

区间图Total-罗马控制性质研究

周星利, 刘童, 李鹏

重庆理工大学理学院, 重庆

收稿日期: 2023年11月11日; 录用日期: 2023年12月12日; 发布日期: 2023年12月22日

摘要

Total-罗马控制函数是函数 $f:V(G)\rightarrow\{0,1,2\}$, 满足条件: 1) 对 G 中任意函数值 $f(u)=0$ 的顶点 u , 至少存在一个邻居 v 使得函数值 $f(v)=2$; 2) 由控制集 $\{k|f(k)\geq 1 \text{ 且 } k\in V(G)\}$ 诱导的子图没有孤立点存在。结合3阶及以上区间图, 本文主要探索了基于total-罗马对的定理, 研究了团和路径的不同结合图类中total-罗马控制数等内容, 以示例辅助理解, 证明了任意阶团的total-罗马控制数为3、相交团的并的total-罗马控制数不超过4等性质。

关键词

区间图, Total-罗马控制函数, 团, 路径

Total-Roman Domination Property on Interval Graphs

Xingli Zhou, Tong Liu, Peng Li

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Nov. 11th, 2023; accepted: Dec. 12th, 2023; published: Dec. 22nd, 2023

Abstract

Total-Roman Domination Function is the function $f:V(G)\rightarrow\{0,1,2\}$, which satisfies the following two conditions: 1) for any vertex u with $f(u)=0$, there is at least one neighbor v with $f(v)=2$; 2) No outliers exist for a subgraph induced by a control set $\{k|f(k)\geq 1 \text{ and } k\in V(G)\}$. Combined with interval graphs of order 3 and above, this paper mainly explores the Total-Roman control number based on the theorem of Total-Roman pairs, studies the Total-Roman control number of different associative graph classes of groups and paths, and proves that the to-

tal-Roman control number of any order group is 3, and the Total-Roman control number of union of intersecting groups is not more than 4 and other properties.

Keywords

Interval Graph, Total-Roman Domination Function, Clique, Path

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

区间图(Interval Graph)是对应到数轴上满足特定关系、以一组区间为表现形式的相交图,称数轴上的区间为区间表示。若各区间长度一致,则称该区间图为单位区间图[1]。区间图在电路设计、物流调度与网络管理问题等方面有重要运用,是图论研究中的热点图类之一[2]。

控制函数旨在搜索查找出一个顶点集 S ,使得图中该集合外的顶点至少与 S 中的一个顶点相邻。罗马控制函数(Roman Domination Function, RDF)将图的顶点集赋值为 0、1、2,要求函数值为 0 的顶点至少要拥有一个函数值为 2 的邻居。在此基础上,total-罗马控制函数(Total Roman Domination Function, TRDF)增加了条件,即要求搜索查找出的顶点集 S 的诱导子图中没有孤立点存在[3]。

1999年,Stewart [4]在《Scientific American》杂志上发表的《Defend the Roman Empire》一文中首次提出了包围罗马帝国的军队调控策略,通过调动各城市内驻扎的军队,保护罗马帝国免受外界多次攻击。自此,罗马控制问题引起广泛关注。2003年,Michael及其团队在《Discrete Mathematics》上接连发表了《Defending the Roman Empire from multiple attacks》《Defending the Roman Empire-A new strategy》等文章,研究保护罗马帝国的新型防守策略,推动罗马控制问题走向研究热潮[5][6]。随时间发展,罗马控制问题得到变形,如双罗马控制、完全罗马控制和total罗马控制。total-罗马控制作为衍生问题之一,要求制定出特殊方案使得以下两个条件成立:①在某座城市没有军队驻守的情况下,该城市的某一座邻居城市中一定驻守着两支军队,可使在危难来临前,邻居城市中的军队可分派一支前往保护该城市;②拥有军队驻守的城市之间存在联系,即没有孤立的城市存在。2008年,Mathieu Liedloff等人研究了罗马控制在图类上的运用,表明区间图上的罗马控制数可用在线性时间内计算出来,证明存在多项式时间算法可用于计算无AT-图以及带有d-octopus的图的罗马支配数[7]。在2009年前,罗马控制函数及其变形如弱罗马控制函数等问题经常处于热点研究状态[8][9][10][11]。2013年,Liu和Chang介绍了图中total-罗马控制函数的概念[12]。在[13][14]中,作者对total-罗马控制函数继续进行研究,推动了total-罗马控制及罗马控制问题的发展。2018年,杨洪等人研究了区间图上的罗马控制,设计出求解罗马控制数的动态规划算法[15]。同年,Jafar Anjadi等人研究了total-罗马控制上的Nordhaus-Gaddum不等式,将total-罗马控制数与补图、图中所有顶点之间的最小度联系起来,得出系列不等式关系[16]。2020年,Jafar Amjadi继续给出total-罗马控制方面的钻研成果,开始了关于total-罗马控制在图中细分数的研究[17]。经常与其他控制相结合,total-罗马控制的研究前途广泛,未来还可应用于不同图类。

