Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3537-3548
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312368

计算几类3阶对称张量特征值的直接方法

邓坤钰

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2023年11月13日；录用日期：2023年12月14日；发布日期：2023年12月27日

摘　要

协正张量是一种重要的结构张量，在许多领域都有着广泛的应用，成为近年来新兴的研究课题。已有研究表明，对称张量是严格协正的当且仅当其所有Pareto-H特征值是正的，而Pareto-H特征值与H^{++}-特征值又具有一定的联系。另外，对张量特征值计算的研究是张量理论研究的一个重要部分。因此，求出对称张量特征值的具体表达式是很有必要的。本文主要介绍了计算几类3阶对称张量特征值的直接方法。首先，给出了计算3阶2维对称张量的H^{+}-特征值的直接方法，分别建立了3阶2维对称张量的H^{+}-特征值、H^{++}-特征值以及Pareto H-特征值的具体表达式。然后利用张量的Pareto H-特征值与协正性之间的关系，给出了判定3阶2维对称张量协正性的充分条件。

关键词

Pareto H-特征值，协正张量，对称张量

Direct Methods for Calculating Several Classes of Eigenvalues of 3rd Order Symmetric Tensors

Kunyu Deng

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: Nov. 13th, 2023; accepted: Dec. 14th, 2023; published: Dec. 27th, 2023

Abstract

The copositive tensors is an important structural tensors, which has been widely used in many fields and has become an emerging research topic in recent years. Previous studies have shown that a symmetric tensor is strictly copositive if and only if each of its Pareto-H eigenvalue is positive, and the Pareto-H eigenvalue have a certain relationship with the H^{++}-eigenvalue. In addition,

文章引用: 邓坤钰. 计算几类 3 阶对称张量特征值的直接方法[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3537-3548.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312368

the study of computing tensor eigenvalues is an important part of tensors theory. Therefore, it is necessary to find the precise expressions of the eigenvalues of the symmetric tensors. In this paper, we mainly introduce some direct methods for calculating several classes of eigenvalues of 3rd order symmetric tensors. First of all, we in this paper propose a direct method for calculating all *H*+-eigenvalue of 3rd order 2 dimensional symmetric tensors, and the expressions of the *H*+-eigenvalue, the *H*++-eigenvalue and the Pareto *H*-eigenvalue of such tensors are established. Then, using the relationship between the Pareto *H*-eigenvalue and copositivity of tensors, we obtain analytically sufficient conditions for determining copositivity of 3rd order 2 dimensional symmetric tensors.

Keywords

The Pareto *H*-Eigenvalue, Copositive Tensors, Symmetric Tensors

1. 引言

在本文中，所有实数的集合表示为$\mathbb{R}$，n 维欧式空间表示为$\mathbb{R}^n$，令$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x \ge 0\}$，$\mathbb{R}_{++}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x > 0\}$，$\boldsymbol{x}^{[m]} = \left(x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m\right)^{\mathrm{T}}$。

令$\mathcal{A} = \left(a_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$是一个 m 阶 n 维实张量，一个 m 阶 n 维张量称为对称张量，如果在下标的任何排列下它的项$a_{i_1 i_2 \cdots i_m}$都是不变的。显然，每个 m 阶 n 维对称张量$\mathcal{A}$都定义了具有 n 个变量的 m 次齐次多项式$\mathcal{A}\boldsymbol{x}^m$，反之亦然。$\boldsymbol{x} = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^\top \in \mathbb{R}^n$ 是一个 n 维实向量，$[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$，对$\forall \mathcal{A} = \left(a_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$，我们定义

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x}^m := \boldsymbol{x}^\top \mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-1} = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_m = 1}^{n} a_{i_1 i_2 \cdots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}.$$

$\mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-1}$表示一个向量，并且其第 i 个元素表示为

$$\left(\mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-1}\right)_i = \sum_{i_2, \cdots, i_m = 1}^{n} a_{i i_2 \cdots i_m} x_{i_2} \cdots x_{i_m}, \quad \forall i \in [n].$$

定义 1 ([1] [2])一个实数λ称为 m 阶 n 维张量$\mathcal{A}$的一个 H-特征值，如果齐次多项式方程组

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-1} = \lambda \boldsymbol{x}^{[m-1]} \tag{1}$$

即

$$\left(\mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-1}\right)_i = \lambda x_i^{m-1} \quad \forall i \in [n]$$

有非零实数解$\boldsymbol{x}$，向量$\boldsymbol{x}$称为$\mathcal{A}$的对应于λ的 H-特征向量。并且，$\mathcal{A}$的 H-特征值λ称为$\mathcal{A}$的 H^+-特征值(H^{++}-特征值)，如果它的 H-特征向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n$（$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{++}^n$）。

对一个 m 阶 n 维实张量$\mathcal{A}$，我们考虑如下系统：

$$\begin{cases} \mathcal{A}x^m = \lambda x^{\mathrm{T}} x^{[m-1]} \\ \mathcal{A}x^{m-1} - \lambda x^{[m-1]} \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \tag{2}$$

张量 Pareto H-特征值的概念首先在 Song [3]中被引入介绍。根据 Qi [1] (张量$\mathcal{A}$的 H-特征值)和 Seeger [4] (矩阵 A 的 Pareto 特征值)，对于 m 阶 n 维张量$\mathcal{A}$，实数λ称为张量$\mathcal{A}$的 Pareto H-特征值，如果存在满足系统(2)的非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$。非零向量 $\boldsymbol{x}$ 称为张量$\mathcal{A}$对应λ的 Pareto H-特征向量。另外，值得注意的是，$\mathcal{A}$的 Pareto H-特征值与$\mathcal{A}$的 $H(H^+)$-特征值密切相关。Song [3]也表明了 2 维张量的 Pareto H -特征值与 H^{++}-特征值存在一定联系。

