Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3610-3615
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312374

Hans汉斯

一类积分不等式的证明及其应用

王红青

广东海洋大学数学与计算机学院，广东 湛江

收稿日期：2023年11月13日；录用日期：2023年12月14日；发布日期：2023年12月27日

摘　要

不等式证明是高等数学中比较常见且难度较大的一种题型。本文讨论 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的不等式关系，通过证明得到以下结果：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，当 $f(x)$ 满足以下两个条件：1) 当 $a \le x \le \frac{a+b}{2}$ 时，$f(x) \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)$；2) 当 $\frac{a+b}{2} \le x \le b$ 时，$f(x) \ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，则有：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。应用这个积分不等式的结果，我们巧妙地构建函数 $f(x)$，轻松地证明了一些按通常方法较难证明的实数不等式，以此来拓展解题思路，学以致用。

关键词

不等式证明，积分不等式，单调性，定积分

A Class of Integral Inequalities and Their Applications

Hongqing Wang

School of Mathematic and Computer Science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong

Received: Nov. 13th, 2023; accepted: Dec. 14th, 2023; published: Dec. 27th, 2023

Abstract

In this paper we discuss the relationship between $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$ and $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, and obtain that if $f(x)$ is integrable on $[a,b]$ and satisfies the following two conditions: 1) $f(x) \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ for

文章引用: 王红青. 一类积分不等式的证明及其应用[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3610-3615.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312374

$a \le x \le \frac{a+b}{2}$; 2) $f(x) \ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ for $\frac{a+b}{2} \le x \le b$, Then $\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. By using this result we prove some real number inequalities which are more difficulty to be shown by using the usual methods.

Keywords

Proof of Inequalities, Integral Inequality, Monotony, Definite Integration

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

我们知道，不等式的证明是高等数学中的一种常见题型，由于不等式证明的题目往往具有较强的综合性，在考研试题中也是比较常见且难度较大的一种题型，它需要考生掌握一些特殊的解题技巧。本文将从积分不等式的角度来探讨一种新的证明不等式的方法。

定积分在高等数学和经济数学中都是十分重要和非常有用的内容[1] [2] [3] [4]，比较两个定积分的大小是定积分的理论在实际应用中的一个重点和难点，关于积分不等式的证明也是考研试题中常考的题型。同时，关于各种各样的积分不等式的研究已经引起广大担任高等数学课或经济数学课的高校教师广泛关注，并取得了很多成果[5] [6]。但至今未见有人研究 $\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的关系。本文通过讨论两个积分式 $\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的不等式关系，得到以下几个有意义的结果，并应用其结果进一步探讨一些实数范围内的不等式证明。

2. 问题描述和主要结果

2.1. 定理 1 及其证明

定理 1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且满足以下两个条件：

(1) 当 $a \le x \le \frac{a+b}{2}$ 时， $f(x) \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)$；

(2) 当 $\frac{a+b}{2} \le x \le b$ 时， $f(x) \ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，

则有： $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 。

证明： 由(1)得，

$$x - \frac{a+b}{2} \le 0, \tag{1}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(x) \ge 0, \tag{2}$$

由(1)和(2)得， $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(x)\right] \le 0$ 。

即$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(x\right)\le 0$。

即$xf\left(\frac{a+b}{2}\right)-xf\left(x\right)\le \frac{a+b}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{a+b}{2}f\left(x\right)$。

两边乘以(−1)，得：$xf\left(x\right)-xf\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge \frac{a+b}{2}f\left(x\right)-\frac{a+b}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

两边同时取定积分，得：

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[xf\left(x\right)-xf\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\ge \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[\frac{a+b}{2}f\left(x\right)-\frac{a+b}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}xf\left(x\right)\mathrm{d}x-\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-a^2}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge \frac{a+b}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\frac{b^2-a^2}{4}f\left(\frac{a+b}{2}\right), \tag{3}$$

由(2)得，

$$x-\frac{a+b}{2}\ge 0, \tag{4}$$

且

$$f\left(x\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge 0, \tag{5}$$

由(4)和(5)得，$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f\left(x\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\ge 0$，

即$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(x\right)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge 0$，从而有：

$$xf\left(x\right)-xf\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge \frac{a+b}{2}f\left(x\right)-\frac{a+b}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

两边同时取定积分，得：$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[xf\left(x\right)-xf\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\ge \frac{a+b}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[f\left(x\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$

即

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}xf\left(x\right)\mathrm{d}x-\frac{b^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge \frac{a+b}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\frac{b^2-a^2}{4}f\left(\frac{a+b}{2}\right), \tag{6}$$

(3) + (6)得，$\int_a^b xf\left(x\right)\mathrm{d}x\ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$，结论成立。

2.2. 定理 2 及其推论

对定理 1 的前提条件进行简化，可以得到以下结论。

定理 2 若$f\left(x\right)$在$\left(a,b\right)$上单调增加，则$\int_a^b xf\left(x\right)\mathrm{d}x\ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$。

推论 1 若$f\left(x\right)$在$\left(a,b\right)$上单调减少，则$\int_a^b xf\left(x\right)\mathrm{d}x\le \frac{a+b}{2}\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$。

证明：令 $g(x)=-f(x)$，因 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调减少，故 $g(x)$ 在 (a,b) 上单调增加。由定理 2 得，

$$\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

从而有：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \le \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x。$$