如下图1所示,本文主要从两个方面来刻画total-罗马控制函数。首先在文章第2节,介绍区间图、total-罗马控制函数等基础知识;在第3节介绍total-罗马对,以此为第一方面对total-罗马控制函数所具

备的性质进行刻画,证明相关定理的正确性;在第4节介绍区间图中关于团、路径、团与团的并、团与路径的并等图的 total-罗马控制数,是本文在第二方面的刻画;第5节,总结全文。

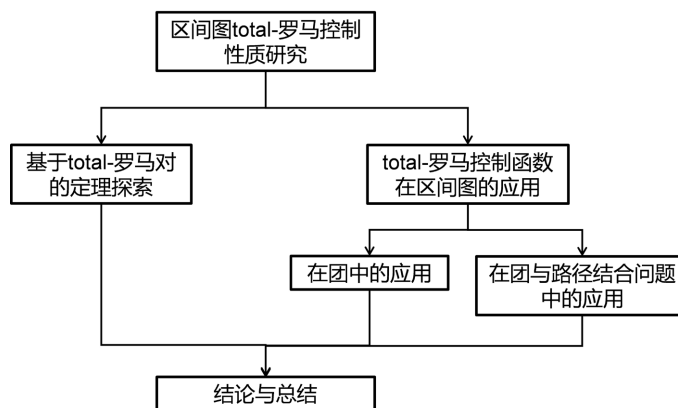


Figure 1. Frame of this paper
图 1. 文章框架

2. 符号和预备知识

图(Graph)是由点、边以及各点之间存在的邻接关系所构成的三元组,用符号表示为 $G=(V(G),E(G))$,其中 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集。若一个图拥有 n 个顶点,则称 $|V(G)|=n$ 为图的阶数,称该图为 n -顶点图。区间图(Interval Graph)是对应到数轴上满足特定相交关系的图类,图中顶点与数轴上的区间一一对应。本文研究简单、无向且有限的区间图,即图中不含重边与圈、边上没有方向以及图的边集与顶点集中元素有限。

在图 G 中,对于顶点集中任意两个顶点 u, v ,若 $uv \in E(G)$,则称 u, v 互为邻居,也称此两点满足邻接关系。用 $N(u)=\{v|uv \in E(G)\}$ 表示任意顶点 u 的开邻域、 $N[u]=N(u) \cup \{u\}$ 表示其对应闭邻域。对于任意两个满足 $A \subseteq B$ 的顶点集 A, B ,用 $B-A$ 表示从集合 B 中删去 A 中所有元素,也写作 $B \setminus A$ 。若 A 是单元素集,不妨设 $A=\{u\}$,则 $B-A=B-\{u\}$,也即是 $B-u$ 。对于任意顶点集 $S \subseteq V(G)$,其诱导子图 $G[S]$ 保留了 S 中所有点及各点在图 G 中所对应的边,也是一个图。

团(Clique)是指任意两个顶点之间都存在邻接关系的图。路径(Path)具有顺序,设 n 阶路径 $P=(u_1, u_2, \dots, u_n)$,称第一个顶点 u_1 、最后一个顶点 u_n 分别为 P 的左、右端点,其中 $n \in \mathbb{N}_+$ 。设存在任意正整数 s, t 使得 $P_1=(u_1, u_2, \dots, u_s)$ 与 $P_2=(v_1, v_2, \dots, v_t)$ 是两条顶点集互不相交的路径,这两条路径按照不同顺序首尾相连后,分别可以表示为两条新路径,即 $P'=P_1+P_2=(u_1, u_2, \dots, u_s, v_1, v_2, \dots, v_t)$ 、 $P''=P_2+P_1=(v_1, v_2, \dots, v_t, u_1, u_2, \dots, u_s)$ 。特别地,若路径是单元素路径,不妨设 $P_1=(u)$,则两条路径相加可表示为 $P'=P_1+P_2=(u, v_1, v_2, \dots, v_t)$ 、 $P''=P_2+P_1=(v_1, v_2, \dots, v_t, u)$ 。

定义 1 区间图与区间表示一一对应,区间表示由区间构成。区间具有长度,分别记区间 $I(a)$ 的左、右端点值为 $l_{I(a)}$ 和 $r_{I(a)}$ 。给定一个图 $G=(V(G),E(G))$,若存在一组区间 $I=\{I(x):x \in V(G)\}$ 满足关系:对任意顶点 $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$ 当且仅当 $I(u) \cap I(v) \neq \emptyset$,则称该图 G 为区间图,称 I 为 G 的区间表示[18]。

