时发挥着重要作用。例 1 中两个问题就是通过逐步的等价代换，将不熟悉的问题转化为熟悉的问题，体现对象转化策略在解题时的简单化、熟悉化特点。

例 2 若函数 $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}+a$ 有且仅有一个零点，求 a 的取值范围。

分析：这道题目所求问题是零点个数有几个而不是求零点具体值是多少，此时可以采用数形结合的转化方法，转化为求两个函数图像交点个数的问题。

令 $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}+a=0$，即 $-x-a=\sqrt{4-x^2}$，则原问题等价转化为 $y_1=-x-a$ 与 $y_2=\sqrt{4-x^2}$ 两个函数图像在区间 $[-2,2]$ 上只有一个交点。其中，$y_1=-x-a$ 表示一条直线，$y_2=\sqrt{4-x^2}$ 表示在 x 轴之上的半圆，画出图像(图 1)并观察。

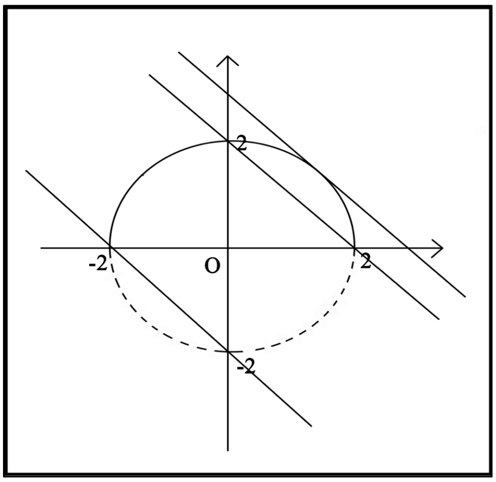

Figure 1. Function image
图 1. 函数图像

经过观察发现，斜率为−1 的直线与 $y_2=\sqrt{4-x^2}$ 这个半圆有一个交点分为两种情况：

直线过 $(-2,0)$ 与直线过 $(2,0)$ 这个区间内，当直线过 $(-2,0)$ 时，解得 $a=2$；当直线过 $(2,0)$ 时，解得 $a=-2$，根据图 1 我们知道直线过 $(2,0)$ 时与半圆有两个交点，不符合题意，因此，直线不能过 $(2,0)$，所以求出 a 的取值范围为 $(-2,2]$；

(2) 直线与半圆相切时，此时根据直线到圆心的距离等于 2，求出 $a=-2\sqrt{2}$。

综上，得到 a 的取值范围为 $(-2,2]$ 或 $a=-2\sqrt{2}$。

小结：例 2 采用的数形结合是对象转化策略中典型的 RIM 方法，即当一个代数问题不好求解时，可以建立数集与点集的对应，将代数问题转化为几何问题，采用几何体系的理论求出几何问题的解，再反演确定代数问题的解[9]。其原理如图 2 所示，体现出对象转化策略的简单化、直观化特点。

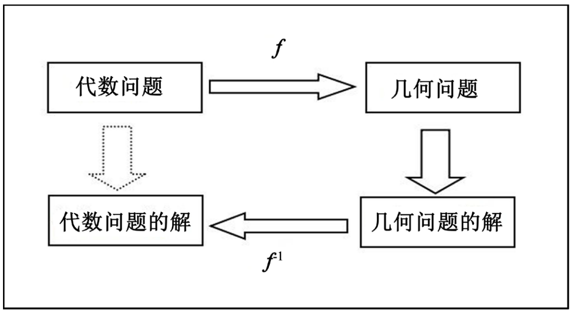

Figure 2. RIM 方法流程
图 2. RIM Methodology Flow

例 3 已知 $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 3a_n + n - 1$，求 a_n 的通项公式。

分析： 这是一个数列问题，观察题目条件：

$$\underbrace{\boxed{a_{n+1} = 3a_n}}_{\text{公比为 } 3} + \underbrace{\boxed{n-1}}_{\text{多出} n-1}$$

分析出 $a_{n+1} = 3a_n + n - 1$ 可以分解成两部分，前半部分可以看成公比为 3 的等比数列，后半部分多出一个 $n-1$ 的一次数列。

此时，可以做出这样的联想：构造一个数列 b_n 等于 a_n 加上一个一次数列将它变成一个公比为 3 的等比数列，即设 $b_n = a_n + \lambda_1 n + \lambda_2$ 为 $q = 3$ 的等比数列。由 $b_{n+1} = 3b_n$ 得到：$a_{n+1} + \lambda_1(n+1) + \lambda_2 = 3(a_n + \lambda_1 n + \lambda_2)$，整理得到：$a_{n+1} = 3a_n + 2\lambda_1 n + 2\lambda_2 - \lambda_1$。

再由待定系数法得到：

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 1; \\ 2\lambda_2 - \lambda_1 = -1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{2}; \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

由此，得到这样一个关系：

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{4}; \\ b_n = \dfrac{9}{4} \times 3^{n-1} = \dfrac{1}{4} \times 3^{n+1}. \end{cases}$$

综上，由 $a_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 3^{n+1}$ 得到 $a_n = \frac{1}{4} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$。

小结： 例 3 中所给的条件不是等比数列，因为后面多了一系列式子。通过观察后面的式子，想办法把所求的 a_n 与后面的一系列式子结合起来构造一个新的等比数列，以此来求出 a_n 的通项公式。这个新的数列为构造数列，这种方法为构造法。构造法也是对象转化策略中一种极为重要的方法，利用这种方法还可以构造函数、构造几何图像来解决其它相关数学问题。