对于张量的 Pareto 特征值现在已经有了大量的研究，见[3] [5] [6] [7]。特别是张量特征值互补问题，例如，在[5]中，作者还介绍和研究了两类更一般的张量特征值互补问题，同时，作者还讨论了张量的 Pareto 特征值的一些性质，并发现研究张量的 Pareto 特征值的包含区间是很重要的。另外，从[8] [9]可以看出，利用张量特征值的包含集，可以更好检验张量的一些结构化性质。但是目前对于 Pareto-H 特征值的研究还比较欠缺。Song [3]指出，对称张量$\mathcal{A}$是严格协正的当且仅当其 Pareto-H 特征值是正的，另外，通过张量的 Pareto-H 特征值还可以求解其对应的齐次多项式的约束优化问题。

1952 年，Motzkin [10]引入了协正矩阵这一概念。2013 年，Qi [11]第一次把协正矩阵这一概念扩展到协正张量，协正张量是一种重要的结构张量，它在真空稳定性[12] [13] [14]、多项式优化[3]、超图谱理论[15]、互补问题[5] [6] [16] [17] [18]等方面都有着广泛的应用，成为近年来新兴的研究课题。因此，对协正张量的研究成为张量理论研究的一个重要部分。虽然对张量协正性的研究已有很多，但因为实际问题，如一些场的一般标量势的真空稳定性，需要精确的表达式，所以有必要求出对称张量严格协正性的解析表达式。

基于以上研究的启示，本文考虑张量的 Pareto-H 特征值问题与协正性问题，在回顾一些相关性质定理之后，建立了 H^+-特征值、H^{++}-特征值以及 Pareto H-特征值的具体解析式，最后给出一个判定张量协正性的充分解析式。

本文的其余部分组织如下。在第 2 节中，我们回顾了一些基本的性质结果。在第 3 节中，给出了计算 3 阶 2 维对称张量的 H^+-特征值的直接方法。在第 4 节中，我们给出了定理 1 的计算过程，并分别建立了 3 阶 2 维对称张量的 H^+-特征值、H^{++}-特征值以及 Pareto H-特征值的具体解析式。在 5 节中，我们利用 Pareto H-特征值与张量协正性之间的关系，给出了判定 3 阶 2 维对称张量协正性的充分条件。最后，第 6 节是本文总结。

2. 预备知识

令 N 是$\{1,2,\cdots,n\}$的子集，$\mathcal{A}$是 m 阶 n 维张量。在齐次多项式$\mathcal{A}\boldsymbol{x}^m$中，我们让某些(不是全部)分量 $x_i=0$，即对$\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top$，$x_i=0$，$i\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus N$，$|N|$表示 N 的基数，那么我们会得到一个变量更少的齐次多项式，而该多项式就定义了一个新的低维张量，我们称这样一个低维张量$\mathcal{A}^N$为$\mathcal{A}$的主子张量。所以，$\mathcal{A}^N$是一个 m 阶$|N|$维张量，当 $N=\{1,2,\cdots,n\}$时，主子张量$\mathcal{A}^N$就等于$\mathcal{A}$本身。

定义 2 ([11])若对所有的非负实向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^\top$，满足

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x}^m=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m=1}^{n}a_{i_1i_2\cdots i_m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\geq 0,$$

则称$\mathcal{A}$是协正张量；若对所有的非负和非零实向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^\top$，满足

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x}^m=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m=1}^{n}a_{i_1i_2\cdots i_m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}>0,$$

则称$\mathcal{A}$是严格协正张量。

引理 1 ([3])对称张量$\mathcal{A}$总存在 Pareto H-特征值；且$\mathcal{A}$是协正(严格协正)的当且仅当其所有 Pareto H-

特征值是非负(正)的。

引理 2 ([3])实数 λ 是 $\mathcal{A}$ 的 Pareto H-特征值当且仅当存在一个 $\mathcal{A}$ 的 $|N|$ 维主子张量，使得 λ 是该主子张量的 H^{++}-特征值，其对应的 H-特征向量 $\boldsymbol{w}$ 满足

$$\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N} a_{ii_2\cdots i_m} w_{i_2} w_{i_3} \cdots w_{i_m} \ge 0 \text{ for } i\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus N .$$

3. 3 阶 2 维对称张量的 H^{+}-特征值

在本节中，我们会给出关于 3 阶 2 维对称张量的 H^{+}-特征值定理。

定理 1 设 $\mathcal{A}$ 是 3 阶 2 维对称张量，关于其 H^{+}-特征值及对应的 H^{+}-特征向量，我们有如下结果：

若 $a_{211}=0$，则 $\lambda=a_{111}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个 H^{+}-特征值，对应的 H^{+}-特征向量为 $\boldsymbol{x}=(v,0)^{\mathrm{T}}, v\in\mathbb{R}_{++}$。若 $a_{212}=0$，则 $\lambda=a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个 H^{+}-特征值，对应的 H^{+}-特征向量为 $\boldsymbol{x}=(0,v)^{\mathrm{T}}, v\in\mathbb{R}_{++}$。

