Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3565-3593
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312371

带有转动惯量和强阻尼的梁方程的时间依赖吸引子

王 伟，汪 璇*

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年11月13日；录用日期：2023年12月14日；发布日期：2023年12月27日

摘 要

本文讨论了带有转动惯量梁方程：$\varepsilon(t)(1+(-\Delta)^{\alpha})\partial_t^2 u+\Delta^2 u-\gamma\Delta\partial_t u+f(u)=g(x)$，$\alpha\in[0,1)$ 解的渐近性态，当在非线性项满足 $1\le p<p^*=\frac{N-\alpha}{N-4}$，$N\ge 5$，时，应用 **Faedo-Galerkin** 逼近方法和渐近正则估计技术，得到了解的适定性和正则性，进一步应用收缩函数方法，验证了过程的渐近紧性，最后获得了时间依赖吸引子在时间依赖空间 $\mathcal{H}_t^{\alpha}$ 的存在性。

关键词

梁方程，转动惯量，适定性，时间依赖吸引子

The Time-Dependent Attractor for Beam Equation with Rotational Inertia

Wei Wang, Xuan Wang*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Nov. 13^{th}, 2023; accepted: Dec. 14^{th}, 2023; published: Dec. 27^{th}, 2023

* 通讯作者。

文章引用: 王伟, 汪璇. 带有转动惯量和强阻尼的梁方程的时间依赖吸引子[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3565-3593.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312371

Abstract

In this paper, the authors study the asymptotic behavior of the solutions to the beam equation with rotational inertia and strong damping: $\varepsilon(t)(1+(-\Delta)^{\alpha})\partial_t^2 u+\Delta^2 u-\gamma\Delta\partial_t u+f(u)=g(x)$, **Where** $\alpha\in[0,1)$. **When the growth exponent of nonlinear terms satisfies** $1\le p<p^*=\frac{N+2\alpha}{N-4}$, $N\ge 5$, **firstly, by use Faedo-Galerkin approximation method and asymptotic regular estimate technique, the well-posedness and regularity of solutions are established; secondly, the asymptotic compactness of the solution process is proved via the method of contraction function; finally, the existence of time-dependent attractor is obtained in the time-dependent space** $\mathcal{H}_t^{\alpha}$ **.**

Keywords

Beam Equation, Rotational Inertia, Well-Posedness, Time-Dependent Attractors

1. 引言

本文考虑带有转动惯量的梁方程

$$\varepsilon(t)(1+(-\Delta)^{\alpha})\partial_t^2 u+\Delta^2 u-\gamma\Delta\partial_t u+f(u)=g(x),\ \ (x,t)\in\Omega\times[\tau,+\infty), \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad u(x,\tau)=u_0(x),\quad \partial_t u(x,\tau)=u_1(x),\quad x\in\Omega \tag{1.2}$$

的时间依赖吸引子的存在性, 其中旋转惯性系数 $\alpha\in[0,1)$, $\gamma\in(0,+\infty)$, $\Omega\in\mathbb{R}^N(N\ge 5)$ 是具有光滑边界的有界区域, $f(u)$ 是非线性项, $g(x)$ 是外力项. 时间依赖系数函数 $\varepsilon(t)$ 和非线性函数 $f(u)$ 分别满足:

设 $\varepsilon(t)\in C^1(\mathbb{R})$ 是一个单调递减有界函数, 满足:

$$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=0, \tag{1.3}$$

且存在常数 $L>0$, 使得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}[|\varepsilon(t)|+|\varepsilon'(t)|]\leqslant L. \tag{1.4}$$

并且 $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0)=0$, 且当 $1 \le p < p^* = \frac{N-\alpha}{N-4}$, $N \ge 5$, 时, 满足:

$$\liminf_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s} \geqslant -\lambda_1, \tag{1.5}$$

$$|f'(s)| \leqslant C(1+|s|^{p-1}). \tag{1.6}$$

其中 λ_1 为算子 $-\Delta$ 在 Dirichlet 边界条件下的第一特征值.

注 1.1 根据 (1.5) 可知, 存在一个常数 β_0, 满足 $0<\beta_0<1$, 使得

$$\langle F(s),1\rangle \geqslant -\frac{(1-\beta_0)\lambda_1^2}{2}\|s\|^2 - C_{\beta_0}, \qquad s\in\mathbb{R},$$

$$\langle f(s),s\rangle \geqslant -(1-\beta_0)\lambda_1^2\|s\|^2 - C_{\beta_0}, \qquad s\in\mathbb{R}$$

成立, 其中 $F(s)=\int_0^s f(r)\mathrm{d}r$.

波动方程是偏微分方程中一类重要的方程, 表示波的运动规律. 现在有很多工程材料, 如混凝土, 高聚合材料以及处于高速变形状态的金属材料, 既具有弹性性质, 又具有粘性性质, 这种兼具弹性性质和粘性性质的材料称为粘弹性体. 在外力作用下, 粘弹性体会产生弹性变形, 而且变形会随时间发生变化, 用弹性力学方法来研究粘弹性体并不能完全反映实际情况, 因此越来越多的人研究在旋转惯性效应下粘弹性的性质, 具有旋转惯性的粘弹性波动方程是数学物理学界的研究热点之一.

当 (1.1) 中的系数 ε 为常数, 即 ε 与时间 t 无关时, 对于具有转动惯量的可拉伸梁方程的研究已有许多结果: 当 (1.1) 中的 $\alpha=0$ 时, Silva 和 Narciso 在文 [1]研究了具有非线性结构阻尼的可拉伸梁方程模型:

$$\partial_t^2 u + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + N(\|\nabla u\|^2)(-\Delta)^\alpha \partial_t u + f(u) = g(x), \quad x\in\Omega, t>0, \tag{1.7}$$

其中, 耗散指数 $0 \le \alpha \le 1$. 文中作者提出了一个更优的次临界指数, $1 \le p < \infty$ $(N \le 4)$和 $1 \le p \le p^* := \frac{N}{(N-4)}(N \ge 5)$, 并且分别证明了方程强解和弱解的的适定性, 以及通过使用文 [2]中拟稳定动力系统的方法证明了全局和广义指数吸引子的存在性. 对于 $\alpha=0$ 的其它研究可以参考文献 [3–6].

当 (1.1) 中的 $\alpha>0$ 时, 在 2008 年, Chueshov 和 Lasiecka 在文 [7]提出了具有旋转力的 Berger 可扩展梁(板)方程:

$$(1-\omega\Delta)\partial_t^2 u + \Delta^2 u - \gamma\Delta\partial_t u + (Q+\|\nabla u\|^2)\Delta u = p(u,\partial_t u), \tag{1.8}$$

其中, 参数 $\omega \ge 0$ 表示旋转力, 参数 Q 表示施加在板上的平面内力, 函数 p 表示依赖于位移 u 和速度 $\partial_t u$ 的横向载荷, 文中作者讨论了该方程的适定性和解的渐近性态. 当 $\omega>0$ 时, 这种旋转情况表示具有有限传播速度的纯双曲方程解的动力学行为, 当 $\omega=0$ 时, 方程 (1.6) 为通常的 Berger 板模型. [8]

在 2020 年, Niimura 在文 [9]研究了非局部结构阻尼模型:

$$(1-\alpha\Delta)\partial_t^2 u + \Delta^2 u - \phi(\|\nabla u\|^2)\Delta u - M(\|\nabla u\|^2)\Delta\partial_t u + f(u) = h, \tag{1.9}$$

其中 $\alpha \in [0,1]$, 文中作者证明了全局解的适定性, 全局吸引子的存在性, 以及全局吸引子族的上半连续性.

在文 [9]的基础上, 杨等人在文 [10]用更复杂的非局部能量阻尼 $-M(\|\xi_u\|_H^2)\Delta\partial_t u$ 代替了非局部结构阻尼 $-M(\|\nabla u\|^2)\Delta\partial_t u$ 得到了模型:

$$(1-\alpha\Delta)\partial_t^2 u + \Delta^2 u - \phi(\|\nabla u\|^2)\Delta u - M(\|\xi_u\|_H^2)\Delta\partial_t u + f(u) = h,\ \ \Omega\times(0,\infty), \tag{1.10}$$

其中 $\alpha \in [0,1]$, $\|\xi_u\|_H^2 = \|(u,\partial_t u)\|_H^2 = \|\Delta u\|^2 + \|\partial_t u\|^2$ 是空间 H 的范数, 文中作者提出了一个更优的次临界指数 $p^* = \frac{N+2}{(N-4)}$, $N \geq 5$, 并且证明了全局解的适定性, 指数吸引子和全局吸引子的存在性和连续性.

当 ε 为与时间 t 有关的正递减有界函数时, 据我们所知, 对于具有转动惯量的梁方程的研究很少. 因为 $\varepsilon(t)$ 在无穷远趋于 0 时问题就变得更为复杂. 这是因为即使外力项与时间无关, 我们的问题仍在非自治的情形下研究的, 由于系统的能量泛函依赖于时间 t , 并且在 $t\to\infty, \varepsilon(t)\to 0$ 时系统的耗散性也就发生了变化, 有界吸收集的存在性很难得到证明, 一些经典理论(全局吸引子,一致吸引子)和方法对这类问题的解决受到了限制. 因此 Conti 等人在文 [11,12]中提出了修正的时间拉回吸引子理论和时间依赖全局吸引子的概念, 并对方程解的动力学行为进行研究.

然而, 对于方程 (1.1) , 当 $\alpha \in [0,1)$, $\varepsilon(t)$ 满足条件 (1.3)-(1.4) 时, 时间依赖吸引子的存在性还未见讨论. 与此同时, 方程中所包含的转动惯量项和非线性项给解的耗散性估计, 有界吸收集的存在性以及解过程的渐近紧性验证带了本质困难. 对于这些困难, 通过运用渐近正则估计技术, 收缩函数的方法和时间依赖吸引子理论, 我们解决了这些技术难题, 并证明了当方程 (1.1) 非线性项的增长指数满足 $1 \leq p < p^* = \frac{N-\alpha}{N-4}$, $N \geq 5$ 时, 时间依赖吸引子在时间依赖空间 $\mathcal{H}_t^\alpha$ 的存在性.

本文内容和结构安排如下: 第二节我们将回顾预备知识和抽象结果; 第三节讨论弱解的适定性与正则性; 第四节将利用渐近正则估计技术和收缩函数方法得到时间依赖吸引子的存在性; 第五节总结与展望.

2. 预备知识

在此部分, 介绍一些关于时间依赖动力系统的记号和一些抽象结果.

记 $V_0 = L^2(\Omega)$, $D(A^{\frac{s}{2}}) = V_s$, $D(A^{-\frac{s}{2}}) = V_{-s}$.

设 $A = -\Delta$. 显然 A 在定义域 $D(A) = H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ 中是自伴的, 在 $L^2(\Omega)$ 中是有界的. 在 $D(A^s)$ 中的内积和范数分别表示为:

$$\langle u,v\rangle_{D(A^s)} = \langle A^s u,\ A^s v\rangle, \quad \|u\|^2_{D(A^s)} = \|A^s u\|^2, \quad \forall\, u,\, v \in V_s.$$

对 $s \in \mathbb{R}$, 定义 Hilbert 空间族 $V_s = D(A^{\frac{s}{2}})$, 内积和范数分别表示为:

$$\langle u,v\rangle_s = \int_\Omega A^{\frac{s}{2}}u(x)A^{\frac{s}{2}}v(x)\mathrm{d}x, \quad \|u\|_s^2 = \int_\Omega |A^{\frac{s}{2}}u(x)|^2\mathrm{d}x, \quad \forall\, u,\, v \in V_s.$$

应用 Sobolev 嵌入定理, 我们可得当 $s_1 > s_2$ 时有紧嵌入:

$$V_{s_1} \hookrightarrow\hookrightarrow V_{s_2}, \tag{2.1}$$

和连续嵌入:

$$V_s \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}. \tag{2.2}$$

应用 Poincaré 不等式, 对任意的 $v \in V_s$, 有

$$\lambda_1^s \int_\Omega |v|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |A^{\frac{s}{2}} v|^2 \mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

故, 问题 (1.1), (1.2) 可以写成算子形式:

$$\varepsilon(t)(1+A^\alpha)\partial_t^2 u + A^2 u + \gamma A \partial_t u + f(u) = g(x), \ \ (x,t) \in \Omega \times [\tau, +\infty), \tag{2.4}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,\tau) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,\tau) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.5}$$

定义 Hilbert 空间族:

$$\mathcal{H}_t^{2+\alpha} = V_4 \times V_{2+\alpha}\ ,$$

其范数定义如下:

$$\|z\|^2_{\mathcal{H}_t^{2+\alpha}} = \|(u, \partial_t u)\|^2_{\mathcal{H}_t^{2+\alpha}} = \|u\|_4^2 + \varepsilon(t)\|\partial_t u\|^2_{2+\alpha}, \tag{2.8}$$

特别地, Hilbert 空间族:

$$\mathcal{H}_t^{\alpha} = V_2 \times V_\alpha, \tag{2.9}$$

其范数定义如下:

$$\|z\|^2_{\mathcal{H}_t^{\alpha}} = \|(u, \partial_t u)\|^2_{\mathcal{H}_t^{\alpha}} = \|u\|_2^2 + \varepsilon(t)\|\partial_t u\|^2_{\alpha}\ , \tag{2.10}$$

此外, 当 $\alpha > 0$ 时, 有

$$\mathcal{H}_t^{2+\alpha} \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{H}_t^{\alpha}.$$

下面的抽象结果将用于对解的渐近估计.