推论 2 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上单调增加，则 $\int_{-a}^a xf(x)\mathrm{d}x \ge 0$。其证明直接由定理 2 得到，故从略。

推论 3 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上单调减少，则 $\int_{-a}^a xf(x)\mathrm{d}x \le 0$。其证明直接由推论 1 得到，故从略。

推论 4 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上单调减少，且 $xf(x)\ge 0$ 则 $\int_{-a}^a xf(x)\mathrm{d}x = 0$。

证明：因 $xf(x)\ge 0$，$x\in(-a,a)$，故 $\int_{-a}^a xf(x)\mathrm{d}x \ge 0$。再由推论 3 知 $\int_{-a}^a xf(x)\mathrm{d}x \le 0$。要同时满足这两种情况，只有：$\int_{-a}^a xf(x)\mathrm{d}x = 0$，因此结论成立。

推论 5 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调增加且非负，$a\ge 0$，则有：

$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数。

证明：由于 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调增加且非负，$a\ge 0$，故 $xf(x)$ 在 (a,b) 上单调增加。因为 n 为正整数，由定理 2，得：$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b x^{n-1}f(x)\mathrm{d}x$。由此递归可得到：

$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，因此结论成立。

推论 6 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调减少且非负，$a\ge 0$，则有：

$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数。其证明与推论 5 的证明完全相似。

3. 积分不等式结果的应用

对于一些按通常方法较难证明的实数不等式，我们可以构建函数 $f(x)$，应用以上积分不等式的结果，把这些实数不等式证明出来。

例 1 证明：$\frac{b^3-a^3}{3} \ge \frac{1}{4}\left(b^3-a^3-a^2b+ab^2\right)$，其中 $a,b\in R$。

证明：令 $f(x)=x$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调增加。由定理 2 得知：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即：

$$\int_a^b x^2\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b x\mathrm{d}x$$

经过简单计算可得：

$\frac{b^3-a^3}{3} \ge \frac{1}{4}\left(b^3-a^3-a^2b+ab^2\right)$，结论得证。

例 2 证明：$\frac{1}{n+2}\left(b^{n+2}-a^{n+2}\right) \le \frac{a+b}{2(n+1)}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right)$，其中 $b\ge a>0$，$n<-2$。

证明：令 $f(x)=x^n$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调减少。由推论 1 得知：
$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \le \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。经过简单计算可得：

$$\frac{1}{n+2}\left(b^{n+2}-a^{n+2}\right) \le \frac{a+b}{2(n+1)}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right)。$$

例 3 证明：$a\cos a-b\cos b+\sin b-\sin a \ge \frac{a+b}{2}(\cos a-\cos b)$，其中：$\frac{\pi}{2}>b\ge a>0$。

证明 令 $f(x)=\sin x$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调增加，由定理 2 得知：
$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，经过简单计算可得：

$$a\cos a-b\cos b+\sin b-\sin a \ge \frac{a+b}{2}(\cos a-\cos b)。$$

例 4 证明：$b\sin b-a\sin a+\cos b-\cos a \le \frac{a+b}{2}(\sin b-\sin a)$，其中：$\pi>b\ge a>0$

证明 令 $f(x)=\cos x$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调减少。由推论 1 得知：
$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \le \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，经过简单计算可得：

$$b\sin b-a\sin a+\cos b-\cos a \le \frac{a+b}{2}(\sin b-\sin a).$$

例 5 证明：$b\mathrm{e}^b-a\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^b+\mathrm{e}^a \ge \frac{a+b}{2}\left(\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a\right)$，其中 $a,b\in R$。

证明 令 $f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调增加。由定理 2 得知：
$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，经过简单计算可得：

$$b\mathrm{e}^b-a\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^b+\mathrm{e}^a \ge \frac{a+b}{2}\left(\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a\right).$$

例 6 证明：$b^2\ln b-a^2\ln a \ge (a+b)(b\ln b-a\ln a)-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}a^2$，$0<a\le b$。

证明 令 $f(x)=\ln x$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调增加。由定理 2 得知：
$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，经过简单计算可得：

$\frac{1}{2}b^2\ln b-\frac{1}{2}a^2\ln a-\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2 \ge \frac{a+b}{2}(b\ln b-a\ln a)+\frac{a^2-b^2}{2}$，化简即得：

$$b^2\ln b-a^2\ln a \ge (a+b)(b\ln b-a\ln a)-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}a^2.$$

4. 结论

通过以上实数不等式的证明可知，灵活运用定理 1、定理 2 及其推论中的积分不等式结果，针对不同的实数不等式，巧妙地构建恰当的函数 $f(x)$，可以让我们轻松地证明一些按通常方法较难证明的实数不等式，以此来强化我们的逻辑推理能力，拓展解题思路，积累解题技巧，切实地提高我们的解题能力。

参考文献

[1] 同济大学数学教研室. 高等数学(上册) [M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[2] 黄立宏, 彭向阳, 李继猛. 高等数学(上册) [M]. 第 4 版. 上海: 复旦大学出版社, 2016.

[3] 马知恩, 王锦森. 高等数学基础 1(英文版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
[4] 梁保松, 叶耀军. 高等数学(英文版) [M]. 北京: 中国农业出版社, 2008.
[5] 李康弟. 利用中值定理证明积分不等式[J]. 高等数学研究, 2012, 15(6): 11-14.
[6] 海杰. 一道积分不等式的四种证法[J]. 高等数学研究, 2012, 15(6): 46-47.