若 $a_{211}\neq 0$，$a_{212}\neq 0$，对下列方程的任意非负实根 u：

$$a_{211}u^4+2a_{212}u^3+\left(a_{222}-a_{111}\right)u^2-2a_{211}u-a_{212}=0, \tag{3}$$

$$\lambda=a_{211}u^2+2a_{212}u+a_{222}$$

是 $\mathcal{A}$ 对应于 H^{+}-特征向量 $\boldsymbol{x}=(u,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{+}-特征值。

证明 令 $(\lambda,\boldsymbol{x})$ 是 $\mathcal{A}$ 的 H^{+}-特征对，则(1)式的具体形式为

$$\begin{cases} a_{111}x_1^2+2a_{112}x_1x_2+a_{122}x_2^2=\lambda x_1^2 \\ a_{222}x_2^2+a_{211}x_1^2+2a_{212}x_1x_2=\lambda x_2^2 \end{cases}. \tag{4}$$

设 $x_2=0$，$x_1\neq 0$，则(4)变为

$$\begin{cases} a_{111}x_1^2=\lambda x_1^2 \\ a_{211}x_1^2=0 \end{cases}.$$

因为 $a_{211}=0$，显然，$\lambda=a_{111}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个 H^{+}-特征值，对应的 H^{+}-特征向量为 $\boldsymbol{x}=(v,0)^{\mathrm{T}}, v\in\mathbb{R}_{++}$。

同理，$x_2\neq 0$，$x_1=0$ 时，$\lambda=a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个 H^{+}-特征值，对应的 H^{+}-特征向量为 $\boldsymbol{x}=(0,v)^{\mathrm{T}}, v\in\mathbb{R}_{++}$。

设 $x_1\neq 0$，$x_2\neq 0$，(4)式两个方程分别除以 x_1^2、x_2^2，得到

$$\begin{cases} a_{111}+2a_{112}\dfrac{x_2}{x_1}+a_{122}\dfrac{x_2^2}{x_1^2}=\lambda \\ a_{222}+2a_{212}\dfrac{x_1}{x_2}+a_{211}\dfrac{x_1^2}{x_2^2}=\lambda \end{cases}.$$

令 $u=\dfrac{x_1}{x_2}>0$，两方程联立得

$$a_{111}+2a_{112}\frac{1}{u}+a_{122}\frac{1}{u^2}=a_{222}+a_{211}u^2+2a_{212}u$$
$$a_{211}u^4+2a_{212}u^3+\left(a_{222}-a_{111}\right)u^2-2a_{112}u-a_{122}=0$$
$$a_{211}u^4+2a_{212}u^3+\left(a_{222}-a_{111}\right)u^2-2a_{211}u-a_{212}=0$$

此时

$$\lambda=a_{211}u^2+2a_{212}u+a_{222}$$

是 $\mathcal{A}$ 对应于 H^{+}-特征向量 $\boldsymbol{x}=(u,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{+}-特征值。证毕

4. 3 阶 2 维对称张量的 Pareto H-特征值

从定理 1 中我们可以看出，为了找到所有的 H^{+}-特征值和相关的 H^{+}-特征向量，我们需要求解一个一元四次方程。通过对(3)式的计算求解，我们可以得到定理 1 (ii)的具体表达式。

定理 2 设 $\mathcal{A}=\left(a_{ijk}\right)$ 是一个 3 阶 2 维对称张量，$a_{211}\neq 0$，$a_{212}\neq 0$，

当 $a_{111}=a_{222}, a_{211}=a_{212}$ 时，若 $u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{211}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=\left(u_i,1\right)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{+}-特征值，$i\in[2]$，

$$u_1=\frac{-2a_{212}D+9E}{4a_{211}D},\quad u_2=\frac{-2a_{212}D-3E}{4a_{211}D};$$

当 $E=F=0, D>0$ 时，若 $u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{212}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=\left(u_i,1\right)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{+}-特征值，$i\in[2]$，

$$u_{1,2}=\frac{-2a_{212}\pm\sqrt{D}}{4a_{211}};$$

当 $ABC\neq 0, \Delta=0$ 时，若 $B<0$，$u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_3^2+2a_{212}u_3+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=\left(u_3,1\right)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{+}-特征值，若 $B>0$，$u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{212}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=\left(u_i,1\right)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{+}-特征值，$i\in[3]$，

$$u_{1,2}=\frac{-2a_{212}+\dfrac{2AE}{B}\pm\sqrt{\dfrac{2B}{A}}}{4a_{211}},\quad u_3=\frac{-2a_{212}-\dfrac{2AE}{B}}{4a_{211}};$$

当 $\Delta>0$ 时，若 $u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{212}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=\left(u_i,1\right)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{+}-特征值，$i\in[2]$，

$$u_1=\frac{-2a_{212}+\operatorname{sgn}(E)\sqrt{\dfrac{D+\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}}{3}}+\sqrt{\dfrac{2D-\left(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}\right)+2\sqrt{z}}{3}}}{4a_{211}}$$

$$u_2=\frac{-2a_{212}+\operatorname{sgn}(E)\sqrt{\dfrac{D+\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}}{3}}-\sqrt{\dfrac{2D-\left(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}\right)+2\sqrt{z}}{3}}}{4a_{211}}$$

当 $\Delta<0, D>0, F>0$ 时，

若 $E=0$，$u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{212}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=\left(u_i,1\right)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{+}-特征值，$i\in[4]$，

$$u_{1,2}=\frac{-2a_{212}\pm\sqrt{D+2\sqrt{F}}}{4a_{211}},\quad u_{3,4}=\frac{-2a_{212}\pm\sqrt{D-2\sqrt{F}}}{4a_{211}};$$