定义 2.1 [13] 设 X_t 是一族赋范空间, 称双参数算子族 $\{U(t,\tau) : X_\tau \to X_t, t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}\}$ 是一个过程, 如果

1) 对任意的 $\tau \in \mathbb{R}$, $U(\tau,\tau) = \mathrm{Id}$ 是 X_τ 上的恒等算子;

2) 对任意的 $\sigma \in \mathbb{R}$ 和任意的 $t \geqslant \tau \geqslant \sigma$, $U(t,\tau)U(\tau,\sigma) = U(t,\sigma)$.

定义 2.2 [13] 如果对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 存在常数 $R > 0$, 使得 $C_t \subset \mathbb{B}_t(R)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, 则称有界集 $C_t \subset X_t$ 的集合族 $\mathfrak{C} = \{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一致有界的.

定义 2.3 [13] 如果对任意的 $R_0 > 0$, 存在常数 $t = t_0(R) \leqslant t$, 使得

$$\tau \leqslant t - t_0 \Rightarrow U(t,\tau)B_\tau(R) \subset B_t,$$

则称一致有界集族 $\mathfrak{B}_t = \{B_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖吸收集.

引理 2.4 [14] 设 x_n 是一个有界序列和 $\psi \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ 是一个单调函数, 则

$$\psi(\liminf_{n\to\infty} x_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \psi(x_n).$$

引理 2.5 [15,16] 设 X, B 和 Y 是三个 Banach 空间, 对 $T > 0$, 如果有 $\mathrm{X} \hookrightarrow\hookrightarrow \mathrm{B} \hookrightarrow \mathrm{Y}$,

$$\mathrm{W}_1 = \{u \in L^p([0,T];X) | u_t \in L^1([0,T];Y)\}, \ \ 1 \leqslant p < \infty,$$
$$\mathrm{W}_2 = \{u \in L^\infty([0,T];X) | u_t \in L^r([0,T];Y)\}, \ \ r > 1,$$

则

$$W_1 \hookrightarrow\hookrightarrow L^p([0,T];B), \quad W_2 \hookrightarrow\hookrightarrow C([[0,T];B).$$

定理 2.6 [13] 如果过程 $U(t,\tau)$ 渐近紧, 即集合 $\mathbb{K} = \{\mathfrak{K} = \{K_t\}_{t\in\mathbb{R}} : K_t \subset X_t$ 为紧集, $\mathfrak{K}$ 拉回吸引$\}$ 是非空紧的, 则时间依赖吸引子 $\mathfrak{U}$ 存在且唯一.

定义 2.7 [17] 设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一族 Banach 空间, 且 $\mathfrak{C} = \{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的一族一致有界子集. 定义于 $X_t \times X_t$ 上的函数 $\varphi_\tau(\cdot,\cdot)$ 称为 $C_\tau \times C_\tau$ 上的收缩函数. 如果对任意固定的 $t \in \mathbb{R}$ 和任意的序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset C_\tau$, 存在一个子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} \varphi_\tau^t(x_{n_k}, x_{n_l}) = 0, \ \ \forall \tau \leqslant t.$$

我们用 $\mathfrak{C}(C_t)$ 表示 $C_t \times C_t$ 上收缩函数的集合.

定理 2.8 [17] 设 $U(\cdot,\cdot)$ 是 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 上的一个过程, 并且有一个时间依赖吸收集 $\mathfrak{B} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 此外, 假设对任意的 $\epsilon > 0$, 存在一个子序列 $T(\epsilon) \leqslant t$, $\varphi_T^t \in \mathfrak{C}(\mathbb{B}_T)$, 使得

$$\|U(t,T)x - U(t,T)y\| \leqslant \epsilon + \varphi_T^t(x,\ y), \ \forall x, \ \ y \in B_T,$$

对任意固定的 $t \in \mathbb{R}$, 则 $U(\cdot,\cdot)$ 是渐近紧的.

定理 2.9 [13] 设 $U(\cdot,\cdot)$ 为作用于 Banach 空间族 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的过程, 则 $U(\cdot,\cdot)$ 有时间依赖全局吸引子 $\mathfrak{U}^* = \{A_t^*\}_{t\in\mathbb{R}}$ 满足 $A_t^* = \bigcap\limits_{s\leqslant t} \overline{\bigcup\limits_{\tau\leqslant s} U(t,\tau)B_\tau}$, 当且仅当

(i) $U(\cdot,\cdot)$ 存在时间依赖吸收集族 $\mathfrak{B} = \{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$;

(ii) $U(\cdot,\cdot)$ 是渐近紧的.

定义 2.10 [13,18,19] 如果对所有的 $\tau \leqslant t$, 有

$$U(t,\tau)A_\tau = A_t,$$

则时间依赖吸引子 $\mathfrak{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是不变的.

3. 解的适定性和正则性

首先, 我们对问题 (2.4), (2.5) 的解作出如下定义.

定义 3.1 对任意的 $\tau \in \mathbb{R}, \tau \leqslant t$ 和 $\omega \in V_2$, 如果

$$u^\alpha \in L^\infty([\tau,T];V_2) \cap L^2([\tau,T];V_1), \quad \partial_t u^\alpha \in L^\infty([\tau,T];V_\alpha) \cap L^2([\tau,T];V_1),$$

并满足

$$\langle \varepsilon(t)(1+A^\alpha)\partial_t^2 u^\alpha, \omega\rangle + \langle u^\alpha, \omega\rangle_2 + \gamma\langle \partial_t u^\alpha, \omega\rangle_1 + \langle f(u^\alpha), \omega\rangle = \langle g(x), \omega\rangle,$$

则称二元组 $y^\alpha = (u^\alpha, \partial_t u^\alpha)$ 是问题 (2.4), (2.5) 在区间 $[\tau, T]$ 上的一个弱解.

定理 3.2 设 (1.3)-(1.6) 成立且 $g \in L^2(\Omega)$, 则对每一个 $T > \tau$, $\alpha \in [0,1)$, 问题 (2.4), (2.5) 的弱解 $y = (u^\alpha, \partial_t u^\alpha) \in C([\tau,T];\mathcal{H}_t^\alpha) \cap L^2([\tau,T];V_1 \times V_1)$, $\partial_t^2 u^\alpha \in L^\infty([\tau,T];V_{\alpha-4}) \cap L^2([\tau,T];V_{\alpha-3})$, 满足:

$$\begin{aligned}
&\|u^\alpha(t)\|_2^2 + \varepsilon(t)\|\partial_t u^\alpha(t)\|^2 + \varepsilon(t)\|\partial_t u^\alpha(t)\|_\alpha^2 + \varepsilon^2(t)\|\partial_t^2 u^\alpha(t)\|_{\alpha-4}^2 \\
&\quad + \int_t^{t+1} (\|u^\alpha(s)\|_1^2 + \varepsilon^2(t)\|\partial_t^2 u^\alpha(s)\|_{\alpha-3}^2)\mathrm{d}s + \int_\tau^t \|\partial_t u^\alpha(s)\|_1^2 \mathrm{d}s \\
&\leqslant C(R, \beta_0, \|g\|, \lambda_1, C_1, C_2, L), \ t \geqslant \tau.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

此外, 弱解还满足下列性质:

(i) (耗散性) 存在一个不依赖于 $\alpha \in [0,1)$ 和正常数 R_0, 使得

$$\|(u^\alpha, \partial_t u^\alpha)\|_{\mathcal{H}_t^\alpha} \leqslant R_0, \ \forall\, t \geqslant t(R), \tag{3.2}$$

其中 $\tau \leqslant t - t(R)$ 和 $t(R)$ 是不依赖于 R 的常数.

(ii) (能量等式) 对每一个 $\tau \leqslant s \leqslant t$, 下列能量等式

$$\begin{aligned}
E(u^\alpha(t), \partial_t u^\alpha(t)) + 2\gamma \int_s^t \|\partial_t u^\alpha(r)\|_1^2 \mathrm{d}r = &\int_s^t [\varepsilon'(r)\|\partial_t u^\alpha(r)\|^2 + \varepsilon'(r)\|\partial_t u^\alpha(r)\|_\alpha^2]\mathrm{d}r \\
&+ E(u^\alpha(s), \partial_t u^\alpha(s)),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

成立, 其中

$$E(u^\alpha(t), \partial_t u^\alpha(t)) = \varepsilon(t)\|\partial_t u^\alpha(t)\|^2 + \varepsilon(t)\|\partial_t u^\alpha(t)\|_\alpha^2 + \|u^\alpha(t)\|_2^2 + 2\langle F(u^\alpha(t)), 1\rangle - 2\langle g, u^\alpha(t)\rangle.$$

(iii) (在弱拓扑空间的 Lipschitz 连续性) 解 $y^\alpha = (u^\alpha, \partial_t u^\alpha)$ 在空间 $V_{1+\alpha} \times V_{2\alpha-1}$ 上是 Lipschitz 连续的, 即

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u}^\alpha(t)\|_{1+\alpha}^2 + \varepsilon(t)\|\partial_t \tilde{u}^\alpha(t)\|_{2\alpha-1}^2 + \int_\tau^t (\|\tilde{u}^\alpha(s)\|_2^2 + \|\partial_t \tilde{u}^\alpha(s)\|_\alpha^2)\mathrm{d}s \\
&\leqslant (\frac{\mu_3}{\mu_2}\mathrm{e}^{\tilde{C}_0(t-\tau)} + \frac{\mu_3}{k}\mathrm{e}^{2\tilde{C}_0(t-\tau)}(\|\tilde{u}^\alpha(\tau)\|_{1+\alpha}^2 + \varepsilon(\tau)\|\partial_t \tilde{u}^\alpha(\tau)\|_{2\alpha-1}^2),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $\tilde{y}^\alpha = (\tilde{u}^\alpha, \partial_t \tilde{u}^\alpha) = y_1^\alpha - y_2^\alpha$, $y_i^\alpha = (u_i^\alpha, \partial_t u_i^\alpha)$ $(i = 1,2)$ 是问题 (2.4), (2.5) 分别关于初值 (u_{i_0}, u_{i_1}) $(i = 1,2)$ 的弱解, 并且

$$\tilde{C}_0 = C(R, \beta_0, \|g\|, \lambda_1, C_1, C_2, L, \delta).$$

(iv) ($t>\tau$ 时的全局正则性) 对任意的 $\tau<qa<a<t\leqslant T$ (当 $a>0$ 时, $0<q<1$, 或 当 $a<0$ 时, $q>1$),

$$(\partial_t u^\alpha,\partial_t^2 u^\alpha)\in L^\infty([a,T];V_{1+\alpha}\times V_{2\alpha-1})\cap L^2([a,T];V_2\times V_\alpha),$$

满足

$$\begin{aligned}&\|\partial_t u^\alpha\|_{1+\alpha}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t^2 u^\alpha\|_{2\alpha-1}^2+\int_t^{t+1}(\|\partial_t^2 u^\alpha(s)\|_\alpha^2+\|\partial_t u^\alpha(s)\|_2^2)\mathrm{d}s\\&\quad\leqslant(\frac{1}{\mu_6}+\frac{1}{k_1}\mathrm{e}^{\tilde C_0})\frac{\tilde C_2}{\tilde C_2=1}\frac{\mathrm{e}^{\tilde C_1(t-\tau)}}{(t-\tau)^2},\ \ \forall\, t>\tau.\end{aligned}\tag{3.5}$$

与此同时

$$u^\alpha\in L^\infty([a,T];V_{3-\alpha})\cap L^2([a,T];V_{4-\alpha}),$$

满足

$$\begin{aligned}&\|u^\alpha\|_{3-\alpha}^2+\int_t^{t+1}\|u^\alpha(s)\|_{4-\alpha}^2\mathrm{d}s\\&\quad\leqslant\tilde C_4\mathrm{e}^{\tilde C_3(t-qa)}(t-qa)+\frac{\tilde C_5}{\theta(1-\theta)}\mathrm{e}^{\tilde C_3(t-qa)}(t-qa)^{-1}\\&\qquad+\tilde C_4\mathrm{e}^{\tilde C_3(t-qa)}\frac{\tilde C_2}{k_1\tilde C_1}\frac{\mathrm{e}^{\tilde C_1(qa-\tau)}\mathrm{e}^{\tilde C_0(t-qa)}}{(qa-\tau)^2}+\tilde C_4(\frac{1}{k_1}\frac{\tilde C_2}{\tilde C_1}\mathrm{e}^{\tilde C_0}\frac{\mathrm{e}^{\tilde C_1(t-\tau)}}{(t-\tau)^2}))\\&\qquad+\mathrm{e}^{-\tilde C_3}(\tilde C_4\mathrm{e}^{\tilde C_3(t-qa)}(t-qa)+\tilde C_4,\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中

$$\begin{aligned}&\tilde C_1=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,L,\delta),\qquad \tilde C_2=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,L,\delta),\\&\tilde C_3=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,),\qquad \tilde C_4=C(\|g\|,L),\\&\tilde C_5=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2).\end{aligned}$$

证明 分五步证明定理 3.2,为了简单起见,我们省去上标 α, 并令 $u=u^\alpha$.