在区间表示 I 上,对于任意区间 $I(a), I(b)$ 满足 $I(a) \cap I(b) = \emptyset$,记 $I(a) < I(b)$ 表示区间 $I(a)$ 先于区间 $I(b)$ 出现且 $r_{I(a)} < l_{I(b)}$ 。对于区间 $I(a)$ 与顶点集 S 满足 $I(a) \cap I(S) = \emptyset$,记 $I(a) < I(S)$ 表示区间 $I(a)$ 先于集合 S 中任意区间出现,即 $r_{I(a)} < \min\{l_{I(c)} | c \in S\}$ 。

定义 2 n -顶点区间图 G 的右端点序列 $\pi = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 是指各顶点在区间表示 I 中按右端点按序列重新排序的结果, 满足: 对任意顶点 i, j , $r_{I(i)} < r_{I(j)}$ 当且仅当 $i < j$ 。注意, 若无特别说明, 本文中的区间排序统一为右端点排序。如下图 2 所示, 左图为 7-顶点区间图, 右图为对顶点进行右端点排序后的结果, 其中, $\pi = (v_6, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1, v_7)$ 。

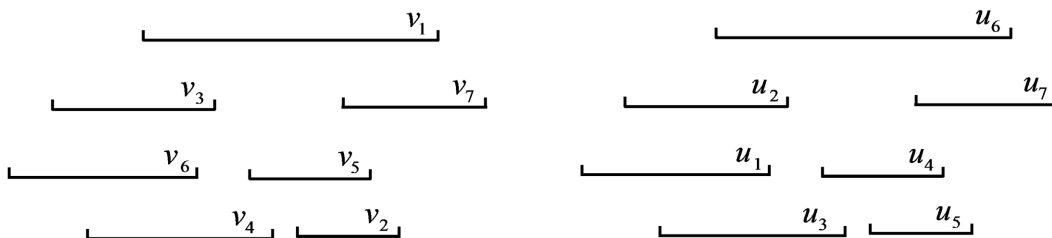


Figure 2. Example: an interval graph (left) and the graph sorted by right endpoint sequence (right)
图 2. 示例: 区间图(左)和该图按右端点序列排序后的图(右)

定义 3 给定任意图 G , 如果集合 $S \subseteq V(G)$ 满足对任意顶点 $u \in V(G) \setminus S$ 都存在另一个顶点 $v \in S$ 使得 $uv \in E(G)$, 那么称 S 是 G 的一个控制集。 G 的控制数用 $\gamma(G) = |S'|$ 表示, 其中 S' 是 G 所有控制集中阶数最小的集合。在控制集基础上, total-控制函数(Total Domination Function, TDF)要求由控制集诱导的图中无孤立点存在, 其控制数用 $\gamma_t(G)$ 表示; 罗马控制函数(Roman Domination Function, RDF)是函数 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$, 满足: 对 G 中任意函数值 $f(u) = 0$ 的顶点 u , 至少存在一个邻居 v 使得函数值 $f(v) = 2$ 。罗马控制函数也可表示为 $f = f(V_0, V_1, V_2)$, 其中 $V_i = \{a \mid f(a) = i \text{ 且 } a \in V(G)\}$ 。该图 G 中的罗马控制数表示为罗马控制函数的权值最小值, 符号记作 $\gamma_R(G)$ 。

定义 4 给定图 G , total-罗马控制函数(Total Roman Domination Function, TRDF)是函数 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$, 满足条件: (1) 对 G 中任意函数值 $f(u) = 0$ 的顶点 u , 至少存在一个邻居 v 使得函数值 $f(v) = 2$; (2) 由控制集 $\{k \mid f(k) \geq 1 \text{ 且 } k \in V(G)\}$ 诱导的子图没有孤立点存在。total-罗马控制数表示为 $\gamma_{tR}(G)$, 称 total- (V_1, V_2) 为图 G 的 total-罗马对, 简写为 $t-(V_1, V_2)$ 形式[4]。如下图 3 所示, 在 7 阶区间图 G 中, 存在 total-罗马控制函数 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$, 此时控制数 $\gamma_{tR}(G) = 5$, 控制集 $\{u_3, u_4, u_6\}$ 中无孤立点存在, total-罗马对表现为 $t-(\{u_4\}, \{u_3, u_6\})$ 。

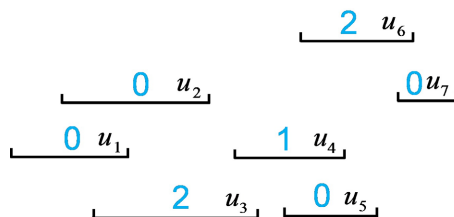


Figure 3. An interval graph G with a total-Roman Domination Function
图 3. 区间图 G 及其 total-罗马控制函数