若 $E\neq 0$，$u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{212}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=\left(u_i,1\right)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{+}-特征值，$i\in[4]$，

$$u_{1,2}=\frac{-2a_{212}+\operatorname{sgn}(E)\sqrt{y_1}\pm\left(\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}\right)}{4a_{211}}$$

$$u_{3,4}=\frac{-2a_{212}-\operatorname{sgn}(E)\sqrt{y_1}\pm\left(\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}\right)}{4a_{211}}$$

其中，

$$D=12a_{212}^2-8a_{211}\left(a_{222}-a_{111}\right),\ E=-8a_{212}^3+8a_{211}a_{212}\left(a_{222}-a_{111}\right)+16a_{211}^3$$

$$F=48a_{212}^4+16a_{211}^2\left(a_{222}-a_{111}\right)^2-64a_{211}a_{212}^2\left(a_{222}-a_{111}\right)$$

$$A=D^2-3F,\ B=DF-9E^2,\ C=F^2-3DE^2,\ \Delta=B^2-4AC$$

$$z_{1,2}=AD+3\left(\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2}\right),\ z=D^2-D\left(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}\right)+\left(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}\right)^2-3A$$

$$\operatorname{sgn}(E)=\begin{cases}0, & E=0\\ 1, & E>0\\ -1, & E<0\end{cases},\ \theta=\arccos\frac{3B-2AD}{2A\sqrt{A}},\ y_1=\frac{D-2\sqrt{A}\cos\frac{\theta}{3}}{3}$$

$$y_2=\frac{D+\sqrt{A}\left(\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right)}{3},\ y_3=\frac{D+\sqrt{A}\left(\cos\frac{\theta}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right)}{3}$$

证明 首先，令

$$f(u)=a_{211}u^4+2a_{212}u^3+(a_{222}-a_{111})u^2-2a_{112}u+a_{122}\,. \tag{5}$$

将(5)重写为

$$f(u)=au^4+bu^3+cu^2+du+e\,,$$

其中，

$$a=a_{211},b=2a_{212},c=(a_{222}-a_{111}),d=-2a_{112},e=a_{122}$$
$$d=-2a,e=-\frac{1}{2}b$$

判别式 $\Delta=B^2-4AC$ 。

因为 $u=\frac{x_1}{x_2}$ 是实数，所以接下来我们只讨论 $f(u)=0$ 有实根的情况。

由天珩公式，令

$$D=3b^2-8ac=12a_{212}^2-8a_{211}(a_{222}-a_{111})$$
$$E=-b^3+4abc-8a^2d=-b^3+4abc+16a^3=-8a_{212}^3+8a_{211}a_{212}(a_{222}-a_{111})+16a_{211}^3$$
$$F=3b^4+16a^2c^2-16ab^2c+16a^2bd-64a^3e=3b^4+16a^2c^2-16ab^2c$$
$$=48a_{212}^4+16a_{211}^2(a_{222}-a_{111})^2-64a_{211}a_{212}^2(a_{222}-a_{111})$$

$$A=D^2-3F=16a_{211}^2(a_{222}-a_{111})^2$$
$$B=DF-9E^2$$
$$=-2304a_{211}^6+2304a_{212}^3a_{211}^3-128a_{211}^3(a_{222}-a_{111})^3$$
$$+128a_{211}^2a_{212}^2(a_{222}-a_{111})^2-2304a_{211}^4a_{212}(a_{222}-a_{111})$$

$$C=F^2-3DE^2$$
$$=-9216a_{211}^6a_{212}^2+9216a_{211}^3a_{212}^5+256a_{211}^4(a_{222}-a_{111})^4+1536a_{211}^3a_{212}^2(a_{222}-a_{211})^3$$
$$+7936a_{211}^2a_{212}^4(a_{222}-a_{111})^2+6144a_{211}^5a_{212}(a_{222}-a_{111})^2$$
$$-2048a_{211}^3a_{212}^2(a_{222}-a_{111})-15360a_{211}^4a_{212}^3(a_{222}-a_{111})+6144a_{211}^7(a_{222}-a_{111})$$

当 $D=E=F=0$ 时， $f(u)=0$ 有一个四重实根。

$$\begin{cases}D=3b^2-8ac=0\\ F=3b^4+16a^2c^2-16ab^2c=0\end{cases}\Rightarrow b=0\,,$$

而 $b=2a_{212}\neq 0$ ，矛盾。

当 $DEF \neq 0, A = B = C = 0$ 时，

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \Rightarrow \\ C = 0 \end{cases} \begin{cases} a_{222} = a_{111} \\ a_{211} = a_{212} \end{cases},$$

此时

$$\begin{cases} D = 12a_{212}^2 \neq 0 \\ E = 8a_{212}^2 \neq 0 \\ F = 48a_{212}^4 \neq 0 \end{cases}.$$

即 $a_{111} = a_{222}, a_{211} = a_{212}$ 时，$f(u) = 0$ 有四个实根，其中一个三重根，

$$u_1 = \frac{-bD + 9E}{4aD} = \frac{-2a_{212}D + 9E}{4a_{211}D},\ u_2 = u_3 = u_4 = \frac{-bD - 3E}{4aD} = \frac{-2a_{212}D - 3E}{4a_{211}D},$$

若 $u_i > 0$，则 $\lambda = a_{211}u_i^2 + 2a_{211}u_i + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_i, 1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^+-特征值，$i \in [2]$。