第一步 证明能量等式 (3.3).

u_t 乘以方程 (2.4) 并在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|^2+\varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|_\alpha^2+\|u(t)\|_2^2+2\langle F(u(t)),1\rangle-2\langle g,u(t)\rangle]\\&\qquad+2\gamma\|\partial_t u\|_1^2=\varepsilon'(t)\|\partial_t u\|^2+\varepsilon'(t)\|\partial_t u\|_\alpha^2.\end{aligned}$$

对上式在 $[s,t]$ 上积分, 可证得 (3.3) 成立.

第二步 证明 (3.1) 成立.

注: $\varepsilon(\cdot)$ 是单调递减的, 则 $\varepsilon'(t)<0$. 此外,

$$
\begin{aligned}
&E(u(t),\partial_t u(t))+2\gamma\int_\tau^t\|\partial_t u(s)\|_1^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant E(u_0,u_1)\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2),\quad t\geqslant\tau.
\end{aligned}\tag{3.7}
$$

由 (1.6), 注 1.2 和嵌入 $V_2\hookrightarrow\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, 可得

$$
2\langle F(u),1\rangle\leqslant 2C_1(\|u\|^2+\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1})\leqslant C_2(\|u\|_2^2+\|u\|_2^{p+1}).\tag{3.8}
$$

由 $g\in L^2(\Omega)$, 可知

$$
2|\langle g,u\rangle|\leqslant\frac{\beta_0}{4}\|u\|_2^2+\frac{4}{\beta_0\lambda_1^2}\|g\|^2,\tag{3.9}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&E(u_0,u_1)\\
&=\varepsilon(\tau)\|u_1\|^2+\varepsilon(\tau)\|u_1\|_\alpha^2+\|u_0\|_2^2+2\langle F(u_0),1\rangle-2\langle g(x),u_0\rangle\\
&\leqslant\varepsilon(\tau)(1+\frac{1}{\lambda_1^\alpha})\|u_1\|_\alpha^2+\|u_0\|_2^2+C_2(\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^{p+1})+\frac{\beta_0}{4}\|u_0\|_2^2+\frac{4}{\beta_0\lambda_1^2}\|g\|^2\\
&\leqslant\mu_0(\varepsilon(\tau)\|u_1\|_\alpha^2+\|u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^{p+1})+C^*\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2),
\end{aligned}
$$

其中 $\mu_0=\max\{(1+\frac{1}{\lambda_1^\alpha}),C_2,1+C_2+\frac{\beta_0}{4}\}$, $C^*=\frac{4}{\beta_0\lambda_1^2}\|g\|^2$, 可得 (3.7) 成立.
由注 1.1, 可知

$$
2\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\geqslant-(1-\beta_0)\|u(t)\|_2^2-C_{\beta_0}\geqslant(\beta_0-1)\|u(t)\|_2^2-C_{\beta_0}.\tag{3.10}
$$

由 (3.9) 和 (3.10), 可知

$$
\mu_1\|(u(t),\partial_t u(t))\|_{\mathcal{H}_t^\alpha}^2-C_3\leqslant E(u(t),\partial_t u(t))\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2),\tag{3.11}
$$

其中 $\mu_1=\min\{1,\frac{3\beta_0}{4}\}$, $C_3=\frac{4}{\beta_0\lambda_1^2}\|g\|^2+C_{\beta_0}$.
根据 (3.8) 和 (3.13), 可得

$$
\int_\tau^t\|\partial_t u(s)\|_1^2\mathrm{d}s\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\gamma,\lambda_1,C_2),\quad t\geqslant\tau.\tag{3.12}
$$

由嵌入 $L^{1+\frac{1}{p}}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow V_{-2}\hookrightarrow\hookrightarrow V_{\alpha-4}$ 和方程 (2.4), 可得

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2(t)\|\partial_t^2u(t)\|_{\alpha-4}^2\\
&\leqslant\|u(t)\|^2+\gamma^2\|\partial_t u(t)\|_{-2}^2+\|f(u)\|_{-4}^2+\|g\|_{-4}^2\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\gamma,\lambda_1,C_2)(\|u(t)\|^2+\|\partial_t u(t)\|_{-2}^2+\|f(u)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}^2+\|g\|^2)\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\gamma,\lambda_1,C_2)(\|u(t)\|_2^2+\|u(t)\|_2^{2p}+\|\partial_t u(t)\|_1^2+\|g\|^2)\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\gamma,\lambda_1,C_2).
\end{aligned}\tag{3.13}
$$

DOI: 10.12677/pm.2023.1312371

(2.4) 与 $A^{-1}u$ 作内积, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon(t)\langle(1+A^{\alpha})\partial_t u, A^{-1}u\rangle)+\|u\|_1^2+\gamma\langle A\partial_t u, A^{-1}u\rangle+\langle f(u), A^{-1}u\rangle\\&=\varepsilon(t)\|\partial_t u\|_{-1}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t u\|_{\alpha-1}^2+\varepsilon'(t)\langle(1+A^{\alpha})\partial_t u, A^{-1}u\rangle+\langle g, A^{-1}u\rangle.\end{aligned}\tag{3.14}$$

进一步, 分别处理 (3.14) 的每一项:

$$\begin{aligned}|\langle g, A^{-1}u\rangle|&\leqslant\|g\|_{-3}\|u\|_1\leqslant\frac{1}{4}\|u\|_1^2+C(\|g\|,\lambda_1),\\|\gamma\langle A\partial_t u, A^{-1}u\rangle|&\leqslant\gamma\|\partial_t u\|_{-1}\|u\|_1\leqslant\frac{1}{4}\|u\|_1^2+C(\gamma,\lambda_1)\|\partial_t u\|_1^2,\\|\varepsilon(t)\langle(1+A^{\alpha})\partial_t u, A^{-1}u\rangle|&\leqslant L\|u\|_{-2}\|\partial_t u\|+L\|u\|_{\alpha-2}\|\partial_t u\|_{\alpha}\\&\leqslant C(\lambda_1)L\|u\|_2\|\partial_t u\|_{\alpha}\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,L),\\|\varepsilon'(t)\langle(1+A^{\alpha})\partial_t u, A^{-1}u\rangle|&\leqslant L\|u\|_{-2}\|\partial_t u\|+L\|u\|_{\alpha-2}\|\partial_t u\|_{\alpha}\\&\leqslant C(\lambda_1)L\|u\|_2\|\partial_t u\|_{\alpha}\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,L)\\|\langle f(u), A^{-1}u\rangle|&\leqslant C_1\int_{\Omega}|A^{-\frac{1}{2}}u||A^{-\frac{1}{2}}u|+|u|^p|A^{-1}u|\mathrm{d}x\\&\leqslant C(\lambda_1,C_1)\|u\|_2^2+C_1\|A^{-1}u\|_{L^{\frac{2N}{N-6}}}\|u\|^p_{L^{\frac{2Np}{N+6}}}\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)+C_1\|u\|_1\|u\|^p_{L^{\frac{2Np}{N+6}}}\\&\leqslant\frac{1}{4}\|u\|_1^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2).\end{aligned}\tag{3.15}$$

将上述估计代入 (3.14), 有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon(t)\langle(1+A^{\alpha})\partial_t u, A^{-1}u\rangle)+\frac{1}{4}\|u\|_1^2\\&\quad\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,\gamma)\|\partial_t u\|^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,L),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+1}\|u(s)\|_1^2\mathrm{d}s\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,L)+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,\gamma)\int_t^{t+1}\|\partial_t u(s)\|_1^2\mathrm{d}s\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,\gamma,L).\end{aligned}\tag{3.16}$$

考虑嵌入 $L^{\frac{2N}{N+6}}\hookrightarrow V_{-3}$, (3.15) 和 (3.16), 有

$$\begin{aligned}\|f(u)\|_{-3}^2&\leqslant C(\|u\|^2_{L^{\frac{2N}{N+6}}}+\|u\|^{2p}_{L^{\frac{2Np}{N+6}}})\\&\leqslant C(\|u\|_2^2+\|u\|_2^{2p})\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2),\end{aligned}$$

因此 $f(u) \in L^2([\tau,T];V_{-3})$.
由 $f(u) \in L^2([\tau,T];V_{-3})$, 嵌入 $L^{\frac{2N}{N+6}}(\Omega) \hookrightarrow V_{-3}$ 和方程 (2.4), 可得

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(t)\|\partial_t^2 u(t)\|_{\alpha-3}^2 &\leqslant \|u(t)\|_1^2 + \gamma^2\|\partial_t u(t)\|_{-1}^2 + \|f(u)\|_{-3}^2 + \|g\|_{-3}^2 \\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,\gamma,C_2)(\|u(t)\|_1^2 + \|\partial_t u(t)\|_1^2 + \|g\|^2) \\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,\gamma,C_2)(\|u(t)\|_1^2 + \|\partial_t u(t)\|_1^2).\end{aligned}$$

根据 (3.12) 和 (3.16), 可得

$$\partial_t^2 u \in L^2([\tau,T];V_{\alpha-3}). \tag{3.17}$$

由 (3.7), (3.11), (3.12), (3.13), (3.16) 和 (3.17), 可得 (3.1) 成立.

第三步 建立问题 (2.4), (2.5) 的解在空间 $C([\tau,T];\mathcal{H}_t^\alpha) \cap L^2([\tau,T];V_1 \times V_1)$ 上的存在性设 $y_n = (u_n, \partial_t u_n)$ 是问题 (2.4), (2.5) 的解. 易知估计 (3.1) 对 Galerkin 逼近序列 $\{y_n\}$ 成立. 因此, 存在 $(u,\partial_t u) \in L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_t^\alpha) \cap L^2([\tau,T];V_1 \times V_1)$, $\partial_t^2 u \in L^\infty([\tau,T];V_{\alpha-4}) \cap L^2([\tau,T];V_{\alpha-3})$, 使得

$$\begin{aligned}&(u_n,\partial_t u_n) \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_t^\alpha) \text{ 中弱*收敛于 } (u,\partial_t u),\\ &(u_n,\partial_t u_n) \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_1 \times V_1) \text{ 中弱收敛于 } (u,\partial_t u),\\ &\partial_t^2 u_n \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];V_{\alpha-4}) \text{ 中弱*收敛于 } \partial_t^2 u,\\ &\partial_t^2 u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_{\alpha-3}) \text{ 中弱收敛于 } \partial_t^2 u.\end{aligned}$$

应用引理 2.6, 可得

$$\text{当 } \eta\text{: } 0<\eta\ll 1 \text{ 时, } (u_n,\partial_t u_n) \text{ 在 } C([\tau,T];V_{2-\eta}\times V_{\alpha-\eta}) \text{ 中收敛于 } (u,\partial_t u), \tag{3.18}$$

$$u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_2) \text{ 中收敛于 } u, \text{ 且 } u_n(x,t) \text{ 在 } \Omega\times[\tau,T] \text{中几乎处处收敛于 } u(x,t), \tag{3.19}$$

$$\partial_t u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_\alpha) \text{ 中收敛于 } \partial_t u, \tag{3.20}$$

$$f(u_n) \text{ 在 } L^{1+\frac{1}{p}}([\tau,T];L^{1+\frac{1}{p}}(\Omega)) \text{ 中收敛于 } f(u). \tag{3.21}$$

对任意的 $\xi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\int_\tau^T \langle A^2 u_n - A^2 u, \xi_1\rangle \mathrm{d}t \leqslant \int_\tau^T \|A(u_n(t)-u(t))\|\|A\xi_1\|\mathrm{d}t = \int_\tau^T \|(u_n(t)-u(t))\|_2\|\xi_1\|_2\mathrm{d}t \to 0.$$

此外, 对任意的 $\xi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, 可得

$$\begin{aligned}\int_\tau^T \langle f(u_n)-f(u),\xi_1\rangle \mathrm{d}t &\leqslant C_2\int_\tau^T (1+\|u_n\|_2^{p-1}+\|u\|_2^{p-1})\|u_n-u\|_2\|\xi_1\|_2\mathrm{d}t \\ &\leqslant C(R,\|g\|,\lambda_1,C_2)\|u_n-u\|_{L^2([\tau,T],V_2)} \to 0.\end{aligned}$$

综上所述, 可得 $y=(u,\partial_t u)$ 是问题 (2.4), (2,5) 满足 (3.1) 的解.