3. 基于 Total-罗马对的定理研究

定义 5 已知 $I = \{I(x) : x \in V(G)\}$ 是区间图的区间表示, 对任意 $a, b \in V_2$, 记 $l_{I(b)} < l_{I(a)} < r_{I(a)} < r_{I(b)}$ 表示区间 $I(a)$ 完全包含于 $I(b)$, 写作 $I(a) \subseteq I(b)$, 也称 $I(b)$ 完全包含 $I(a)$ [18]。

定理 1 若 $t-(V_1, V_2)$ 是区间图 G 的 total-罗马对, 那么 $I(V_2)$ 中的区间不能完全包含于 $I(V_2)$ 中的另一

个区间, 即由 V_2 诱导的子图是严格区间图。

证明 反证法, 设存在两个顶点 $a, b \in V_2$ 使得区间 $I(a)$ 完全包含于 $I(b)$ 。结合区间图按右端点序列进行排序可知 $a < b$, 因此 $N[a] \subseteq N[b]$ 成立, 故 $t - (V_1, V_2 - a)$ 也是区间图 G 的一个 total-罗马对, 与 $t - (V_1, V_2)$ 是 G 的 total-罗马对矛盾。因此, $I(V_2)$ 中的区间不能被完全包含于另外一个区间中。

定理 2 若 $t - (V_1, V_2)$ 是 n 阶区间图 G 的 total-罗马对, 那么 $G[V_2]$ 中不会包含 $n' (n' \geq 3)$ 阶团。

证明 反证法。当 $n' = 3$ 时, 设 $S = \{a, b, c\}$ 是一个 3 阶团。由定理 1 可知, $I(V_2)$ 中的区间不存在包含与被包含的关系, 故设 $I(S)$ 中 3 个区间的端点值在数轴上满足 $l_{I(b)} < l_{I(a)} < l_{I(c)} < r_{I(c)} < r_{I(b)} < r_{I(a)}$, 因此 $N[b] \subseteq (N[a] \cup N[c])$, 这表明区间 $I(b)$ 能控制的区间(包含 $I(b)$ 在内)都可被区间 $I(a)$ 与 $I(c)$ 控制, 即 $t - (V_1, V_2 - b)$ 也是该区间图 G 的一个 total-罗马对, 与已知条件矛盾, 故 $G[V_2]$ 中不含 3 阶团。

同理, 当 $n' \geq 4$ 时, 设 $S' = \{u_1, u_2, \dots, u_{n'}\}$ 是 n' 阶团。由定理 1 可设个顶点对应的区间端点值满足关系 $l_{I(u_1)} < l_{I(u_2)} < \dots < l_{I(u_{n'})} < r_{I(u_2)} < \dots < r_{I(u_2)} < r_{I(u_1)}$ 。使用数学归纳法进行演算, 可得到关系 $(N[u_2] \cup N[u_3] \cup \dots \cup N[u_{n'-1}]) \subseteq (N[u_1] \cup N[u_{n'}])$, 这表明区间 $I(u_1)$ 与 $I(u_{n'})$ 能控制 S' 中其余区间控制的所有区间(包含这些区间在内), 即 $t - (V_1, V_2 - \{u_2, u_3, \dots, u_{n'-1}\})$ 也是该区间图 G 的一个 total-罗马对, 与已知条件矛盾, 故中不含阶团。

综上, V_2 中不含 $n' (n' \geq 4)$ 阶团。

定理 3 如果 $t - (V_1, V_2)$ 是 n 阶区间图 G 的 total-罗马对, 那么由 V_2 诱导的各连通分量表现为路径, 且每条路径阶数大于等于 2。

证明 由于区间图 G 没有孤立点, 由定理 1 可知, 由 V_2 诱导的每个连通分量都是一个严格区间图, 因此, 这些严格区间图不含爪形图 $K_{1,3}$ 。结合定理 4.2 可知, 由 V_2 诱导的各连通分量表现为路径。若存在一条路径的阶数为 1, 那么这条路径只包含 1 个顶点, 与 total-罗马控制关于控制集的定义矛盾, 故定理 3 成立。

另, 若这些严格区间图是弦图(弦图中长度超过 3 的每个圈中都包含一条弦), 那么图中一定包含的最小圈为 C_3 , 因 C_3 是 3 阶团, 与定理 2 矛盾, 故这些严格区间图不含弦图。

4. 区间图 total-罗马控制数

4.1. 区间图中关于团的 total-罗马控制数

定理 4 任意 n 阶区间图 G 按右端点序列排序后满足以下:

若 G 为团且 $n (n \geq 3)$, 那么 $\gamma_{IR}(G) = 3$ 。

若 $G \setminus u_n$ 为团且 $n (n \geq 4)$, 那么 $\gamma_{IR}(G) = 3$ 。

若 G 为 $n (n \geq 3)$ 阶团, 任意添加区间 $I(u_a)$ 后, $\gamma_{IR}(G) = 3$ 。

证明 (1) 设区间右端点序列为 $\pi = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n)$ 。若 G 为团, 那么任意两个区间之间都存在相邻关系, 即对任意区间 $I(u_k)$ 总存在另一个区间 $I(u_{k'})$ 使得 $I(u_k) \subseteq I(u_{k'})$, 其中 $k \in [n-1]$ 。因此, 上述所有区间均满足 $I(u_k) \subseteq I(u_n)$ 。同理可知, G 的区间相互包含, 不妨设存在 $t - (\{u_{n-1}\}, \{u_n\})$ 是图 G 的一个 total-罗马对, 因此 $\gamma_{IR}(G) = 3$ 。

(2) 若 $G \setminus u_n$ 为团, 结合(1)中可知在 3 阶团 $G \setminus u_n$ 中, 对任意 $k'' \in [n-2]$ 知区间 $I(u_{k''})$ 都满足 $I(u_{k''}) \subseteq I(u_{n-1})$, 设 $t - (\{u_{n-2}\}, \{u_{n-1}\})$ 是图 $G \setminus u_n$ 的一个 total-罗马对。

图 G 无孤立点, 故一定存在顶点 u_i 使得 $u_i u_n \in E(G)$, 要么 $u_i = u_{n-1}$, 顶点 u_n 可被顶点 u_i 直接控制, 要么 $u_i u_{n-1} \in E(G)$, 故 $u_i u_{n-1} \in E(G)$, 顶点 u_n 也可被顶点 u_i 控制。因此, $t - (\{u_{n-2}\}, \{u_{n-1}\})$ 不仅是图 $G \setminus u_n$ 的一个 total-罗马对, 同时也是图 G 的一个 total-罗马对, $\gamma_{IR}(G) = 3$ 。

(3) 已知 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶团, 若 $r_{I(n)} < r_{I(a)}$, 添加的区间 $I(u_a)$ 右端点值最大, 可能出现的情况共有 n 种, 即 $u_k u_a \in E(G)$, 其中 $k=1, 2, \dots, n$ 。当 $k=1$ 时, $I(u_a)$ 与 $I(u_1)$ 相交, 此时 $G \cup u_a$ 为 $n+1$ 阶团, 由前述定理 4 中(2)可知, $\gamma_{IR}(G)=3$, 此时的 total-罗马对是 $t - (\{u_{n-1}\}, \{u_n\})$ 。为更好将新添加区间 $I(u_a)$ 纳入考虑, 根据题意可知 $t - (\{u_a\}, \{u_n\})$ 也是满足情况的 total-罗马对。当 $k \geq 2$ 时, 考虑 $I(u_a)$ 与其他区间相交。因 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶团, 故将 $I(u_a)$ 赋值为 2 后, 可控制 G 内其他所有区间, 因此 $G \setminus u_n$ 中区间赋值为 0, 另将 $I(u_a)$ 赋值为 1, 故存在 $t - (\{u_a\}, \{u_n\})$ 是图 $G \cup u_a$ 的一个 total-罗马对, 此时, $\gamma_{IR}(G)=3$ 。综上, 无论新添加区间 $I(u_a)$ 所处何种位置, 都存在 $t - (\{u_a\}, \{u_n\})$ 是图 $G \cup u_a$ 的一个 total-罗马对, 因此 total-罗马控制数 $\gamma_{IR}(G)=3$ 。

定理 5 若区间图 G 中两个不相交的团 G_1, G_2 分别与 G 中区间 $I(u_a)$ 相交, 那么 $\gamma_{IR}(G_1 \cup u_a \cup G_2) \leq 5$ 。