当 $E = F = 0, D > 0$ 时，$f(u) = 0$ 有两对二重实根，

$$u_{1,3} = \frac{-b + \sqrt{D}}{4a} = \frac{-2a_{212} + \sqrt{D}}{4a_{211}},\ u_{2,4} = \frac{-b - \sqrt{D}}{4a} = \frac{-2a_{212} - \sqrt{D}}{4a_{211}},$$

若 $u_i > 0$，则 $\lambda = a_{211}u_i^2 + 2a_{212}u_i + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_i, 1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^+-特征值，$i \in [2]$。

当 $ABC \neq 0, \Delta = 0$ 时，$f(u) = 0$ 有一对二重实根 u_3、u_4，若 $AB > 0$，则其余两根 u_1、u_2 为不等实根。

$$u_1 = \frac{-b + \frac{2AE}{B} + \sqrt{\frac{2B}{A}}}{4a} = \frac{-2a_{212} + \frac{2AE}{B} + \sqrt{\frac{2B}{A}}}{4a_{211}}$$

$$u_2 = \frac{-b + \frac{2AE}{B} - \sqrt{\frac{2B}{A}}}{4a} = \frac{-2a_{212} + \frac{2AE}{B} - \sqrt{\frac{2B}{A}}}{4a_{211}}$$

$$u_3 = u_4 = \frac{-b - \frac{2AE}{B}}{4a} = \frac{-2a_{212} - \frac{2AE}{B}}{4a_{211}}$$

因为 $A = 16a_{211}^2(a_{222} - a_{111})^2 > 0$，所以 $AB < 0$ 即 $B < 0$ 时，$f(u) = 0$ 有实根 u_3、u_4，$AB > 0$ 即 $B > 0$ 时，$f(u) = 0$ 有实根 u_1、u_2、u_3、u_4。

即当 $ABC \neq 0, \Delta = 0$ 时，若 $B < 0$，$u_i > 0$，则 $\lambda = a_{211}u_3^2 + 2a_{212}u_3 + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_3, 1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^+-特征值，若 $B > 0$，$u_i > 0$，则 $\lambda = a_{211}u_i^2 + 2a_{212}u_i + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_i, 1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^+-特征值，$i \in [3]$。

当 $\Delta > 0$ 时，$f(u) = 0$ 有两个不等实根。

令

$$z_1 = AD + 3\left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2}\right), z_2 = AD + 3\left(\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2}\right)$$

$$z = D^2 - D\left(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}\right) + \left(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}\right)^2 - 3A$$

则

$$u_1=\frac{-2a_{212}+\operatorname{sgn}(E)\sqrt{\dfrac{D+\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}}{3}}+\sqrt{\dfrac{2D-\left(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}\right)+2\sqrt{z}}{3}}}{4a_{211}}$$

$$u_2=\frac{-2a_{212}+\operatorname{sgn}(E)\sqrt{\dfrac{D+\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}}{3}}-\sqrt{\dfrac{2D-\left(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}\right)+2\sqrt{z}}{3}}}{4a_{211}}$$

其中，

$$\operatorname{sgn}(E)=\begin{cases}0, & E=0\\ 1, & E>0\\ -1, & E<0\end{cases}.$$

即当 $\Delta>0$ 时，若 $u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{212}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=(u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{+}-特征值，$i\in[2]$。

当 $\Delta<0, D>0, F>0$ 时， $f(u)=0$ 有四个不等实根。

若 $E=0$，则四根为

$$u_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D+2\sqrt{F}}}{4a}=\frac{-2a_{212}\pm\sqrt{D+2\sqrt{F}}}{4a_{211}},\ u_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{D-2\sqrt{F}}}{4a}=\frac{-2a_{212}\pm\sqrt{D-2\sqrt{F}}}{4a_{211}},$$

若 $u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{212}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=(u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{+}-特征值， $i\in[4]$。

若 $E\neq0$，令

$$\theta=\arccos\frac{3B-2AD}{2A\sqrt{A}},\quad y_1=\frac{D-2\sqrt{A}\cos\dfrac{\theta}{3}}{3}$$

$$y_2=\frac{D+\sqrt{A}\left(\cos\dfrac{\theta}{3}+\sqrt{3}\sin\dfrac{\theta}{3}\right)}{3},\quad y_3=\frac{D+\sqrt{A}\left(\cos\dfrac{\theta}{3}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\theta}{3}\right)}{3}$$

则四根为

$$u_{1,2}=\frac{-2a_{212}+\operatorname{sgn}(E)\sqrt{y_1}\pm\left(\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}\right)}{4a_{211}},\ u_{3,4}=\frac{-2a_{212}-\operatorname{sgn}(E)\sqrt{y_1}\pm\left(\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}\right)}{4a_{211}}.$$

若 $u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{212}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=(u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{+}-特征值， $i\in[4]$。证毕

由定义 1 可知，只要让 $\mathcal{A}$ 的 H^{+}-特征值定理中的相关特征向量 $\boldsymbol{x}>0$，就可以得到其 H^{++}-特征值定理。而定理 2 中的特征向量均大于 0，所以定理 2 可以写成 $\mathcal{A}$ 的 H^{++}-特征值定理如下。