进一步, 证明问题 (2.4), (2,5) 的解 $y=(u,\partial_t u) \in C([\tau,T];\mathcal{H}_t^\alpha)$.

DOI: 10.12677/pm.2023.1312371

根据 $(u(t),\partial_t u(t))\in C([\tau,T];V_{2-\eta}\times V_{\alpha-\eta})\cap L^\infty(\tau,T;\mathcal{H}_t^\alpha)$, 有

$$\begin{aligned}&(u,\partial_t u)\in C_w([\tau,T];\mathcal{H}_t^\alpha),\\&\|(u,\partial_t u)\|_{\mathcal{H}_t^\alpha}\leqslant\liminf_{s\to t}\|(u(s),\partial_t u(s))\|_{\mathcal{H}_t^\alpha}.\end{aligned}$$

对任意的 $t\in[\tau,T]$, 根据 (3.3), 可知

$$\lim_{s\to t}E(u(s),\partial_t u(s))=E(u(t),\partial_t u(t)).\tag{3.22}$$

由 (3.18)-(3.21), 可得当 $s\to t$ 时, $u(x,s)\to u(x,t)$ a.e. $x\in\Omega$, 应用引理 2.5, 注 1.1 和 Fatou 引理, 有

$$\lim_{s\to t}2\langle g,u(s)\rangle=2\langle g,u(t)\rangle,$$

$$\|(u(t),\partial_t u(t))\|_{\mathcal{H}_t^\alpha}^2\leqslant\liminf_{s\to t}\|(u(s),\partial_t u(s))\|_{\mathcal{H}_t^\alpha}^2,$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(2F(u(t))+(1-\beta_0)\lambda_1^2|u(t)|^2+C(\beta_0))\mathrm{d}x\\&\leqslant\liminf_{s\to t}\int_\Omega(2F(u(s))+(1-\beta_0)\lambda_1^2|u(s)|^2+C(\beta_0))\mathrm{d}x\\&\leqslant\liminf_{s\to t}\int_\Omega 2F(u(s))\mathrm{d}x+(1-\beta_0)\lambda_1^2\|u\|^2+C(\beta_0)|\Omega|,\end{aligned}$$

即

$$\int_\Omega 2F(u(t))\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{s\to t}\int_\Omega 2F(u(s))\mathrm{d}x.$$

由上述估计和 (3.18)-(3.21), 有

$$\begin{aligned}&\liminf_{s\to t}[\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|^2+\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|_\alpha^2]+\liminf_{s\to t}[\|u(s)\|_2^2]+2\langle F(u(s)),1\rangle]\\&\leqslant\lim_{s\to t}[\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|^2+\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|_\alpha^2+\|u(s)\|_2^2+2\langle F(u(s)),1\rangle]\\&=\varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|^2+\varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|_\alpha^2+\|u(t)\|_2^2+2\langle F(u(t)),1\rangle\\&\leqslant\liminf_{s\to t}[\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|^2+\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|_\alpha^2]+\liminf_{s\to t}[\|u(s)\|_2^2]+2\langle F(u(s)),1\rangle],\end{aligned}$$

因此

$$\varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|^2+\varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|_\alpha^2=\lim_{s\to t}[\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|^2+\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|_\alpha^2].$$

同理可得

$$\|u(t)\|_2^2=\lim_{s\to t}\|u(s)\|_2^2.\tag{3.23}$$

根据空间 $\mathcal{H}_t^\alpha$ 的一致连续性, 结合 (3.22), (3.23) 和 $(u,\partial_t u)\in C_w([\tau,T];\mathcal{H}_t^\alpha)$, 可得 $(u,\partial_t u)\in C([\tau,T];\mathcal{H}_t^\alpha)$.

下面证明解在空间 $V_{1+\alpha}\times V_{2\alpha-1}$ 中的 Lipschitz 连续性.

设 $y_i(t)$ $(i=1,2)$ 是问题 (2.4), (2.5) 满足 $\|y_i(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau^\alpha} \leqslant R$ $(i=1,2)$ 的解, 则 $\tilde{y}=(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})=y_1-y_2$, 满足

$$\varepsilon(t)(1+A^\alpha)\partial_t^2\tilde{u}+A^2\tilde{u}+\gamma A\partial_t\tilde{u}+f_1-f_2=0,\ (x,t)\in\Omega\times[\tau,+\infty), \tag{3.24}$$

$$\tilde{u}|_{\partial\Omega}=0,\quad \tilde{u}(x,\tau)=u_{1_0}(x)-u_{2_0}(x),\quad \partial_t\tilde{u}(x,\tau)=u_{1_1}(x)-u_{2_1}(x), \tag{3.25}$$

其中 $f_i=f(u_i), i=1,2.$

在下面的估计中, 我们选择 δ 为任意小的正常数.

将 (3.24) 式与 $2A^{\alpha-1}\partial_t\tilde{u}+2\delta\tilde{u}$ 作内积, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})+2\delta\|\tilde{u}\|_2^2+2\gamma\|\partial_t\tilde{u}\|_\alpha^2-2\delta\varepsilon(t)\|\partial_t\tilde{u}\|_\alpha^2-2\delta\varepsilon(t)\|\partial_t\tilde{u}\|^2\\&=\sum_{j=1}^{4}\Pi_j+\varepsilon'(t)\|\partial_t\tilde{u}\|_{\alpha-1}^2+\varepsilon'(t)\|\partial_t\tilde{u}\|_{2\alpha-1}^2,\end{aligned} \tag{3.26}$$

其中

$$\begin{aligned}K(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})&=2\delta\varepsilon(t)\langle A^\alpha\partial_t\tilde{u},\tilde{u}\rangle+2\delta\varepsilon(t)\langle\tilde{u},\partial_t\tilde{u}\rangle+\varepsilon(t)\|\partial_t\tilde{u}\|_{\alpha-1}^2\\&\quad+\varepsilon(t)\|\partial_t\tilde{u}\|_{2\alpha-1}^2+\|\tilde{u}\|_{1+\alpha}^2+\gamma\delta\|\tilde{u}\|_1^2,\\\Pi_1&=2\delta\varepsilon'(t)\langle\partial_t\tilde{u},\tilde{u}\rangle,\\\Pi_2&=2\delta\varepsilon'(t)\langle A^\alpha\partial_t\tilde{u},\tilde{u}\rangle,\\\Pi_3&=-2\langle f(u_1)-f(u_2),A^{\alpha-1}\partial_t\tilde{u}\rangle,\\\Pi_4&=-2\langle f(u_1)-f(u_2),\delta\tilde{u}\rangle.\end{aligned}$$

根据 (1.4) 以及 $2\alpha-1<1+\alpha$,可知

$$\begin{aligned}|2\delta\varepsilon(t)\langle\tilde{u},\partial_t\tilde{u}\rangle|&\leqslant 4\delta^2L\|\tilde{u}\|_{1+\alpha}^2+\frac{\varepsilon(t)}{4}\|\partial_t\tilde{u}\|_{2\alpha-1}^2,\\|2\delta\varepsilon(t)\langle A^\alpha\partial_t\tilde{u},\tilde{u}\rangle|&\leqslant 4\delta^2L\|\tilde{u}\|_{1+\alpha}^2+\frac{\varepsilon(t)}{4}\|\partial_t\tilde{u}\|_{2\alpha-1}^2.\end{aligned}$$

存在常数 μ_2, μ_3, 有

$$\mu_2(\|\tilde{u}(t)\|_{1+\alpha}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t\tilde{u}(t)\|_{2\alpha-1}^2)\leqslant K(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})\leqslant\mu_3(\|\tilde{u}(t)\|_{1+\alpha}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t\tilde{u}(t)\|_{2\alpha-1}^2), \tag{3.27}$$

其中 $\mu_2=\min\{\frac{1}{2},1-8\delta^2L\}$, $\mu_3=\max\{\frac{3}{2}+\frac{1}{\lambda_1^\alpha},1+\frac{\gamma\delta}{\lambda_1^\alpha}+8\delta^2L\}$.

由 (3.1) 和插值定理, 可得

$$\begin{aligned}|\Pi_1|&\leqslant 2\delta^2L\|\tilde{u}\|_{1+\alpha}^2+\frac{L}{2}\|\partial_t\tilde{u}\|_{2\alpha-1}^2,\\|\Pi_2|&\leqslant 2\delta^2L\|\tilde{u}\|_{1+\alpha}^2+\frac{L}{2}\|\partial_t\tilde{u}\|_{2\alpha-1}^2,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\Pi_3| &\leqslant 2\int_\Omega |f(u_1)-f(u_2)|\cdot|A^{\alpha-1}\partial_t\tilde{u}|\mathrm{d}x\\
&\leqslant 2C_1\Big(\int_\Omega (1+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})^{\frac{2N}{6-2\eta}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{6-2\eta}{2N}}\Big(\int_\Omega |\tilde{u}|^{\frac{2N}{N-4+2\eta}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{N-4+2\eta}{2N}}\\
&\quad\ \Big(\int_\Omega |A^{\alpha-1}\partial_t\tilde{u}|^{\frac{2N}{N-2}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{N-2}{2N}}\\
&\leqslant C_1(1+\|u_1\|_2^{p-1}+\|u_2\|_2^{p-1})(\|\tilde{u}\|_{2-\eta}^2+\|A^{\alpha-1}\partial_t\tilde{u}\|_1^2)\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)(\|\tilde{u}\|_{2-\eta}^2+\|\partial_t\tilde{u}\|_{2\alpha-1}^2)\\
&\leqslant \delta(\frac{1}{4}\|\tilde{u}\|_2^2+\|\partial_t\tilde{u}\|_\alpha^2)+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,\delta)(\|\tilde{u}\|_{1+\alpha}^2+\|\partial_t\tilde{u}\|_{2\alpha-1}^2),\\
|\Pi_4| &\leqslant 2\int_\Omega |f(u_1)-f(u_2)|\cdot|\delta\tilde{u}|\mathrm{d}x\\
&\leqslant 2C_1\delta\Big(\int_\Omega (1+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})^{\frac{p+1}{p-1}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{p-1}{p+1}}\Big(\int_\Omega |\tilde{u}|^{p+1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{2}{p+1}}\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,\delta)\|\tilde{u}\|_{2-\eta}^2\\
&\leqslant \frac{\delta}{4}\|\tilde{u}\|_2^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,\delta)\|\tilde{u}\|_{1+\alpha}^2,
\end{aligned}
$$

其中我们用到 Sobolev 嵌入: $0<\eta\ll 1$,
$V_{2-\eta}\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega),\quad V_\alpha\hookrightarrow\hookrightarrow V_{2\alpha-1},\quad V_2\hookrightarrow\hookrightarrow V_{2-\eta}\hookrightarrow\hookrightarrow V_{1+\alpha}.$

将以上估计代入 (3.26) 式, 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})+k(\|\tilde{u}\|_2^2+\|\partial_t\tilde{u}\|_\alpha^2)\\
&\quad\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,L,\gamma,\delta)K(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})\\
&\quad=\tilde{C}_0K(\tilde{u},\partial_t\tilde{u}),
\end{aligned}\tag{3.28}
$$

其中 $k=\min\{\frac{3\delta}{2},2\gamma-2\delta L-\delta-2L\delta\frac{1}{\lambda_1^\alpha}\},\quad \tilde{C}_0=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,L,\gamma,\delta)$.

对(3.31)应用 Gronwall 引理并在 $[\tau,T]$ 上积分, 可得

$$
\begin{aligned}
&\mu_2(\|\tilde{u}(t)\|_{1+\alpha}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t\tilde{u}(t)\|_{2\alpha-1}^2)+k\int_\tau^t \mathrm{e}^{\tilde{C}_0(t-s))}(\|\tilde{u}(s)\|_2^2+\|\partial_t\tilde{u}(s)\|_\alpha^2)\mathrm{d}s\\
&\leqslant \mathrm{e}^{\tilde{C}_0(t-\tau)}\mu_3(\|\tilde{u}(\tau)\|_{1+\alpha}^2+\varepsilon(\tau)\|\partial_t\tilde{u}(\tau)\|_{2\alpha-1}^2).
\end{aligned}
$$

第四步 我们将证明问题 (2.4), (2.5) 解的耗散性.

