Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3470-3474
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312360

Hans汉斯

数学归纳法在特征多项式方法中的应用

马苏娜，韩欣利

南京邮电大学理学院，江苏 南京

收稿日期：2023年11月9日；录用日期：2023年12月11日；发布日期：2023年12月21日

摘 要

本文利用数学归纳法证明sturm序列的性质——特征多项式的根是单根且相邻两个特征多项式的零点相互隔离。用不同于教材中的方法证明该数值代数中的已知结论，有助于引导本科生探索不同的思考方式，培养发散性思维能力。

关键词

数学归纳法，特征多项式，应用

The Application of Mathematical Induction in the Method Based on the Characteristic Polynomials

Suna Ma, Xinli Han

College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing Jiangsu

Received: Nov. 9th, 2023; accepted: Dec. 11th, 2023; published: Dec. 21st, 2023

Abstract

This article uses mathematical induction to prove the property of sturm sequence that the zeros of the characteristic polynomials are simple and the zeros of two neighbouring characteristic polynomials are isolated from each other. Utilizing the method different from that in textbooks to prove this known conclusion in numerical algebra can help guide undergraduate students to explore different ways of thinking and cultivate divergent thinking abilities.

Keywords

Mathematical Induction, Characteristic Polynomials, Application

文章引用: 马苏娜, 韩欣利. 数学归纳法在特征多项式方法中的应用[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3470-3474.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312360

1. 引言

数学归纳法是数学解题中的一个重要工具，它是一种递推论证方法。论证的第一步是证明命题在 $n=1$ (或 n_0)时成立，这是递推的基础；第二步是假设在 $n=k$ 时命题成立，再证明 $n=k+1$ 时命题也成立。这两个步骤密切相关，缺一不可，完成了这两步就可以断定“对任何自然数 n (或 $n \ge n_0$ 且 $n \in N$)结论都正确”。数学归纳法在数学中有着广泛的应用，常用来证明与自然数 n 有关的恒等式、不等式、数列、几何、整除性、矩阵等命题。数值代数中，利用特征多项式方法求对称三对角矩阵特征值的二分法基于 sturm 序列的性质[1] [2]。sturm 序列 $\{P_i(\lambda)\}_{i=0}^{n}$ 其中一个性质是特征多项式 $P_i(\lambda)$ 的根是单根，且将多项式 $P_{i+1}(\lambda)$ 的根严格隔离，本文将利用数学归纳法证明该性质。

2. 预备知识

设 $n \times n$ 维实对称三对角矩阵

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & a_2 & & & \\ a_2 & b_2 & a_3 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & a_{n-1} & b_{n-1} & a_n \\ & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

其中 $a_i \ne 0 (i = 0,1,\cdots,n)$。矩阵 T 的特征值可通过求解特征方程 $\det(T - \lambda I) = 0$ 得到，其中 λ 为特征值，I 为 n 维单位矩阵。令

$$T_r = \begin{bmatrix} b_1 & a_2 & & & \\ a_2 & b_2 & a_3 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & a_{r-1} & b_{r-1} & a_r \\ & & a_r & b_r \end{bmatrix}.$$

定义 r 次多项式 $P_r(\lambda)$ 为

$$P_0(\lambda) = 1,$$
$$P_r(\lambda) = \det(T_r - \lambda I).$$

由此得到

$$P_1(\lambda) = b_1 - \lambda,$$
$$P_2(\lambda) = (b_2 - \lambda)(b_1 - \lambda) - a_2^2.$$

利用行列式展开简单计算可得如下递推关系：

$$P_i(\lambda) = (b_i - \lambda) P_{i-1}(\lambda) - a_i^2 P_{i-2}(\lambda),\ i = 2,3,\cdots,n.$$

多项式序列 $\{P_i(\lambda)\}_{i=0}^{n}$ 称为 sturm 序列。其具有如下四个性质：

1) $\operatorname{sgn}\left(P_i(-\infty)\right)=1$， $\operatorname{sgn}\left(P_i(+\infty)\right)=(-1)^i$；