证明 设区间图 G 按右端点序列排序, s 阶团 G_1, t 阶团 G_2 区间不相交, 分别对应区间表示 I_1, I_2 , 存在一个区间 $I(u_a)$ 分别与两个团相交, 设 $u_k \in N(u_a) \cap V(G_1), u_{k'} \in N(u_a) \cap V(G_2)$ 。添加新区间 $I(u_{a'}) \subseteq I(u_a)$ 且与 $I(u_a)$ 具有相同相交关系。根据定理 4, 对于图 $G_1 \cup u_a$, 存在 $t - (\{u_a\}, \{u_k\})$ 是一个 total-罗马对。同理, 对于图 $u_a \cup G_2$, 存在 $t - (\{u_a\}, \{u_{k'}\})$ 是 $u_a \cup G_2$ 的一个 total-罗马对, 因此, total-罗马控制数满足关系 $\gamma_{IR}(G_1 \cup u_a \cup u_{a'} \cup G_2) \leq 3+3=6$ 。由于 $I(u_{a'})$ 与 $I(u_a)$ 具有相同的控制性, 因此删去 $I(u_{a'})$ 后, $I(u_a)$ 的存在仍能保持图中的控制性, 故 $\gamma_{IR}(G_1 \cup u_a \cup G_2) \leq 5$, 并且在 $\gamma_{IR}(G_1 \cup u_a \cup G_2)=5$ 时, 存在 $t - (\{u_a\}, \{u_k, u_{k'}\})$ 是图 $G_1 \cup u_a \cup G_2$ 的一个 total-罗马对。

如下图 4 所示, 10 阶区间图 G 按右端点序列排序, G_1, G_2 分别是 4 阶、5 阶团且区间不相交, 其中 $V(G_1) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, V(G_2) = \{u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}, u_a = u_5$, 根据上述定理, 取 u_5 赋值为 1, 任取顶点 $u_k \in N(u_5) \cap V(G_1) = \{u_3, u_4\}$ 与顶点 $u_{k'} \in N(u_5) \cap V(G_2) = \{u_6, u_7, u_8, u_9\}$ 赋值为 2, 此时, total-罗马控制数满足关系 $\gamma_{IR}(G_1 \cup u_a \cup G_2) = \gamma_{IR}(G) = 5$ 。

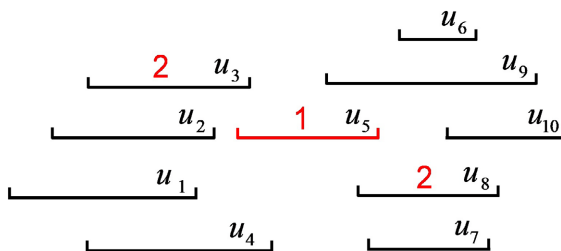


Figure 4. Example: an interval graph with 10 intervals G
图 4. 示例: 10 阶区间图 G

4.2. 区间图中关于团和路径的 Total-罗马控制数

引理 1 n 阶图 G 是圈或路径 $\Leftrightarrow \gamma_{IR}(G) = n$ [17]。

设 f 为对应的 total-罗马控制函数, 顶点集 $V_i = \{u_x \mid f(x) = i\}$, 通过引理 1 可以得到 $|V_0| = |V_2|$ 。在后文引用引理 1 时, 不妨设 $|V_0| = |V_2| = 0$, 即图 G 中的顶点全部赋值为 1。

定理 6 若区间图 G 中 s 阶团 H 与 G 中 t 阶路径 P 的端点相交, 那么 $\gamma_{IR}(H \cup P) \leq 2+t$, 其中正整数 $s \geq 3, t \geq 1$ 。

证明 由已知设区间图 G 的区间表示为 I 、顶点集 $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}, V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ 。若团 H 中的区间只与路径 P 的一个端点区间相交, 那么易知这个端点为 v_1 。添加新区间 $I(v'_1) \subseteq I(v_1)$ 且与 $I(v_1)$ 具有相同的相交关系。对于图 $H \cup v'_1$, 由定理 4 可知存在 $u_k \in N(v'_1) \cap V(H)$ 使得 $t - (\{v'_1\}, \{u_k\})$ 是图 $H \cup v'_1$ 的一个 total-罗马对, 此时 $\gamma_{IR}(H \cup v'_1) = 3$ 。对于路径 P , 由引理 1 可知 $\gamma_{IR}(P) = t$ 。结合定理 5 证明中的

思想易知 $\gamma_{ir}(H \cup P) \leq 3+t-1$, 故 $\gamma_{ir}(H \cup P) \leq 2+t$, 并且在 $\gamma_{ir}(H \cup P) = 2+t$ 时, 存在 $t - (V(P), \{u_k\})$ 是图 $H \cup P$ 的一个 total-罗马对。

若 H 中的区间与 P 的包含端点区间 $I(v_1)$ 在内的多个区间相交, 那么存在正整数 $k(2 \leq k \leq t)$ 使得 $r_{I(u_s)} > l_{I(v_k)}$, 即区间 $I(u_s)$ 的右端点值大于路径 P 中前 k 个区间的左端点值, 因此将区间 $I(u_s)$ 赋值为 2 后, 路径 P 中存在 k 个区间被 $I(u_s)$ 控制, 为了保证图 $H \cup P$ 的 total 性质, 只能将 P 中 $k-1$ 个区间赋值为 0, 故图 $H \cup P$ 的 total-罗马控制数 $\gamma_{ir}(H \cup P) \leq 2+t - (k-1) = t-k+3$ 。特别地, 这种控制函数的寻找方法同样适用于团 H 中的区间只与路径 P 的一个端点区间相交的情况。