设 $K_1(u,\partial_t u)=E(u,\partial_t u)+2\delta\varepsilon(t)\langle\partial_t u,u\rangle+2\delta\varepsilon(t)\langle A^\alpha\partial_t u,u\rangle$.
此外, 由

$$
2|\delta\varepsilon(t)\langle u,\partial_t u\rangle|\leqslant\frac{4\delta^2L}{\lambda_1^{2+\alpha}}\|u\|_2^2+\frac{\varepsilon(t)}{4}\|\partial_t u\|_\alpha^2
$$

$$
2|\delta\varepsilon(t)\langle A^\alpha\partial_t u,u\rangle|\leqslant\frac{4\delta^2L}{\lambda_1^{2-\alpha}}\|u\|_2^2+\frac{\varepsilon(t)}{4}\|\partial_t u\|_\alpha^2
$$

和 (3.1), 可知存在常数 μ_4, μ_5, 有

$$\mu_4\|(u,\partial_t u)\|^2_{\mathcal{H}_t^\alpha} - C_3 \leqslant K_1(u,\partial_t u) \leqslant \mu_5\|(u,\partial_t u)\|^2_{\mathcal{H}_t^\alpha} + C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2), \tag{3.29}$$

其中 $\mu_4 = \min\{\frac{1}{2}, \frac{3\beta_0}{4} - \frac{4\delta^2 L}{\lambda_1^{2+\alpha}} - \frac{4\delta^2 L}{\lambda_1^{2-\alpha}}\}$, $\mu_5 = \max\{\frac{1}{2}, \frac{4\delta^2 L}{\lambda_1^{2+\alpha}} + \frac{4\delta^2 L}{\lambda_1^{2-\alpha}}\}$, $C_3 = \frac{4}{\beta_0\lambda_1^2}\|g\|^2 + C(\beta_0)$.

将 (2.4) 式乘以 $2\partial_t u + 2\delta u$ 并在 Ω 上积分, 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K_1(u,\partial_t u)+C_3)+\delta(K_1(u,\partial_t u)+C_3)-\varepsilon'(t)(\|\partial_t u\|^2+\|\partial_t u\|_\alpha^2)+2\gamma\delta\langle A\partial_t u,u\rangle+2\gamma\|\partial_t u\|_1^2\\
&\quad+\delta\|u\|_2^2+2\delta\langle f(u),u\rangle)-3\delta\varepsilon(t)(\|\partial_t u\|^2+\|\partial_t u\|_\alpha^2)-2(\delta\varepsilon'(t)+\delta^2\varepsilon(t))\langle u,\partial_t u\rangle\\
&=2\delta\langle F(u),1\rangle+2(\delta\varepsilon'(t)+\delta^2\varepsilon(t))\langle u,A^\alpha\partial_t u\rangle+\delta C_3.
\end{aligned}\tag{3.30}$$

根据 (1.4), 有

$$2|\delta^2\varepsilon(t)\langle u,\partial_t u\rangle| \leqslant \frac{2\delta^3 L}{\lambda_1^{2+\alpha}}\|u\|_2^2 + \frac{\delta L}{2}\|\partial_t u\|_\alpha^2, \tag{3.31}$$

$$2|\delta\varepsilon'(t)\langle u,\partial_t u\rangle| \leqslant \frac{2\delta^{\frac{3}{2}} L}{\lambda_1^{2+\alpha}}\|u\|_2^2 + \frac{\delta^{\frac{1}{2}} L}{2}\|\partial_t u\|_\alpha^2, \tag{3.32}$$

$$2|\delta^2\varepsilon(t)\langle u,A^\alpha\partial_t u\rangle| \leqslant \frac{2\delta^3 L}{\lambda_1^{2-\alpha}}\|u\|_2^2 + \frac{\delta L}{2}\|\partial_t u\|_\alpha^2, \tag{3.33}$$

$$2|\delta\varepsilon'(t)\langle u,A^\alpha\partial_t u\rangle| \leqslant \frac{2\delta^{\frac{3}{2}} L}{\lambda_1^{2-\alpha}}\|u\|_2^2 + \frac{\delta^{\frac{1}{2}} L}{2}\|\partial_t u\|_\alpha^2. \tag{3.34}$$

由 (3.1) 和 (3.10), 可得

$$2\delta\langle F(u),1\rangle + \delta C_3 \leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,C_3,\delta).$$

由 (2.3), 可知

$$\begin{aligned}
|2\gamma\delta\langle A\partial_t u,u\rangle| &\leqslant \gamma\|\partial_t u\|_1^2 + \frac{\gamma\delta^2}{\lambda_1^1}\|u\|_2^2,\\
2\delta\langle f(u),u\rangle &\geqslant 2\delta(\beta_0-1)\|u\|_2^2 - 2\delta C_{\beta_0}.
\end{aligned}$$

将上述估计代入 (3.30), 得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K_1(u,\partial_t u)+C_3)+\delta(K_1(u,\partial_t u)+C_3)+\Upsilon(u,\partial_t u)\\
&\quad\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,C_3,\delta),
\end{aligned}\tag{3.35}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Upsilon(u,\partial_t u) &= (2\delta\beta_0-\delta-\frac{\gamma\delta^2}{2\lambda_1^2}-\frac{2\delta^3 L+2\delta^{\frac{3}{2}}L}{\lambda_1^{2+\alpha}}-\frac{2\delta^3 L+2\delta^{\frac{3}{2}}L}{\lambda_1^{2-\alpha}})\|u\|_2^2\\
&\quad+[\gamma\lambda_1^{1-\alpha}-3\delta L(1+\frac{1}{\lambda_1^\alpha})-\delta L-\delta^{\frac{1}{2}}L]\|\partial_t u\|_\alpha^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

根据 (3.29) 和 (3.35), 可证得问题 (2.4), (2.5) 解的耗散性.

第五步 证明问题 (2.4), (2.5) 解的全局正则性.

将 (2.4) 式关于 t 求导数, 并且令 $v=\partial_t u$, 可得

$$\varepsilon(t)(1+A^\alpha)\partial_t^2 v+\varepsilon'(t)(1+A^\alpha)\partial_t v+A^2 v+\gamma A\partial_t v+f'(u)v=0. \tag{3.36}$$

将(3.36) 式乘以 $A^{\alpha-1}\partial_t v+\delta v$ 并且在 Ω 上积分, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_2(v(t),\partial_t v(t))+2\delta\|v\|_2^2+2(\gamma-\delta\varepsilon(t)-\delta\varepsilon(t)\lambda_1^{-\alpha})\|\partial_t v\|_\alpha^2=\sum_{i=1}^{2}\mathcal{M}_i, \tag{3.37}$$

其中

$$\begin{aligned}K_2(v,\partial_t v)&=2\delta\varepsilon(t)\langle\partial_t v,v\rangle+2\delta\varepsilon(t)\langle A^\alpha\partial_t v,v\rangle\\&\quad+\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{\alpha-1}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{2\alpha-1}^2+\|v\|_{1+\alpha}^2+\gamma\delta\|v\|_1^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1&=-2\varepsilon'(t)\langle A^\alpha\partial_t v+\partial_t v,A^{\alpha-1}\partial_t v\rangle,\\\mathcal{M}_2&=-2\langle f'(u)v,A^{\alpha-1}\partial_t v+\delta v\rangle.\end{aligned}$$

根据 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}2|\delta\varepsilon(t)\langle\partial_t v,v\rangle|&\leqslant 4\delta^2L\|v\|_{1+\alpha}^2+\frac{1}{4}\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{2\alpha-1}^2,\\2|\delta\varepsilon(t)\langle A^\alpha\partial_t v,v\rangle|&\leqslant 4\delta^2L\|v\|_{1+\alpha}^2+\frac{1}{4}\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{2\alpha-1}^2.\end{aligned}$$

存在常数 μ_6 和 μ_7, 使得

$$\mu_6(\|v\|_{1+\alpha}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{2\alpha-1}^2)\leqslant K_2(v,\partial_t v)\leqslant\mu_7(\|v\|_{1+\alpha}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{2\alpha-1}^2), \tag{3.38}$$

其中 $\mu_6=\min\{\frac{1}{2},1-8\delta^2L\}$, $\mu_7=\max\{\frac{3}{2}+\frac{1}{\lambda_1^\alpha},1+8\delta^2L+\frac{\gamma\delta}{\lambda_1^\alpha}\}$.

利用估计 (3.1) 和 Poincaré 不等式, 可得

$$|\mathcal{M}_1|\leqslant 2L\|\partial_t v\|_{2\alpha-1}^2+2L\|\partial_t v\|_{\alpha-1}^2.$$

由于非线性项 f 的增长指数 $1\leq p<p^*=\frac{N-\alpha}{N-4}$, 可知

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_2|&\leqslant 2C_1\int_\Omega(|1+|u|^{p-1})|v||\delta v|\mathrm{d}x+2C_1\int_\Omega(|1+|u|^{p-1})|v||A^{\alpha-1}\partial_t v|\mathrm{d}x\\&\leqslant 2C_1\delta(1+\|u\|_{L^{p+1}}^{p-1})\|v\|_{L^{p+1}}^2+2C_1(1+\|u\|_2^{p-1})(\|v\|_{2-\eta}^2+\|A^{\alpha-1}\partial_t v\|_1^2)\\&\leqslant\delta\|\partial_t v\|_\alpha^2+\delta\|v\|_2^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,\delta)(\|v\|_{1+\alpha}^2+\|\partial_t v\|_{2\alpha-1}^2),\end{aligned} \tag{3.39}$$

其中我们用到了注 1.2 和嵌入 $V_{2-\eta}\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, $(0<\eta\ll 1)$.
将上述估计带入 (3.37), 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_2(v(t),\partial_t v(t))+k_1(\|v\|_2^2+\|\partial_t v\|_\alpha^2)\\&\quad\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,\gamma,\delta)K_2(v(t),\partial_t v(t)),\end{aligned} \tag{3.40}$$

其中 $k_1=\min\{\delta,2\gamma-2\delta L-2\delta L\lambda_1^{-\alpha}-\delta\}$.
对任意的 $t>\tau$, 将 (3.40) 式乘以 $(t-\tau)^2$, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(t-\tau)^2K_2(v(t),\partial_t v(t))]+k_1(t-\tau)^2(\|v\|_2^2+\|\partial_t v\|_\alpha^2)\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,\delta)(t-\tau)^2K_2(v(t),\partial_t v(t))\\&\quad+2(t-\tau)\mu_7(\|v\|_{1+\alpha}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{2\alpha-1}^2)\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,L)(t-\tau)^2K_2(v(t),\partial_t v(t))\\&\quad+\frac{k_1}{2}(t-\tau)^2\|\partial_t v\|_\alpha^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,L,\delta),\end{aligned}$$

其中, 用到如下估计:

$$\begin{aligned}2(t-\tau)\mu_7\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{2\alpha-1}^2&\leqslant 2(t-\tau)\mu_7\|\partial_t v\|_\alpha\varepsilon(t)\|\partial_t^2 u\|_{3\alpha-2}\\&\leqslant\frac{k_1}{2}(t-\tau)^2\|\partial_t v\|_\alpha^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,L,\delta),\\2(t-\tau)\mu_7\|v\|_{1+\alpha}^2&\leqslant 2(t-\tau)\mu_7\|v\|_2\varepsilon(t)\|\partial_t u\|_{2\alpha}\\&\leqslant\frac{k_1}{2}(t-\tau)^2\|v\|_2^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,L,\delta).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((t-\tau)^2K_2(v(t),\partial_t v(t)))+\frac{k_1}{2}(t-\tau)^2(\|v\|_2^2+\|\partial_t v\|_\alpha^2)\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,L,\delta)(t-\tau)^2K_2(v(t),\partial_t v(t))\\&\quad+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,L,\delta).\end{aligned}\tag{3.41}$$

对(3.41)应用 Gronwall 引理并在 $[\tau,T]$ 上积分, 可得

$$K_2(v(t),\partial_t v(t))\leqslant\frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\tilde{C}_1(t-\tau)}}{(t-\tau)^2},\ \ \forall\, t>\tau,\tag{3.42}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1&=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,L,\delta),\\\tilde{C}_2&=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,L,\delta).\end{aligned}$$

对任意的 $\tau<a<t$,对(3.40)式应用 Gronwall 引理并在 $[a,t]$ 上积分, 有

$$K_2(v(t),\partial_t v(t))\mathrm{e}^{\int_a^t-\tilde{C}_0\mathrm{d}r}+k_1\int_a^t\mathrm{e}^{\int_a^s-\tilde{C}_0\mathrm{d}r}(\|v\|_2^2+\|\partial_t v\|_\alpha^2)\mathrm{d}s\leqslant K_2(v(a),\partial_t v(a)).$$

由 (3.42) 和上述估计, 可得

$$\int_a^t(\|v\|_2^2+\|\partial_t v\|_\alpha^2)\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{k_1}\frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\tilde{C}_1(a-\tau)}\mathrm{e}^{\tilde{C}_0(t-a)}}{(a-\tau)^2},\ \ \forall\, t>a.\tag{3.43}$$