2) 相邻多项式没有公共根；

3) 若 $P_i(\mu)=0$，则 $P_{i-1}(\mu)P_{i+1}(\mu)<0$；

4) 多项式 $P_i(\lambda)$ 只有实的单根，将多项式 $P_{i+1}(\lambda)$ 的根严格隔开。

3. 主要结果

下面我们用数学归纳法证明多项式 $P_i(\lambda)$ 的根是单根，且将多项式 $P_{i+1}(\lambda)$ 的根严格隔开。为证明的需要，我们引入以下引理，可参见文献[3]和文献[4]。

引理 考虑 $n\times n$ 维箭形实矩阵

$$H=\begin{bmatrix} D & z^{\mathrm{T}} \\ z & \alpha \end{bmatrix},$$

其中

$$z=\left(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\right)^{\mathrm{T}}, z_j\neq 0,\ j=1,2,\cdots,n-1,$$

$$D=diag\left(d_1,d_2,\cdots,d_{n-1}\right),\ d_1<d_2<\cdots<d_{n-1}.$$

假设矩阵 H 的特征值从小到大排列为 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$，则有

$$\lambda_1<d_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n-1}<d_{n-1}<\lambda_n.$$

定理 多项式 $P_i(\lambda), i=1,2,\cdots,n$ 的根是实的单根，且将多项式 $P_{i+1}(\lambda)$ 的根严格隔开。

证明 矩阵 T 是实的对称矩阵，故特征值均为实数。我们首先利用数学归纳法证明 $P_i(\lambda)$ 的根是单根。当 $n=1$ 时， $P_1(\lambda)=b_1-\lambda$ 的根显然是单根，当 $n=t-1$ 时，假设多项式 $P_{t-1}(\lambda)$ 的根是单根。考虑如下 t 阶矩阵

$$T_t=\begin{bmatrix} b_1 & a_2 & & & \\ a_2 & b_2 & a_3 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & a_{t-1} & b_{t-1} & a_t & \\ & & a_t & b_t & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_{t-1} & \hat{a}_t \\ \hat{a}_t^T & b_t \end{bmatrix}, t\le n,$$

其中 $\hat{a}_t=\left(0,\cdots,0,a_t\right)^{\mathrm{T}}\in R^{t-1}$.由于 T_{t-1} 是对称矩阵，因此存在正交分解

$$T_{t-1}U=UD, \tag{1}$$

其中 U 是正交矩阵， $D=diag\left(d_1,d_2,\cdots,d_{t-1}\right)$ 是对角矩阵。由归纳假设可知， d_i 之间两两不同，不妨设 $d_1<\cdots<d_{t-1}$.注意到 U 的第 i 列 $u_i=\left(u_{i,1},u_{i,2},\cdots,u_{i,t-1}\right)^{\mathrm{T}}$ 是 T_{t-1} 的特征值 d_i 对应的的特征向量，即

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_2 & & & \\ a_2 & b_2 & a_3 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & a_{t-2} & b_{t-2} & a_{t-1} & \\ & & a_{t-1} & b_{t-1} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ \vdots \\ u_{i,t-2} \\ u_{i,t-1} \end{bmatrix}=d_i\begin{bmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ \vdots \\ u_{i,t-2} \\ u_{i,t-1} \end{bmatrix},\ i=1,2,\cdots,t-1,$$

由此可得

$$a_{t-1}u_{i,t-2}+b_{t-1}u_{i,t-1}=d_iu_{i,t-1}.$$

若 $u_{i,t-1}=0$，因为 $a_i\neq 0\ (i=2,3,\cdots,n)$，故只有 $u_{i,t-2}=0$。依次类推可得特征向量 $u_i=0$，这与特征向

量不为零向量相矛盾，因此 $u_{i,t-1} \neq 0, i=1,2,\cdots,t-1$，即矩阵 U 的最后一行元素均非零。由分解(1)可把 T_t 表示为如下形式，

$$T_t = \begin{bmatrix} U & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & U^{\mathrm{T}}\hat{a}_t \\ \hat{a}_t^{\mathrm{T}}U & b_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{\mathrm{T}} & \\ & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