定理 3 设 $\mathcal{A}=(a_{ijk})$ 是一个 3 阶 2 维对称张量， $a_{211}\neq0$， $a_{212}\neq0$，

当 $a_{111}=a_{222}, a_{211}=a_{212}$ 时，若 $u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{211}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=(u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{++}-特征值，$i\in[2]$，

$$u_1=\frac{-2a_{212}D+9E}{4a_{211}D},\ u_2=\frac{-2a_{212}D-3E}{4a_{211}D};$$

当 $E=F=0, D>0$ 时，若 $u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{212}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=(u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{++}-特征值，$i\in[2]$，

$$u_{1,2}=\frac{-2a_{212}\pm\sqrt{D}}{4a_{211}};$$

当 $ABC \neq 0, \Delta = 0$ 时，若 $B<0$，$u_i>0$，则 $\lambda = a_{211}u_3^2 + 2a_{212}u_3 + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_3,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{++}-特征值，若 $B>0$，$u_i>0$，则 $\lambda = a_{211}u_i^2 + 2a_{212}u_i + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{++}-特征值，$i \in [3]$，

$$u_{1,2} = \frac{-2a_{212} + \frac{2AE}{B} \pm \sqrt{\frac{2B}{A}}}{4a_{211}},\ u_3 = \frac{-2a_{212} - \frac{2AE}{B}}{4a_{211}};$$

当 $\Delta > 0$ 时，若 $u_i > 0$，则 $\lambda = a_{211}u_i^2 + 2a_{212}u_i + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{++}-特征值，$i \in [2]$，

$$u_1 = \frac{-2a_{212} + \operatorname{sgn}(E)\sqrt{\frac{D + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}}{3}} + \sqrt{\frac{2D - \left(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}\right) + 2\sqrt{z}}{3}}}{4a_{211}}$$

$$u_2 = \frac{-2a_{212} + \operatorname{sgn}(E)\sqrt{\frac{D + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}}{3}} - \sqrt{\frac{2D - \left(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}\right) + 2\sqrt{z}}{3}}}{4a_{211}}$$

当 $\Delta < 0, D > 0, F > 0$ 时，

若 $E = 0$，$u_i > 0$，则 $\lambda = a_{211}u_i^2 + 2a_{212}u_i + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{++}-特征值，$i \in [4]$，

$$u_{1,2} = \frac{-2a_{212} \pm \sqrt{D + 2\sqrt{F}}}{4a_{211}},\ u_{3,4} = \frac{-2a_{212} \pm \sqrt{D - 2\sqrt{F}}}{4a_{211}};$$

若 $E \neq 0$，$u_i > 0$，则 $\lambda = a_{211}u_i^2 + 2a_{212}u_i + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 H^{++}-特征值，$i \in [4]$，

$$u_{1,2} = \frac{-2a_{212} + \operatorname{sgn}(E)\sqrt{y_1} \pm \left(\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}\right)}{4a_{211}}$$

$$u_{3,4} = \frac{-2a_{212} - \operatorname{sgn}(E)\sqrt{y_1} \pm \left(\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}\right)}{4a_{211}}$$

其中，A、B、C、D、E、F、Δ、$z_{1,2}$、z、$\operatorname{sgn}(E)$、θ、y_1、y_2、y_3 由定理 2 给出。

由引理 2，显然，当 $n=2$ 时，张量的 Pareto H-特征值与 H^{++}-特征值是等价的，所以对于 3 阶 2 维对称张量，我们可以由定理 3 直接得出它的 Pareto H-特征值表达式。

定理 4 设 $\mathcal{A} = (a_{ijk})$ 是一个 3 阶 2 维对称张量，$a_{211} \neq 0$，$a_{212} \neq 0$，

当 $a_{111} = a_{222}, a_{211} = a_{212}$ 时，若 $u_i > 0$，则 $\lambda = a_{211}u_i^2 + 2a_{211}u_i + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 Pareto H-特征值，$i \in [2]$，

$$u_1 = \frac{-2a_{212}D + 9E}{4a_{211}D},\ u_2 = \frac{-2a_{212}D - 3E}{4a_{211}D};$$

当 $E = F = 0, D > 0$ 时，若 $u_i > 0$，则 $\lambda = a_{211}u_i^2 + 2a_{212}u_i + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 Pareto H-特征值，$i \in [2]$，

$$u_{1,2} = \frac{-2a_{212} \pm \sqrt{D}}{4a_{211}};$$

当 $ABC \neq 0, \Delta = 0$ 时，若 $B<0$，$u_i>0$，则 $\lambda = a_{211}u_3^2 + 2a_{212}u_3 + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_3,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 Pareto H-特征值，若 $B>0$，$u_i>0$，则 $\lambda = a_{211}u_i^2 + 2a_{212}u_i + a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x} = (u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 Pareto H-特征值，$i \in [3]$，

$$u_{1,2}=\frac{-2a_{212}+\frac{2AE}{B}\pm\sqrt{\frac{2B}{A}}}{4a_{211}},\ u_3=\frac{-2a_{212}-\frac{2AE}{B}}{4a_{211}};$$

当 $\Delta>0$ 时，若 $u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{212}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=(u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 Pareto H-特征值，$i\in[2]$，

$$u_1=\frac{-2a_{212}+\operatorname{sgn}(E)\sqrt{\frac{D+\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}}{3}}+\sqrt{\frac{2D-\left(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}\right)+2\sqrt{z}}{3}}}{4a_{211}}$$

$$u_2=\frac{-2a_{212}+\operatorname{sgn}(E)\sqrt{\frac{D+\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}}{3}}-\sqrt{\frac{2D-\left(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}\right)+2\sqrt{z}}{3}}}{4a_{211}}$$