对(3.40)式应用 Gronwall 引理并在 $[t,t+1]$ 上积分, 可得

$$K_2(v(t+1),\partial_t v(t+1))\mathrm{e}^{\int_\tau^{t+1}-\tilde{C}_0\mathrm{d}r}+k_1\int_t^{t+1}\mathrm{e}^{\int_\tau^{s}-\tilde{C}_0\mathrm{d}r}(\|v\|_2^2+\|\partial_t v\|_\alpha^2)\mathrm{d}s\leqslant K_2(v(t),\partial_t v(t))\mathrm{e}^{\int_\tau^{t}-\tilde{C}_0\mathrm{d}r},$$

因此

$$\int_t^{t+1}(\|v\|_2^2+\|\partial_t v\|_\alpha^2)\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{k_1}\frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1}\mathrm{e}^{\tilde{C}_0}\frac{\mathrm{e}^{\tilde{C}_1(t-\tau)}}{(t-\tau)^2}.\tag{3.44}$$

结合 (3.42) 和 (3.44) 可得 (3.5) 式, 即

$$\|\partial_t u\|_{1+\alpha}^2+\varepsilon(t)\|\partial_t^2 u\|_{2\alpha-1}^2+\int_t^{t+1}(\|\partial_t^2 u(s)\|_\alpha^2+\|\partial_t u(s)\|_2^2)\mathrm{d}s\leqslant(\frac{1}{\mu_6}+\frac{1}{k_1}\mathrm{e}^{\tilde{C}_0})\frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\tilde{C}_1(t-\tau)}}{(t-\tau)^2},\quad\forall\, t>\tau.$$

将(2.4) 式与 $A^{2-\alpha}u$ 作内积,可得

$$\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{3-\alpha}^2+2\|u\|_{4-\alpha}^2\leqslant 2\langle\varepsilon(t)(1+A^\alpha)\partial_t^2 u,A^{2-\alpha}u\rangle+2\langle g,A^{2-\alpha}u\rangle-2\langle f(u),A^{2-\alpha}u\rangle.\tag{3.45}$$

易知

$$|2\langle g,A^{2-\alpha}u\rangle|\leqslant 4\|g\|^2+\frac{1}{4}\|u\|_{4-\alpha}^2.\tag{3.46}$$

$$|2\varepsilon(t)\langle(1+A^\alpha)\partial_t^2 u,A^{2-\alpha}u\rangle|\leqslant 8L^2\|\partial_t^2 u\|_\alpha^2+\frac{1}{2}\|u\|_{4-\alpha}^2,\tag{3.47}$$

当 $1\leq p<p^*=\frac{N-\alpha}{N-4}$, $N\geq 5$, 时, 可知

$$\begin{aligned}|-2\langle f(u),A^{2-\alpha}u\rangle|&\leqslant 2C_1\Big(\int_\Omega(1+|u|^{p-1})^{\frac{2N}{6-2\alpha}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{6-2\alpha}{2N}}\Big(\int_\Omega|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{2N}{N-4+2\alpha}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{N-4+2\alpha}{2N}}\\&\quad\Big(\int_\Omega|A^{\frac{3}{2}-\alpha}u|^{\frac{2N}{N-2}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{N-2}{2N}}\\&\leqslant C_1(1+\|u\|_2^{p-1})\|A^{\frac{1}{2}}u\|_{2-\alpha}\|A^{\frac{3}{2}-\alpha}u\|_1\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)\|u\|_{3-\alpha}^2+\frac{1}{4}\|u\|_{4-\alpha}^2.\end{aligned}\tag{3.48}$$

综合上述估计, 可得

$$\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{3-\alpha}^2+\|u\|_{4-\alpha}^2\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)\|u\|_{3-\alpha}^2+C(\|g\|,L)(\|\partial_t^2 u\|_\alpha^2+1).\tag{3.49}$$

对任意的 $\tau<qa<a<t$, 满足 $a>0$ 时, $0<q<1$, 或者 $a<0$ 时, $q>1$. 将 (3.49) 式乘以

$(t-qa)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, 可得

$$\begin{aligned}&\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((t-qa)^{\frac{1}{1-\alpha}}\|u\|_{3-\alpha}^2)+(t-qa)^{\frac{1}{1-\alpha}}\|u\|_{4-\alpha}^2\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)(t-qa)^{\frac{1}{1-\alpha}}\|u\|_{3-\alpha}^2+\frac{1}{2}(t-qa)^{\frac{1}{1-\alpha}}\|u\|_{4-\alpha}^2\\&\quad+C(\|g\|,L)(t-qa)^{\frac{1}{1-\alpha}}(\|\partial_t^2u\|_\alpha^2+1)+\frac{(t-qa)^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}}{(1-\alpha)^2}\|u\|_2^2,\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{1-\alpha}(t-qa)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\|u\|_{3-\alpha}^2\leqslant\frac{1}{2}(t-qa)^{\frac{1}{1-\alpha}}\|u\|_{4-\alpha}^2+\frac{(t-qa)^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}}{(1-\alpha)^2}\|u\|_2^2,$$

则有

$$\begin{aligned}&\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((t-qa)^{\frac{1}{1-\alpha}}\|u\|_{3-\alpha}^2)+\frac{1}{2}(t-qa)^{\frac{1}{1-\alpha}}\|u\|_{4-\alpha}^2\\&\leqslant\tilde{C}_3(t-qa)^{\frac{1}{1-\alpha}}\|u\|_{3-\alpha}^2+\tilde{C}_4(t-qa)^{\frac{1}{1-\alpha}}(\|\partial_t^2u\|_\alpha^2+1)+\tilde{C}_5\frac{(t-qa)^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}}{(1-\alpha)^2},\end{aligned}\tag{3.50}$$

其中

$$\tilde{C}_3=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2),\ \ \tilde{C}_4=C(\|g\|,L),\ \ \tilde{C}_5=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2).$$

将 (3.50) 式乘以 $\mathrm{e}^{-\tilde{C}_3(t-qa)}$ 并且在 $[qa,\ t]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{3-\alpha}^2&\leqslant\tilde{C}_4\mathrm{e}^{\tilde{C}_3(t-qa)}(t-qa)+\frac{\tilde{C}_5}{\alpha(1-\alpha)}\mathrm{e}^{\tilde{C}_3(t-qa)}(t-qa)^{-1}\\&\quad+\frac{\tilde{C}_4\mathrm{e}^{\tilde{C}_3(t-qa)}\tilde{C}_2}{k_1\tilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\tilde{C}_1(qa-\tau)}\mathrm{e}^{\tilde{C}_0(t-qa)}}{(qa-\tau)^2},t>qa.\end{aligned}\tag{3.51}$$

将 (3.49) 式乘以 $\mathrm{e}^{-\tilde{C}_3(t-a)}$ 并且在 $[a,t]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\tilde{C}_3(t-a)}\|u(t)\|_{3-\alpha}^2+\int_a^t\mathrm{e}^{-\tilde{C}_3(s-a)}\|u\|_{4-\alpha}^2\mathrm{d}s\\&\leqslant\|u(a)\|_{3-\alpha}^2+\tilde{C}_4\int_a^t\mathrm{e}^{-\tilde{C}_3(s-a)}(\|\partial_t^2u\|_\alpha^2+1)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^t\|u\|_{4-\alpha}^2\mathrm{d}s&\leqslant\mathrm{e}^{\tilde{C}_3(t-a)}(\tilde{C}_4\mathrm{e}^{\tilde{C}_3(a-qa)}(a-qa)+\frac{\tilde{C}_5}{\alpha(1-\alpha)}\mathrm{e}^{\tilde{C}_3(a-qa)}(a-qa)^{-1}\\&\quad+\tilde{C}_4\mathrm{e}^{\tilde{C}_3(a-qa)}\frac{\tilde{C}_2}{k_1\tilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\tilde{C}_1(qa-\tau)}\mathrm{e}^{\tilde{C}_0(a-qa)}}{(qa-\tau)^2}+(t-a)+\frac{1}{k_1}\frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\tilde{C}_1(a-\tau)}\mathrm{e}^{\tilde{C}_0(t-a)}}{(a-\tau)^2}),\ \ t>a.\end{aligned}\tag{3.52}$$

将 (3.49) 式乘以 $\mathrm{e}^{-\tilde{C}_3(t-\tau)}$ 并且在 $[t,t+1]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\tilde{C}_3(t+1-\tau)}\|u(t+1)\|_{3-\alpha}^2+\int_t^{t+1}\mathrm{e}^{-\tilde{C}_3(s-\tau)}\|u\|_{4-\alpha}^2\mathrm{d}s\\ &\leqslant\|u(t)\|_{3-\alpha}^2\mathrm{e}^{-\tilde{C}_3(t-\tau)}+\tilde{C}_4\int_t^{t+1}\mathrm{e}^{-\tilde{C}_3(s-\tau)}(\|\partial_t^2u\|_\alpha^2+1)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{t+1}^t\|u\|_{4-\alpha}^2\mathrm{d}s\leqslant{}&\mathrm{e}^{-\tilde{C}_3}(\tilde{C}_4\mathrm{e}^{\tilde{C}_3(t-qa)}(t-qa)+\frac{\tilde{C}_5}{\alpha(1-\alpha)}\mathrm{e}^{\tilde{C}_3(t-qa)}(t-qa)^{-1}\\ &+\tilde{C}_4\mathrm{e}^{\tilde{C}_3(t-qa)}\frac{\tilde{C}_2}{k_1\tilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\tilde{C}_1(qa-\tau)}\mathrm{e}^{\tilde{C}_0(t-qa)}}{(qa-\tau)^2}+\tilde{C}_4+\tilde{C}_4(\frac{1}{k_1}\frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1}\mathrm{e}^{\tilde{C}_0}\frac{\mathrm{e}^{\tilde{C}_1(t-\tau)}}{(t-\tau)^2})).\end{aligned}\tag{3.53}$$

根据 (3.51) 和 (3.53), 可证得 (3.6) 成立. □

定理 3.3 设条件 (1.3)-(1.6) 成立且 $g\in L^2(\Omega)$. 如果 $y_1^\alpha=(u_1^\alpha,\partial_tu_1^\alpha)$, $y_2^\alpha=(u_2^\alpha,\partial_tu_2^\alpha)$ 是问题 (2.4), (2.5) 分别关于初值 y_{1_0} 和 y_{2_0} 的两个解, 则对任意的 $\tau<T$, 有

$$\|y_1^\alpha(t)-y_2^\alpha(t)\|_{\mathcal{H}_t^\alpha}^2\leqslant\tilde{C}_7\mathrm{e}^{(t-\tau)}\|y_{1_0}-y_{2_0}\|_{\mathcal{H}_\tau^\alpha}^2,\ \ \forall\, t\in[\tau,T],\tag{3.54}$$

其中

$$\tilde{C}_7=C(R,\beta_0,\|g\|,L,\lambda_1,C_1,C_2)\mu_8.$$

证明 设 $\tilde{y}=(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})=y_1-y_2$, 则 $\tilde{y}$ 满足

$$\varepsilon(t)(1+A^\alpha)\partial_t^2\tilde{u}+A^2\tilde{u}+\gamma A\partial_t\tilde{u}+f_1-f_2=0,\ x\in\Omega,\ t\in[\tau,\infty),\tag{3.55}$$

$$\tilde{u}|_{\partial\Omega}=0,\ \ \tilde{u}(x,\tau)=u_{1_0}(x)-u_{2_0}(x),\ \ \partial_t\tilde{u}(x,\tau)=u_{1_1}(x)-u_{2_1}(x),\ \ x\in\Omega,\tag{3.56}$$

其中 $f_i=f(u_i)$, $i=1,2$.

将 (3.55) 式与 $\partial_t\tilde{u}$ 作内积, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_3(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})+2\gamma\|\partial_t\tilde{u}\|_1^2=-2\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\tilde{u}\rangle+\varepsilon'(t)\|\partial_t\tilde{u}\|^2+\varepsilon'(t)\|\partial_t\tilde{u}\|_\alpha^2,\tag{3.57}$$

其中

$$K_3(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})=\varepsilon(t)\|\partial_t\tilde{u}\|^2+\varepsilon(t)\|\partial_t\tilde{u}\|_\alpha^2+\|\tilde{u}\|_2^2.$$

存在常数 μ_8, 使得

$$\|(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})\|_{\mathcal{H}_t^\alpha}^2\leqslant K_3(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})\leqslant\mu_8\|(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})\|_{\mathcal{H}_t^\alpha}^2,\tag{3.58}$$

其中 $\mu_8=\max\{1,1+\frac{1}{\lambda_1^\alpha}\}$.