例 4 设 $A=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2=4\right\}$， $B=\left\{(x,y)\middle|(x-3)^2+(y-4)^2=r^2\right\}$，其中 $r>0$，若 $A\cap B=\phi$，求 r 的取值范围。

分析：根据题目条件分析集合 A 表示的是以原点为圆心，以 2 为半径的一个圆，集合 B 表示的是以 $(3,4)$ 为圆心，以 r 为半径的一个圆，其中， $A\cap B=\phi$。整个题目翻译成自然语言等价于求当两个圆没有交点时圆的半径 r 的取值范围。两个圆无交点，则它们的位置关系是内含或者外离，即有以下两种情况：

1) 两圆外离，由圆心距大于半径之和得到 $\sqrt{3^2+4^2}>2+r\rightarrow 0<r<3$；

2) 两圆内含，由圆心距小于半径之差得到 $\sqrt{3^2+4^2}<|2-r|\rightarrow 7<r$。

综上，求得 r 的取值范围是 $(0,3)\cup(7,+\infty)$。

小结：例 4 采用的语言转化是高中数学解题过程中常用的转化策略之一，其原理为将复杂抽象的数学语言转化为简单易懂的自然语言，进而求出问题的解，体现对象转化的简单化、和谐化特点。除此以外，有些题目还可以通过几何符号、图形以及文字等转化，将普通的语言转化为数学语言来更好地解题。

例 5 如图 3，在 ΔABC 中， $AB=2\sqrt{3}$， $AC=4$， $AD=\sqrt{13}$，D 为线段 BC 中点，求 $\angle BAC$ 的大小。

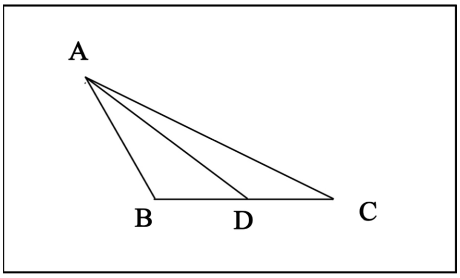

Figure 3. ΔABC 图像
图 3. ΔABC Images

分析：题目中只给出了三角形一些线段长度，让求角的大小，许多同学看到这些条件的第一反应会认为这是一道解三角形的题目。如果按照解三角形的方法去求解这道题目，首先需要考虑利用边角转化。题目中只给出了 AB、AC、AD 三边的长度，没有给任何一个角的大小，也没有一个完全知道三边的三角形，如果要采用边角转化就要去设角或设边然后列方程组求解，求解过程非常复杂。

此时，换个角度来思考这个问题。题目中给出 D 为线段 BC 中点，也就是说 AD 是 ΔABC 的中线，根据向量中的一个模型 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}=2\boldsymbol{AD}$，这个问题就转化为知道这三个向量的模，求 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{AC}$ 的夹角。现在只需要对这个等式两边同时平方，即 $(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC})^2=(2\boldsymbol{AD})^2$，整理之后得到

$$(\boldsymbol{AB})^2+2|\boldsymbol{AB}|\cdot|\boldsymbol{AC}|\cos\angle BAC+(\boldsymbol{AC})^2=4(\boldsymbol{AD})^2.$$

将 AB、AC、AD 三边的长度代入，即可求出 $\angle BAC$ 的大小。

小结：例 5 在求解时巧妙的利用向量方法来解决平面几何问题，将几何问题转化为代数问题，降低问题求解难度，这也是对象转化策略中的 RMI 方法。学生在解题过程中面对一些几何问题无从下手时，可以利用对象转化策略，将几何问题转化为代数问题来解决，即几何问题代数化。除平面解析几何外，三角函数、空间几何的元素在处理位置关系等内容中，几何问题代数化的解题方法也随处可见，这在很大程度上减少了综合几何问题在解题中的思辨性。

5. 结束语

事实上，解题的过程就是从题目的条件不断向解题目标变形、靠近的过程[10]。匈牙利数学家路莎 •彼

得曾说：“数学家们也往往不是对问题进行正面攻击，而是不断地将它变形，直到把它转化成能够得到解决的问题。”通过学习和研究对象转化策略，可以帮助学生从不同的角度去理解问题，找到问题的本质和关键点，将复杂的问题简化为更容易理解和解决的形式，拓展解题思路；鼓励学生从不同的角度去思考问题，寻找不同的解决方法，培养学生的创造力和问题解决能力。所以，学习、掌握对象转化策略是十分必要的，当学生理解、掌握这种对象转化策略后会由自在变为自觉，在处理问题时会主动、自觉的运用、调动各种方法与手段去贯彻、实现这种思想，解决问题。

参考文献

[1] 史耀芳. 二十世纪国内外学习策略研究概述[J]. 心理科学, 2001(5): 586-590.

[2] 胡忠光. 教育心理学[M]. 北京: 教育科学出版社, 2011.

[3] 教育部考试中心. 中国高考评价体系说明(2019 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.

[4] 李鹏. 新课程标准下的数学学习策略[J]. 江西教育科研, 2007(12): 105-106.

[5] 徐利治. 数学方法论选讲[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2000.

[6] 喻平. 学问题划归理论与方法[M]. 桂林: 广西师范大学出版社, 1999.

[7] 陈渭渭. 转化思想方法在高中数学解题中的应用初探[J]. 数学学习与研究, 2019(1): 126.

[8] 杨新运. 等价转化思想在高中数学解题中的应用[J]. 福建基础教育研究, 2017(10): 61-62, 65.

[9] 喻平. 数学教育心理学[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2018: 224.

[10] 谢全苗. 转化——数学解题的桥梁[J]. 数学通报, 2008,47(10): 33-37.