当 $\Delta<0, D>0, F>0$ 时，

若 $E=0$，$u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{212}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=(u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 Pareto H-特征值，$i\in[4]$，

$$u_{1,2}=\frac{-2a_{212}\pm\sqrt{D+2\sqrt{F}}}{4a_{211}},\ u_{3,4}=\frac{-2a_{212}\pm\sqrt{D-2\sqrt{F}}}{4a_{211}};$$

若 $E\neq0$，$u_i>0$，则 $\lambda=a_{211}u_i^2+2a_{212}u_i+a_{222}$ 是 $\mathcal{A}$ 对应于 $\boldsymbol{x}=(u_i,1)^{\mathrm{T}}$ 的一个 Pareto H-特征值，$i\in[4]$，

$$u_{1,2}=\frac{-2a_{212}+\operatorname{sgn}(E)\sqrt{y_1}\pm\left(\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}\right)}{4a_{211}}$$

$$u_{3,4}=\frac{-2a_{212}-\operatorname{sgn}(E)\sqrt{y_1}\pm\left(\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}\right)}{4a_{211}}$$

其中，A、B、C、D、E、F、Δ、$z_{1,2}$、z、$\operatorname{sgn}(E)$、θ、y_1、y_2、y_3 由定理 2 给出。

下面给出一个具体算例。

例 1 $\mathcal{A}=(a_{ijk})$ 是一个 3 阶 2 维对称张量，其中，

$$a_{ijk}=\begin{cases}a_{111}=2; & a_{112}=1; & a_{121}=1; & a_{122}=1;\\ a_{222}=2; & a_{211}=1; & a_{212}=1; & a_{221}=1.\end{cases}$$

通过计算可得

$$D=12a_{212}^2-8a_{211}\left(a_{222}-a_{111}\right)=12$$
$$E=-8a_{212}^3+8a_{211}a_{212}\left(a_{222}-a_{111}\right)+16a_{211}^3=8$$
$$F=48a_{212}^4+16a_{211}^2\left(a_{222}-a_{111}\right)^2-64a_{211}a_{212}^2\left(a_{222}-a_{111}\right)=48$$
$$A=0, B=0, C=0, \Delta=0$$

由定理 4，

$$u_1=\frac{-2a_{212}D+9E}{4a_{211}D}=1>0,\ u_2=\frac{-2a_{212}D-3E}{4a_{211}D}=-1<0$$
$$\lambda=a_{211}u_1^{\ 2}+2a_{211}u_1+a_{222}=5$$

所以 $\mathcal{A}$ 的 Pareto H-特征值 $\lambda=5$，对应的 Pareto H-特征向量 $\boldsymbol{x}=(1,1)^{\mathrm{T}}$。

5. 对称张量的协正性

由定理 4 及引理 2 可知，只需要让定理 4 中的所有 Pareto H-特征值 $\lambda \geq 0$，很容易就可以得到 3 阶 2 维对称张量的协正性充分条件。

定理 5 设 $\Gamma = \left(\gamma_{ijk}\right)$ 是一个 3 阶 2 维对称张量，$\gamma_{211} \neq 0$，$\gamma_{212} \neq 0$，

当 $\gamma_{111} = \gamma_{222}, \gamma_{211} = \gamma_{212}$，$u_i > 0$ 时，

$$\gamma_{211} u_i^2 + 2\gamma_{211} u_i + \gamma_{222} \geq 0,\ i \in [2]$$

$$u_1 = \frac{-2\gamma_{212} D + 9E}{4\gamma_{211} D},\ u_2 = \frac{-2\gamma_{212} D - 3E}{4\gamma_{211} D}$$

当 $E = F = 0, D > 0$，$u_i > 0$ 时，

$$\gamma_{211} u_i{}^2 + 2\gamma_{212} u_i + \gamma_{222} \geq 0,\ i \in [2]$$

$$u_{1,2} = \frac{-2\gamma_{212} \pm \sqrt{D}}{4\gamma_{211}};$$

当 $ABC \neq 0, \Delta = 0$ 时，若 $B < 0$，$u_i > 0$，$\gamma_{211} u_3^2 + 2\gamma_{212} u_3 + \gamma_{222} \geq 0$，若 $B > 0$，$u_i > 0$，$\gamma_{211} u_i{}^2 + 2\gamma_{212} u_i + \gamma_{222} \geq 0$，$i \in [3]$，

$$u_{1,2} = \frac{-2\gamma_{212} + \dfrac{2AE}{B} \pm \sqrt{\dfrac{2B}{A}}}{4\gamma_{211}},\ u_3 = \frac{-2\gamma_{212} - \dfrac{2AE}{B}}{4\gamma_{211}}$$

当 $\Delta > 0$ 时，若 $u_i > 0$，则

$$\gamma_{211} u_i{}^2 + 2\gamma_{212} u_i + \gamma_{222} \geq 0,\ i \in [2]$$

$$u_1 = \frac{-2\gamma_{212} + \operatorname{sgn}(E)\sqrt{\dfrac{D + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}}{3}} + \sqrt{\dfrac{2D - \left(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}\right) + 2\sqrt{z}}{3}}}{4\gamma_{211}}$$

$$u_2 = \frac{-2\gamma_{212} + \operatorname{sgn}(E)\sqrt{\dfrac{D + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}}{3}} - \sqrt{\dfrac{2D - \left(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}\right) + 2\sqrt{z}}{3}}}{4\gamma_{211}}$$