根据 (3.1), 可得

$$|\varepsilon'(t)\|\partial_t\tilde{u}\|^2| \leqslant L\frac{1}{\lambda_1^1}\|\partial_t\tilde{u}\|_1^2,$$
$$|\varepsilon'(t)\|\partial_t\tilde{u}\|_\alpha^2| \leqslant L\frac{1}{\lambda_1^{1-\alpha}}\|\partial_t\tilde{u}\|_1^2.$$

$$\begin{aligned}
&|-2\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\tilde{u}\rangle| \\
&\quad\leqslant 2\int_\Omega |f(u_1)-f(u_2)|\cdot|\partial_t\tilde{u}|\mathrm{d}x \\
&\quad\leqslant 2C_1\Big(\int_\Omega(1+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})^{\frac{2N}{4+2\alpha}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{4+2\alpha}{2N}}\Big(\int_\Omega|\tilde{u}|^{\frac{2N}{N-4}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{N-4}{2N}}\Big(\int_\Omega|\partial_t\tilde{u}|^{\frac{2N}{N-2\alpha}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{N-2\alpha}{2N}} \\
&\quad\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,L,\lambda_1,C_1,C_2)K_3(\tilde{u},\partial_t\tilde{u}),
\end{aligned}$$

将上述估计代入 (3.57) 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_3(\tilde{u},\partial_t\tilde{u})+\tilde{C}_6\|\partial_t\tilde{u}\|^2 \\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,L,\lambda_1,C_1,C_2)K_3(\tilde{u},\partial_t\tilde{u}),
\end{aligned}\tag{3.59}$$

其中 $\tilde{C}_6 = C(R,\gamma,L,\lambda_1)$.

应用 Gronwall 引理, 可证得 (3.54). 同时, 我们也得到了问题 (2.4), (2.5) 的解在空间 $\mathcal{H}_t^\alpha$ 中的唯一性.

根据定理 3.2 和定理 3.3, 可以定义问题 (2.4), (2.5) 的过程 $U(t,\tau)$ 如下:

$$y(t) = U(t,\tau)y(\tau) : \mathcal{H}_\tau^\alpha \to \mathcal{H}_t^\alpha.$$

4. 时间依赖吸引子的存在性

4.1. 时间依赖吸收集

根据定理 3.2 (i), 可得到如下结果.

定理 4.1 设定理 3.2 的条件成立, 如果对任意的初值 $y(\tau)\in\mathbb{B}_\tau(R)\subset\mathcal{H}_\tau^\alpha$, 那么存在 $R_0>0$, 使得对应于问题 (2.4), (2.5) 的过程 $U(t,\tau)$ 拥有时间依赖吸收集, 即集族 $\mathfrak{B}_t = \{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

4.2. 先验估计

下面对问题 (2.4), (2.5) 的解过程 $U(t,\tau)$ 进行紧性验证. 为此, 做如下先验估计.

设 $y_i(t) = (u_i(t),\partial_t u_i(t))$ $(i=1,2)$ 是问题 (2.4), (2.5) 分别关于初值 $(u_i(\tau),\partial_t u_i(\tau))$ $\in\{\mathbb{B}_\tau(R)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ 的解. 两解之差 $\tilde{y^*}(t) = y_1(t)-y_2(t) = (\omega(t),\partial_t\omega(t))$ 满足以下方程

$$\varepsilon(t)(1+A^\alpha)\partial_t^2\omega+\gamma A\partial_t\omega+f_1-f_2=0,\ x\in\Omega,\ t\in[\tau,\infty),\tag{3.60}$$

$$\omega|_{\partial\Omega}=0,\ \omega(x,\tau)=u_{1_0}(x)-u_{2_0}(x),\ \partial_t\omega(x,\tau)=u_{1_1}(x)-u_{2_1}(x),\ x\in\Omega,\tag{3.61}$$

其中 $f_i = f(u_i)$, $i = 1, 2$.

定义

$$H(t) = \varepsilon(t)\|\partial_t\omega(t)\|^2 + \varepsilon(t)\|\partial_t\omega(t)\|_\alpha^2 + \|\omega(t)\|_2^2.$$

我们将分为以下四步进行先验估计.

第一步 将(3.60) 式乘以 $2\partial_t\omega$, 并在 $[s,t]\times\Omega$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}H(t) - H(s) + 2\gamma\int_s^t\int_\Omega |A^{\frac{1}{2}}\partial_t\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r + 2\int_s^t\int_\Omega(f(u_1) - f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\ = \int_s^t\int_\Omega \varepsilon'(r)|\partial_t\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r + \int_s^t\int_\Omega \varepsilon'(r)|A^{\frac{\alpha}{2}}\partial_t\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r,\end{aligned}\tag{3.62}$$

其中 $T \leqslant s \leqslant t$. 根据 (1.4), 可得

$$\begin{aligned}&\varepsilon(t)|\omega_t(t)|^2 + \varepsilon(t)|A^{\frac{\alpha}{2}}\omega_t(t)|^2\\ &\leqslant L(|\omega_t(t)|^2 + |A^{\frac{\alpha}{2}}\omega_t(t)|^2) - \varepsilon'(t)(|\omega_t(t)|^2 + |A^{\frac{\alpha}{2}}\omega_t(t)|^2),\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}&\int_T^t\int_\Omega(\varepsilon(r)|\partial_t\omega(r)|^2 + \varepsilon(t)|A^{\frac{\alpha}{2}}\omega_t(t)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\ &\leqslant L\int_T^t\int_\Omega(|\partial_t\omega(r)|^2 + |A^{\frac{\alpha}{2}}\omega_t(t)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\ &\quad - \int_T^t\int_\Omega \varepsilon'(r)(|\partial_t\omega(r)|^2 + |A^{\frac{\alpha}{2}}\omega_t(t)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &\leqslant H(T) + L\int_T^t\int_\Omega(|\partial_t\omega(r)|^2 + |A^{\frac{\alpha}{2}}\omega_t(t)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\ &\quad - 2\int_T^t\int_\Omega(f(u_1) - f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r.\end{aligned}\tag{3.63}$$

第二步 将 (3.60) 式乘以 ω, 并且在 $[T,t]\times\Omega$ 上积分, 得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \varepsilon(t)[\partial_t\omega(t)\omega(t) + (A^\alpha\partial_t\omega(t))\omega(t)]\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\|\omega(t)\|_1^2\\ &\quad - \int_\Omega \varepsilon(T)[\partial_t\omega(T)\omega(T) + (A^\alpha\partial_t\omega(T))\omega(T)]\mathrm{d}x + \int_T^t\int_\Omega |A\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\ &\quad + \int_T^t\int_\Omega(f(u_1) - f(u_2))\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r - \int_T^t \varepsilon(r)(\|\partial_t\omega(r)\|^2 + \|\partial_t\omega(r)\|_\alpha^2)\mathrm{d}r\\ &= \frac{\gamma}{2}\|\omega(T)\|_1^2 + \int_T^t\int_\Omega \varepsilon'(r)[\partial_t\omega(t)\omega(t) + (A^\alpha\partial_t\omega(t))\omega(t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}r.\end{aligned}\tag{3.64}$$

DOI: 10.12677/pm.2023.1312371

根据 (3.63), (3.64), 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_T^t H(r)\mathrm{d}r \\
&= \int_T^t (\varepsilon(t)\|\partial_t\omega(t)\|^2 + \varepsilon(t)\|\partial_t\omega(t)\|_\alpha^2 + \|\omega(t)\|_2^2)\mathrm{d}r \\
&\leqslant H(T) + L\int_T^t\int_\Omega (|\partial_t\omega(r)|^2 + |A^{\frac{\alpha}{2}}\omega_t(t)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}r - 2\int_T^t\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r \\
&\quad - \int_T^t\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r - \int_\Omega \varepsilon(t)[\partial_t\omega(t)\omega(t) + (A^\alpha\partial_t\omega(t))\omega(t)]\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_T^t \varepsilon(r)(\|\partial_t\omega(r)\|^2 + \|\partial_t\omega(r)\|_\alpha^2)\mathrm{d}r + \int_\Omega \varepsilon(T)[\partial_t\omega(T)\omega(T) + (A^\alpha\partial_t\omega(T))\omega(T)]\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_T^t\int_\Omega \varepsilon'(r)[\partial_t\omega(t)\omega(t) + (A^\alpha\partial_t\omega(t))\omega(t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}r + + \frac{\gamma}{2}\|\omega(T)\|_1^2.
\end{aligned}
$$

第三步 对 (3.62) 在 $[T,t]$ 上关于 s 积分, 得

$$
\begin{aligned}
&H(t)(t-T) \\
&\leqslant \int_T^t H(s)\mathrm{d}s - 2\int_T^t\int_s^t\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\
&\leqslant H(T) + L\int_T^t\int_\Omega (|\partial_t\omega(r)|^2 + |A^{\frac{\alpha}{2}}\omega_t(t)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}r - 2\int_T^t\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r \\
&\quad - \int_T^t\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r - \int_\Omega \varepsilon(t)[\partial_t\omega(t)\omega(t) + (A^\alpha\partial_t\omega(t))\omega(t)]\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_T^t \varepsilon(r)(\|\partial_t\omega(r)\|^2 + \|\partial_t\omega(r)\|_\alpha^2)\mathrm{d}r + \int_\Omega \varepsilon(T)[\partial_t\omega(T)\omega(T) + (A^\alpha\partial_t\omega(T))\omega(T)]\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_T^t\int_\Omega \varepsilon'(r)[\partial_t\omega(t)\omega(t) + (A^\alpha\partial_t\omega(t))\omega(t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}r + \frac{\gamma}{2}\|\omega(T)\|_1^2 \\
&\quad - 2\int_T^t\int_s^t\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

第四步 记

$$
C(M) = H(T) + \frac{\gamma}{2}\|\omega(T)\|_1^2 + \int_\Omega \varepsilon(T)[\partial_t\omega(T)\omega(T) + (A^\alpha\partial_t\omega(T))\omega(T)]\mathrm{d}x, \tag{3.65}
$$

和

$$
\varphi_T^t((u_1(T),\partial_t u_1(T)),(u_2(T),\partial_t u_2(T))) = \Psi_1 + \Psi_2, \tag{3.66}
$$

其中

$$\begin{aligned}\Psi_1 =&\frac{1}{(t-T)}[L\int_T^t\int_\Omega(|\partial_t\omega(r)|^2+|A^{\frac{\alpha}{2}}\omega_t(t)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\&-\int_\Omega\varepsilon(t)[\partial_t\omega(t)\omega(t)+(A^\alpha\partial_t\omega(t))\omega(t)]\mathrm{d}x\\&+\int_T^t\varepsilon(r)(\|\partial_t\omega(r)\|^2+\|\partial_t\omega(r)\|_\alpha^2)\mathrm{d}r+\\&+\int_T^t\int_\Omega\varepsilon'(r)[\partial_t\omega(t)\omega(t)+(A^\alpha\partial_t\omega(t))\omega(t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}r)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2 =&-\frac{1}{(t-T)}[2\int_T^t\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+\int_T^t\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+2\int_T^t\int_s^t\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s)],\end{aligned}$$

因此

$$H(t)\leqslant\frac{1}{t-T}C_M+\varphi_T^t((u_1(T),\partial_t u_1(T)),(u_2(T),\partial_t u_2(T))).\tag{3.67}$$

4.3. 渐近紧性

下面我们将利用收缩函数方法证明问题 (2.4), (2.5) 解过程的渐近紧性.

定理 4.2 设 (1.3)-(1.6) 成立且 $g\in L^2(\Omega)$. 对于任意固定的 $t\in\mathbb{R}$ 和任意有界的 $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty\subset(-\infty,t]$ (当 $n\to\infty$ 时, $\tau_n\to-\infty$) 以及对于任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{H}_{\tau_n}^\alpha$, 那么序列 $\{U(t,\tau_n)x_n\}_{n=1}^\infty$ 存在一个收敛子列.

证明 对任意的 $\epsilon>0$ 和固定的 t, 存在 $T<t$, 使得 $\frac{C_M}{t-T}<\epsilon$. 根据定理 2.8, 我们还需要证明对于每一个固定的 t, 有 $\varphi_T^t\in\mathfrak{C}(\mathbb{B}_T(R))$.

设 $(u_n,\partial_t u_n)$ 是问题 (2.4), (2.5) 关于初值 $(u_{n_0},u_{n_1})\in\mathbb{B}_T(R)$ 的解. 由定理 3.2, 可知 $\|u_n\|_2^2+\varepsilon(\zeta_1)\|\partial_t u_n\|_\alpha^2$ 是有界的, 且$\|u_n\|_2^2$ 是有界的. 对于任意固定的 t 和任意的 $\zeta_1\in[T,t]$, 根据 (1.4) 和 $\frac{1}{\varepsilon(\zeta_1)}$ 的有界性, 可知 $\|\partial_t u_n\|_\alpha^2$ 也是有界的.