如下图 5 所示, 区间图 G 阶数为 8, $V(H) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 、 $V(P) = \{u_5, u_6, u_7, u_8\}$ 、 $N(u_5) = \{u_2, u_3, u_4\}$ 、 $t=4$ 、 $k=2$, $\gamma_{ir}(H \cup P) \leq 4-2+3=5$, 取等时, 将 H 中右端点值最大的区间赋值为 2、将路径 P 中第 k 个及之后的区间赋值为 1, 所得控制集即为该图 G 的 total-罗马控制集。

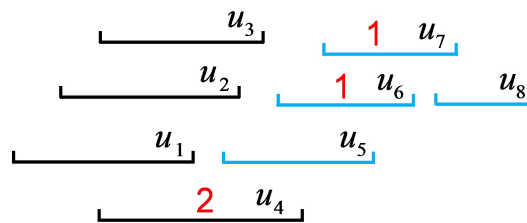


Figure 5. Example: an interval graph with 8 intervals
图 5. 示例: 8 阶区间图 G

定理 7 区间图 G 中两个团 G_1 、 G_2 相交, 团的并图满足 $\gamma_{ir}(G_1 \cup G_2) \leq 4$ 。

证明 设区间图 G 的区间表示为 I 。 G 有 G_1 、 G_2 两个满足区间相交关系的团, 分别对应区间表示 I_1 、 I_2 , 团内按右端点序列排序, 故对任意正整数 $s, t \geq 3$, 设 $V(G_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ 、 $V(G_2) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ 。易知 $I(u_s)$ 是 I_1 中右端点值最大的区间, 且可控制 I_1 中其他所有区间。由于两个团中区间存在相交关系, 不妨设 $I(u_s) \cap I(v) \neq \emptyset$, 即 $u_s v \in E(G)$, 其中 $v \in V(G_2)$ 。

若 $l_{I(v)} \leq r_{I(u_1)}$, 即 $I(u_1) \cap I(v) \neq \emptyset$, 故区间 $I(v)$ 与 I_1 中的每个区间都相交, $I(v)$ 可控制 I_1 中所有区间。由定理 4 可知 G_2 中存在 $t - (V_1, V_2)$ 使得 $\gamma_{ir}(G_2) = 3$, 不妨设 $V_1 = \{v'\}$, $V_2 = \{v\}$, 其中 $v'v \in E(G_2)$ 。那么 $t - (\{v'\}, \{v\})$ 也即是图 $G_1 \cup G_2$ 的 total-罗马对, 此时 $\gamma_{ir}(G_1 \cup G_2) = 3$ 。如下图 6 左所示, 3-团与 4-团对应的区间表示 I_1 、 I_2 已用不同颜色进行标注。同理, 若 $r_{I(v_i)} \leq r_{I(u_s)}$, 即区间 $I(u_s)$ 与 I_2 中的每个区间都相交, 那么存在 $t - (\{u_{s-1}\}, \{u_s\})$ 使得 $\gamma_{ir}(G_1 \cup G_2) = 3$ 。如下图 6 右所示, 在保证区间相交关系不变的情况下, 可适当伸缩区间长度。

在其他情况下, 易知 $I(u_s)$ 、 $I(v)$ 分别可以控制 I_1 、 I_2 中其他所有区间, 由于 $u_s v \in E(G)$, 故存在 $t - (\emptyset, \{u_s, v\})$ 是图 $G_1 \cup G_2$ 的一个 total-罗马对, 此时 total-罗马控制数 $\gamma_{ir}(G_1 \cup G_2) = 4$ 。

特别地, 若 $G_1 \cup G_2$ 中任意两个区间都相交, 那么 $G_1 \cup G_2$ 是一个 $s+t$ 阶团, 故 $\gamma_{ir}(G_1 \cup G_2) = 3$ 。

综上, 定理得证。结合定理 7 与定理 5 还可推广到满足区间相交的 k 个团, 即若区间图 G 的 k 个团依次满足区间相交, 那么图 G_1 、 G_2 的并的 total-罗马控制数 $\gamma_{ir}(G) \leq 2k$ 。

5. 结论

基于区间图, 本文首先介绍了 total-罗马对, 主要研究了团和路径中的 total-罗马控制函数性质以及团与团的并、团与路径的并等结合问题中的 total-罗马控制数, 在证明过程中多用反证法和数学归纳法, 以示例辅助理解, 在 3 阶及以上区间图中证明了以下几个主要结论:

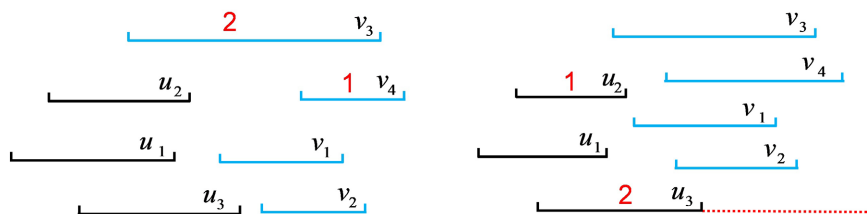


Figure 6. Example: two interval representations I_1, I_2 in interval graph G

图 6. 示例: 区间图 G 中两个区间表示 I_1, I_2

- 1) 若 $t-(V_1, V_2)$ 是 n 阶区间图 G 的 total-罗马对, 那么 V_2 中不会包含阶团;
- 2) 任意 n 阶团的 total-罗马控制数为 3;
- 3) 任意 n 阶团添加任意顶点后的 total-罗马控制数为 3;
- 4) 相交团的并的 total-罗马控制数不超过 4;

在后续研究中, 还可探讨以团和路径为基础的区间图的 total-罗马控制函数性质、多个团及多条路径的并的 total-罗马控制数等问题。

基金项目

重庆市研究生科研创新项目(CYS23687: 罗马控制及变形问题研究)。

参考文献

- [1] 原晋江, 康丽英. 单位区间图的一种刻划及其应用[J]. 石家庄铁道学院学报, 1994(2): 50-54.
- [2] 林浩, 林澜. 区间图最小伸展支撑树问题的最优性刻画[J]. 运筹学学报, 2020, 24(4): 153-158.
- [3] 周星宏, 李鹏, 王爱法, 等. 区间图最小连通支配集问题的最优算法[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2023, 37(1): 309-314.
- [4] Stewart, I. (1999) Defend the Roman Empire. *Scientific American*, **281**, 136-138. <https://doi.org/10.1038/scientificamerican1299-136>
- [5] Michael, A.H. and Stephen, T.H. (2003) Defending the Roman Empire-A New Strategy. *Discrete Mathematics*, **266**, 239-251. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(02\)00811-7](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00811-7)
- [6] Michael, A.H. (2003) Defending the Roman Empire from Multiple Attacks. *Discrete Mathematics*, **271**, 101-115. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(03\)00040-2](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(03)00040-2)
- [7] Liedloff, M., Kloks, T., Liu, J.P., et al. (2008) Efficient Algorithms for Roman Domination on Some Classes of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **156**, 3400-3415. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.01.011>
- [8] 尚卫革. 图的函数控制参数[D]: [硕士学位论文]. 郑州: 郑州大学, 2006.
- [9] 陈越奋, 杨剑. 图的弱罗马控制[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2012, 25(1): 9-13+30.
- [10] 宋晓新, 卞京召, 殷伟. 割边, 割点, 弱罗马控制和六个安全级别[J]. 河南大学学报(自然科学版), 2013, 43(5): 478-482.
- [11] 张利贤. 图的参数控制研究[D]: [硕士学位论文]. 金华: 浙江师范大学, 2016.
- [12] Liu, C.H. and Chang, G.J. (2013) Roman Domination on Strongly Chordal Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **26**, 608-619. <https://doi.org/10.1007/s10878-012-9482-y>
- [13] Chambers, E.W., Kinnersley, B., Prince, N. and West, D.B. (2009) Extremal Problems for Roman Domination. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **23**, 1575-1586. <https://doi.org/10.1137/070699688>
- [14] Cockayne, E.J., Dreyer Jr., P.A., Hedetniemic, S.M. and Hedetniemic, S.T. (2004) Roman Domination in Graphs. *Discrete Mathematics*, **278**, 11-22. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.06.004>
- [15] 杨洪, 张修军, 吴璞, 等. 求解区间图上的罗马控制数的动态规划算法[J]. 计算机应用研究, 2018, 35(7): 1986-1988.
- [16] Amjadi, J., Sheikholeslami, S.M. and Soroudi M. (2018) Nordhaus-Gaddum Bounds for Roman Domination. *Journal of Combinatorial Optimization*, **35**, 126-133. <https://doi.org/10.1007/s10878-017-0158-5>

-
- [17] Amjadi, J. (2020) Total Roman Domination Subdivision Number in Graphs. *Communications in Combinatorics and Optimization*, **5**, 157-168.
- [18] 李鹏. 区间图相关图类若干结构与算法问题[D]: [博士学位论文]. 上海: 上海交通大学, 2014.