因为向量 $\hat{a}_t^{\mathrm{T}}U = \left(a_t u_{1,t-1}, a_t u_{2,t-1}, \cdots, a_t u_{t-1,t-1}\right)$ 的元素均非零，且矩阵 $D = diag\left(d_1, d_2, \cdots, d_{t-1}\right)$ 的对角元素 $d_1 < \cdots < d_{t-1}$，因此可利用引理得到 T_t 的 t 个特征值 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_t$ 满足
$\lambda_1 < d_1 < \lambda_2 < d_2 < \cdots < \lambda_{n-1} < d_{n-1} < \lambda_n$，即矩阵 T_t 无重特征根。根据数学归纳法，$P_i(\lambda), i=1,2,\cdots,n$ 的根是实的单根。

接下来我们利用数学归纳法证明 $P_i(\lambda)$ 的根将 $P_{i+1}(\lambda)$ 的根严格隔开。当 $i=1$ 时，$P_1(\lambda)$ 的根是 b_1。根据引理的内容，二阶矩阵 $T_2 = \begin{bmatrix} b_1 & a_2 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ 的两个特征值 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \le \lambda_2)$ 必定满足 $\lambda_1 < b_1 < \lambda_2$，即 $P_1(\lambda)$ 的根把 $P_2(\lambda)$ 的根隔开。假设多项式 $P_{t-1}(\lambda)$ 的根将 $P_t(\lambda)$ 的根严格隔开，记 $P_t(\lambda)$ 的 t 个根为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_t$。由归纳假设可得，$P_t(\lambda)$ 的根被 $P_{t-1}(\lambda)$ 的 $t-1$ 的根 $d_1 < d_2 < \cdots < d_{t-1}$ 严格隔开，即

$$\lambda_1 < d_1 < \lambda_2 < d_2 \cdots < d_{t-1} < \lambda_t.$$

我们需要证明 $P_t(\lambda)$ 的根将 $P_{t+1}(\lambda)$ 的根严格隔开。由于 T_t 是对称矩阵，因此存在正交分解 $T_t V = V D_1$，其中 V 是正交矩阵，$D_1 = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t\right)$ 是对角矩阵。利用此分解可将 T_{t+1} 表示为如下形式，

$$T_{t+1} = \begin{bmatrix} V & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & V^{\mathrm{T}}\tilde{a}_t \\ \tilde{a}_t^{\mathrm{T}}V & b_{t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{\mathrm{T}} & \\ & 1 \end{bmatrix},$$

其中 $\tilde{a}_t = \left(0, \cdots, 0, a_t\right)^{\mathrm{T}} \in R^t$。利用和分解(2)类似的证明方法可得矩阵 V 的最后一行元素均非零，则向量 $\tilde{a}_t^{\mathrm{T}}V$ 的元素均非零.当 T_{t+1} 的 $t+1$ 个特征值有大小关系 $\rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_{t+1}$ 时，可利用以上引理得到

$$\rho_1 < \lambda_1 < \rho_2 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_t < \rho_{t+1}.$$

由数学归纳法得到 $P_i(\lambda)$ 的根将 $P_{i+1}(\lambda)$ 的根严格隔开。

4. 结束语

数学的发散性思维是数学素养的体现，更是逻辑思维能力的展现，良好的数学发散性思维对于学生的学习来说事半功倍。因此，培养学生的数学发散性思维可以提高其对数学学习的兴趣，提高教学质量。

致　谢

在此对国家科学基金的资助以及给予我帮助的所有人表示衷心感谢！

基金项目

1) 国家青年基金(No. 12101325)。
2) 南京邮电大学教学改革研究项目(No. JG00722JX29)。

参考文献

[1] Gene, H.G. and Loan, V.C.F. (2013) Matrix Computations. 4th Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

[2] 佩捷，冯贝叶，王鸿飞. Sturm 定理[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社, 2018.

[3] Wilkinson, J.H. (1965) The Algebraic Eigenvalue Problem. Clarendon Press, Oxford.

[4] O'leary, D.P and Stewart, G.W. (1990) Computing the Eigenvalues and Eigenvectors of Symmetric Arrowhead Matrices. *Journal of Computational Physics*, **90**, 497-505.