根据 Alaoglu 定理, 引理 2.5 和定理 3.2, 对任意的 $\tau\leqslant T\leqslant t$, 不失一般性, 设

$$u_n \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];V_2) \text{ 中弱}^* \text{ 收敛于 } u,\tag{3.68}$$

$$\partial_t u_n \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];V_\alpha) \text{ 中弱}^* \text{ 收敛于 } \partial_t u,\tag{3.69}$$

$$\partial_t^2 u_n \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];V_{\alpha-4}) \text{ 中弱}^* \text{ 收敛于 } \partial_t^2 u,\tag{3.70}$$

$$u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_1) \text{ 中弱收敛于 } u,\tag{3.71}$$

DOI: 10.12677/pm.2023.1312371

$$\partial_t u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_1) \text{ 中弱收敛于 } \partial_t u, \tag{3.72}$$

$$\partial_t^2 u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_{\alpha-3}) \text{ 中弱收敛于 } \partial_t^2 u, \tag{3.73}$$

$$u_n \text{ 在 } L^{p+1}([\tau,T];L^{p+1}(\Omega)) \text{ 中收敛于 } u, \tag{3.74}$$

$$u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_2) \text{ 中收敛于 } u, \tag{3.75}$$

$$u_n(t) \text{ 在 } L^{p+1}(\Omega) \text{ 中收敛于 } u(t) \text{ 并且 } u_n(T) \text{ 在 } L^{p+1}(\Omega) \text{ 中收敛于 } u(T), \tag{3.76}$$

$$\partial_t u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_\alpha) \text{ 中收敛于 } \partial_t u, \tag{3.77}$$

其中应用 Sobolev 嵌入 $V_2 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$.

根据 (3.54) 可知

$$\{(u_n(s),\partial_t u_n(s))\} \subset C([T,t];\mathcal{H}_s^\alpha) \text{ 是 Cauchy 序列}, \tag{3.78}$$

并且存在 $(u(s),\partial_t u(s)) \in C([T,t];\mathcal{H}_s^\alpha)$, 使得

$$(u_n(s),\partial_t u_n(s)) \text{ 在 } C([T,t];\mathcal{H}_s^\alpha) \text{ 中收敛于 } (u(s),\partial_t u(s)). \tag{3.79}$$

下面, 处理 (3.66) 的每一项.

首先, 估计 Ψ_1. 利用 (3.77) 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} L\int_T^t [\|\partial_t u_n - \partial_t u_m\|^2 + \|\partial_t u_n - \partial_t u_m\|_\alpha^2]\mathrm{d}s = 0, \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\Omega \varepsilon(t)(\partial_t u_n - \partial_t u_m)(u_n - u_m)\mathrm{d}x \\
&\quad\leqslant \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} L\|\partial_t u_n - \partial_t u_m\|\|u_n - u_m\| \\
&\quad\leqslant \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} L(\|\partial_t u_n\| + \|\partial_t u_m\|)\|u_n - u_m\| = 0,
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\Omega \varepsilon(t)(A^{\frac{\alpha}{2}}\partial_t u_n - A^{\frac{\alpha}{2}}\partial_t u_m)(A^{\frac{\alpha}{2}}u_n - A^{\frac{\alpha}{2}}u_m)\mathrm{d}x \\
&\quad\leqslant \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} L\|\partial_t u_n - \partial_t u_m\|_\alpha\|u_n - u_m\|_\alpha \\
&\quad\leqslant \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} L(\|\partial_t u_n\|_\alpha + \|\partial_t u_m\|_\alpha)\|u_n - u_m\|_\alpha = 0,
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t \varepsilon(s)[\|\partial_t u_n - \partial_t u_m\|^2 + \|\partial_t u_n - \partial_t u_m\|_\alpha^2]\mathrm{d}s \\
&\quad\leqslant \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} L\int_T^t [\|\partial_t u_n - \partial_t u_m\|^2 + \|\partial_t u_n - \partial_t u_m\|_\alpha^2]\mathrm{d}s = 0,
\end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t \varepsilon'(s)\langle\partial_t u_n - \partial_t u_m, u_n - u_m\rangle\mathrm{d}s \\
&\quad\leqslant L\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(\int_T^t \|\partial_t u_n - \partial_t u_m\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}\cdot(\int_T^t \|u_n - u_m\|^2 ds)^{\frac{1}{2}} = 0,
\end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t \varepsilon'(s)\langle A^{\frac{\alpha}{2}}\partial_t u_n - A^{\frac{\alpha}{2}}\partial_t u_m, A^{\frac{\alpha}{2}}u_n - A^{\frac{\alpha}{2}}u_m\rangle\mathrm{d}s \\
&\quad\leqslant L\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(\int_T^t \|\partial_t u_n - \partial_t u_m\|_\alpha^2 ds)^{\frac{1}{2}}\cdot(\int_T^t \|u_n - u_m\|_\alpha^2 ds)^{\frac{1}{2}} = 0.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

合并 (3.80)-(3.85), 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Psi_1=0. \tag{3.86}$$

其次, 估计 Ψ_2. 根据 (3.75) 可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u_m))(u_n-u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_\Omega (1+|u_n|^{p-1}+|u_m|^{p-1})|u_n-u_m|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t (1+\|u_n\|_2^{p-1}+\|u_m\|_2^{p-1})\cdot\|u_n-u_m\|_2^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t \|u_n-u_m\|_2^2\mathrm{d}s=0.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

易知

$$\begin{aligned}
&\int_T^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&=\int_\Omega F(u_n(t))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_n(T))\mathrm{d}x+\int_\Omega F(u_m(t))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_m(T))\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_T^t\int_\Omega f(u_m)\partial_t u_n\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_T^t\int_\Omega f(u_n)\partial_t u_m\mathrm{d}x\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

利用 (1.6) 和嵌入$V_2\hookrightarrow\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, 可得

$$\begin{aligned}
&|\int_\Omega (F(u_n(t))-F(u(t)))\mathrm{d}x|\\
&\leqslant \int_\Omega |f(u(t)+\vartheta(u_n(t)-u(t))||u_n(t)-u(t)|\mathrm{d}x\\
&\leqslant C(1+\|u_n(t)\|_{L^{p+1}}^p+\|u(t)\|_{L^{p+1}}^p)\|u_n(t)-u(t)\|_{L^{p+1}}\\
&\leqslant C\epsilon.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

当 $n\to\infty, m\to\infty$ 时, 由于 $f(u_n)\in L^2([\tau,T];V_{-3})$ 和 $\partial_t u_m\in L^2([\tau,T];V_1)$, 可知

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\langle f(u_n),\partial_t u_m\rangle\mathrm{d}s=\int_\Omega F(u(t))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u(T))\mathrm{d}x.$$

同理可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\langle f(u_m),\partial_t u_n\rangle\mathrm{d}s=\int_\Omega F(u(t))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u(T))\mathrm{d}x,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=0. \tag{3.90}$$

对于每一个固定的 t, $|\int_s^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r|$ 是有界的, 则根据 Lebesgue 控制收敛定理, 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_s^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\ &=\int_T^t\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_s^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\ &=\int_T^t 0\,\mathrm{d}s=0.\end{aligned} \tag{3.91}$$

由 (3.87), (3.90) 和 (3.91), 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Psi_2=0. \tag{3.92}$$

综上所述, 可得 $\varphi_T^t((u_1(T),\partial_t u_1(T)),(u_2(T),\partial_t u_2(T)))\in\mathfrak{C}(\mathbb{B}_T(R))$. □

4.4. 时间依赖吸引子

定理 4.3 设 (1.3)-(1.6) 成立且 $g\in L^2(\Omega)$, 则由问题 (2.4), (2.5) 生成的过程 $U(t,\tau):\mathcal{H}_\tau^\alpha\to\mathcal{H}_t^\alpha$ 存在时间依赖吸引子 $\mathfrak{U}^*=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

证明 由定理 3.2, 定理 3.3, 定理 4.1 和定理 4.2 知, 存在时间依赖吸引子 $\mathfrak{U}^*=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, 且该吸引子 $\mathfrak{U}^*$ 是不变的. □

5. 总结与展望

本文研究了带有转动惯量和强阻尼的梁方程在有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域上时间依赖吸引子的存在性问题, 由于在梁方程中加入了转动惯量项和时间依赖系数函数项, 通常动力系统和已有的研究技术框架很难直接应用于该模型的时间依赖吸引子的研究, 所以结合了修正的拉回吸引子理论, 运用先验估计的方法验证了过程族有界吸收集的存在性, 运用收缩函数的方法验证了过程族的渐近紧性, 从而证明了时间依赖吸引子的存在性.

时间依赖吸引子问题理论是近些年的热点研究问题, 研究的关键在于过程族的紧性验证. 因此, 各类偏微分方程时间依赖吸引子问题研究空间较大, 其可以解决生活实际中的一些实际问题所产生的混沌现象以及解释一些抽象的科学现象. 本文证明了非线性项在次临界情况下时间依赖吸引子的存在性, 后续研究能否将强阻尼变为结构阻尼或者非线性项在临界情况下证明时间依赖吸引子问题仍值得我们深入研究.

基金项目

国家自然科学基金项目(批准号：11961060; 11761062)。

参考文献

[1] Jorge Silva, M.A. and Narciso, V. (2015) Attractors and Their Properties for a Class of Nonlocal Extensible Beams. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **35**, 985-1008. https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.985

[2] Chueshov, I. and Lasiecka, I. (2010) Von Karman Evolution Equations, Well-Posedness and Long-Time Dynamics. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-87712-9

[3] Chueshov, I. and Kolbasin, S. (2012) Long-Time Dynamics in Plate Models with Strong Nonlinear Damping. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **11**, 659-674. https://doi.org/10.3934/cpaa.2012.11.659

[4] Coti Zelati, M. (2009) Global and Exponential Attractors for the Singularly Perturbed Extensible Beam. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **25**, 1041-1060. https://doi.org/10.3934/dcds.2009.25.1041

[5] Jorge Silva, M.A. and Narciso, V. (2014) Long-Time Behavior for a Plate Equation with Nonlocal Weak Damping. *Differential and Integral Equations*, **27**, 931-948. https://doi.org/10.57262/die/1404230051

[6] Jorge Silva, M.A. and Narcisov, V. (2017) Long-Time Dynamics for a Class of Extensible Beams with Nonlocal Nonlinear Damping. *Evolution Equations and Control Theory*, **6**, 437-470. https://doi.org/10.3934/eect.2017023

[7] Chueshov, I. and Lasiecka, I. (2008) Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **195**, 1-162. https://doi.org/10.1090/memo/0912

[8] Berger, H.M. (1955) A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates. *Journal of Applied Mechanics*, **22**, 465-472. https://doi.org/10.1115/1.4011138

[9] Niimura, T. (2020) Attractors and Their Stability with Respect to Rotational Inertia for Nonlinear Extensible Beam Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **40**, 2561-2591. https://doi.org/10.3934/dcds.2020141

[10] Sun, Y. and Yang, Z.J. (2022) Attractors and Their Continuity for an Extensible Beam Equation with Rotational Inertia and Nonlocal Energy Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **512**, Article 126148. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126148

[11] Di Plinio, F., Duane, G.S. and Teman, R. (2011) Time-Dependent Attractor for the Oscillon Equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **29**, 141-167. https://doi.org/10.3934/dcds.2011.29.141

[12] Di Plinio, F., Duane, G.S. and Temanv, R. (2012) The 3-Dimensional Oscillom Equation. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, **5**, 19-53.

[13] Conti, M., Pata, V. and Teman, R. (2013) Attractors for Processes on Time-Dependent Spaces, Applications to Wave Equations. *Journal of Differential Equations*, **255**, 1254-1277. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.05.013

[14] Yang, Z.J., Ding, P.Y. and Li, L. (2016) Longtime Dynamics of the Kirchhoff Equations with Fractional Damping and Supercritical Nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **442**, 485-510. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.04.079

[15] Chepyzhov, V.V. and Vishik, M.I. (2002) Attractors for Equations of Mathematical Physics. American Mathematical Society, Providence. https://doi.org/10.1090/coll/049

[16] Simon, J. (1987) Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **146**, 65-96. https://doi.org/10.1007/BF01762360

[17] Meng, F.J., Yang, M.H. and Zhong, C.K. (2016) Attractors for Wave Equations with Nonlinear Damping on Time-Dependent Space. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—B*, **21**, 205-225. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.205

[18] Conti, M. and Pata, V. (2014) Asymptotic Structure of the Attractor for Processes on Time-Dependent Spaces. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **19**, 1-10. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.02.002

[19] Ding, T. and Liu, Y.F. (2015) Time-Dependent Global Attractor for the Nonclassical Diffusion Equations. *Applicable Analysis*, **94**, 1439-1449. https://doi.org/10.1080/00036811.2014.933475