当 $\Delta < 0, D > 0, F > 0$ 时，

若 $E = 0$，$u_i > 0$，

$$\gamma_{211} u_i^2 + 2\gamma_{212} u_i + \gamma_{222} \geq 0,\ i \in [4]$$

$$u_{1,2} = \frac{-2\gamma_{212} \pm \sqrt{D + 2\sqrt{F}}}{4\gamma_{211}},\ u_{3,4} = \frac{-2\gamma_{212} \pm \sqrt{D - 2\sqrt{F}}}{4\gamma_{211}};$$

若 $E \neq 0$，$u_i > 0$，

$$\gamma_{211} u_i^2 + 2\gamma_{212} u_i + \gamma_{222} \geq 0,\ i \in [4]$$

$$u_{1,2} = \frac{-2\gamma_{212} + \operatorname{sgn}(E)\sqrt{y_1} \pm \left(\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}\right)}{4\gamma_{211}}$$

$$u_{3,4} = \frac{-2\gamma_{212} - \operatorname{sgn}(E)\sqrt{y_1} \pm \left(\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}\right)}{4\gamma_{211}}$$

那么，Γ 是协正的。其中，A、B、C、D、E、F、Δ、$z_{1,2}$、z、$\operatorname{sgn}(E)$、θ、y_1、y_2、y_3 由定理 2 给出。

6. 结论

本文给出了计算 3 阶 2 维对称张量的 H^{+}-特征值的直接方法，分别建立了 3 阶 2 维对称张量的 H^{+}-特征值、H^{++}-特征值以及 Pareto H-特征值的具体解析式。并利用 Pareto H-特征值与张量协正性之间的关系，给出了判定 3 阶 2 维对称张量协正性的充分条件。可以考虑进一步的研究，如利用降阶的方法可得出 4 阶 2 维对称张量协正性的充分条件，也可继续研究 3 维情况下的 Pareto H-特征值表达式与协正性条件，以求得更为精简的解析表达式。

参考文献

[1] Qi, L. (2005) Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor. *Journal of Symbolic Computation*, **40**, 1302-1324. https://doi.org/10.1016/j.jsc.2005.05.007

[2] Lim, L.H. (2005) Singular Values and Eigenvalues of Tensors: A Variational Approach. *Proceedings of the First IEEE International Workshop on Computational Advances of Multi-Sensor Adaptive Processing*, Puerto Vallarta, 13-15 December 2005, 129-132.

[3] Song, Y. and Qi, L. (2016) Eigenvalue Analysis of Constrained Minimization Problem for Homogeneous Polynomial. *Journal of Global Optimization*, **64**, 563-575. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0343-y

[4] Seeger, A. (1999) Eigenvalue Analysis of Equilibrium Processes Defined by Linear Complementarity Conditions. *Linear Algebra and Its Applications*, **292**, 1-14. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(99)00004-X

[5] Ling, C., He, H. and Qi, L. (2016) On the Cone Eigenvalue Complementarity Problem for Higher-Order Tensors. *Computational Optimization and Applications*, **63**, 143-168. https://doi.org/10.1007/s10589-015-9767-z

[6] Song, Y. and Yu, G. (2016) Properties of Solution Set of Tensor Complementarity Problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **170**, 85-96. https://doi.org/10.1007/s10957-016-0907-0

[7] Xu, Y. and Huang, Z. (2021) Pareto Eigenvalue Inclusion Intervals for Tensors. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **19**, 2123-2139. https://doi.org/10.3934/jimo.2022035

[8] Li, C., Chen, Z. and Li, Y. (2015) A New Eigenvalue Inclusion Set for Tensors and Its Applications. *Linear Algebra and Its Applications*, **481**, 36-53. https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.04.023

[9] Li, C., Li, Y. and Kong, X. (2014) New Eigenvalue Inclusion Sets for Tensors. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **21**, 39-50. https://doi.org/10.1002/nla.1858

[10] Motzkin, T. (1952) Copositive Quadratic Forms. *National Standard Report*, **1818**, 11-12.

[11] Qi, L. (2013) Symmetric Nonnegative Tensors and Copositive Tensors. *Linear Algebra and Its Applications*, **439**, 228-238. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.03.015

[12] Kannike, K. (2016) Vacuum Stability of a General Scalar Potential of a Few Fields. *European Physical Journal C*, **76**, Article No. 324. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4160-3

[13] Kannike, K. (2018) Erratum to: Vacuum Stability of a General Scalar Potential of a Few Fields. *European Physical Journal C*, **78**, Article No. 355. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5837-6

[14] Kannike, K. (2012) Vacuum Stability Conditions from Copositivity Criteria. *European Physical Journal C*, **72**, Article No. 2093. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-2093-z

[15] Qi, L. and Luo, Z. (2017) Tensor Analysis: Spectral Theory and Special Tensors. SIAM, Philadelpia. https://doi.org/10.1137/1.9781611974751

[16] Ling, C., He, H. and Qi, L. (2016) Higher-Degree Eigenvalue Complementarity Problems for Tensors. *Computational Optimization and Applications*, **64**, 149-176. https://doi.org/10.1007/s10589-015-9805-x

[17] Huang, Z. and Qi, L. (2017) Formulating an *n*-Person Noncooperative Game as a Tensor Complementarity Problem. *Computational Optimization and Applications*, **66**, 557-576. https://doi.org/10.1007/s10589-016-9872-7

[18] Song, Y. and Qi, L. (2015) Necessary and Sufficient Conditions of Copositive Tensors. *Linear Multilinear Algebra*, **63**, 120-131. https://doi.org/10.1080/03081087.2013.851198