Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3616-3629
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312375

一道解析几何题的十五种解法赏析

聂思兵[1]，李晓琪[1]，李张世佳[1]，黄黎明[1]，张　婷[2]，俄尔五哈[3]

[1]内江职业技术学院通识与公共服务学院，四川 内江
[2]内江职业技术学院信息与电子学院，四川 内江
[3]四川省越西县第二中学校，四川 越西

收稿日期：2023年11月14日；录用日期：2023年12月15日；发布日期：2023年12月28日

摘　要

解析几何的难点就是“算”，有效运算、简便运算求解析几何问题必须环环重视。考虑要如何设元，如何设方程，如何整体代换，如何进行转化化简。解析几何需要灵活运用条件转化多视角思考，本文对2020年全国卷1解析几何解法进行15种路径探析，主要围绕两条主线来展开，第一、设线法，针对多条动直线，寻找主动直线，设直线方程处理问题。第二、设点法，找消元等式，针对动点问题、寻找主要动点，用参数表示其他点。此问题入口宽、方法灵活多样，本文对第二问定点问题探索出十五种解法。不同的路径、运算量是不一样的，本题还呈现出不对称的韦达特征，本文实现了点代入曲线方程将不对称转化为对称问题；用根的和积关系转化消元；利用第三定义实现对称转化；出现斜率的积和关系用齐次化、点乘双根法。以及极点极线、二次对合、蝴蝶定理、参数方程、曲线系等解决问题。在圆锥曲线问题中要启发学生多角度，多层次思考问题，审时度势化简问题，举一反三提升学生数学核心素养。解析几何有效检测学生的直观想象、数学运算、逻辑推理等数学核心素养，基于“一核四层四翼”要注意思想方法的渗透，落实学科的立德树人。

关键词

解析几何，数学核心素养，多视角解题

Appreciation of Fifteen Solutions to an Analytic Geometry Problem

Sibing Nie[1], Xiaoqi Li[1], Shijia Lizhang[1], Liming Huang[1], Ting Zhang[2], E Er Wu Ha[3]

[1]School of General Studies and Public Service, Neijiang Vocational and Technical College, Neijiang Sichuan
[2]School of Information and Electronics, Neijiang Vocational and Technical College, Neijiang Sichuan
[3]Sichuan Province Yuexi County No. 2 Middle School, Yuexi Sichuan

Received: Nov. 14th, 2023; accepted: Dec. 15th, 2023; published: Dec. 28th, 2023

文章引用: 聂思兵, 李晓琪, 李张世佳, 黄黎明, 张婷, 俄尔五哈. 一道解析几何题的十五种解法赏析[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3616-3629. DOI: 10.12677/pm.2023.1312375

Abstract

The difficulty of analytic geometry is "calculation". Effective calculations and simple calculations must be taken seriously to solve analytic geometry problems. Consider how to set up elements, how to set up equations, how to substitute as a whole, and how to carry out transformation and simplification. Analytical geometry requires flexible use of conditions and multi-perspective thinking. This article analyzes 15 paths of analytic geometry solutions for National Volume 1 in 2020, mainly focusing on two main lines. First, the line setting method, looking for active lines for multiple moving straight lines. Straight line set the equation of straight line to solve the problem. Second, set point method, find elimination equations, find the main moving points for moving point problems, and use parameters to represent other points. This problem has a wide entrance and flexible and diverse methods. This article explores fifteen solutions to the second fixed-point problem. Different paths and calculation quantities are different. This problem also shows asymmetric Vedic characteristics. This article realizes the point substitution into the curve equation to transform the asymmetry into a symmetric problem; uses the sum-product relationship of the roots to transform the elimination; uses the third the definition implements symmetric transformation; the product-sum relationship where the slope appears uses the homogenization and dot product double root method. As well as solving problems such as poles and lines, quadratic involution, butterfly theorem, parametric equations, and curve systems. In the conic section problem, students should be inspired to think about the problem from multiple angles and levels, assess the situation and simplify the problem, and draw inferences from one example to improve students' core mathematical literacy. Analytical geometry effectively tests students' core mathematical qualities such as intuitive imagination, mathematical operations, and logical reasoning. Based on the "one core, four layers, and four wings", we must pay attention to the penetration of ideological methods and implement the discipline's moral education.

Keywords

Analytical Geometry, Core Mathematical Literacy, Multi-Perspective Problem Solving

1. 引言

所谓“设线法”，即以“线为源头”，为动态问题的关键，设列出直线方程，通过联立直线和二次曲线方程，结合韦达定理罗列出动点的关系式解决问题。利用这种方法可解决比如几何量的最值问题，定点定值问题等，是解析几何问题的常规解法。

所谓“设点法”，即以“点为源头”，为动态问题的关键，设列出二次曲线上点的坐标，利用点的坐标作为参变量，这种方法通常不需要联立直线与二次曲线的方程。常见弦的中点问题“设点代点作差法”就是“设点法”的典型[1]。

案例：2020 全国高考真题(理)已知 A、B 分别为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\left(a>1\right)$ 的左、右顶点，G 为 E 的上顶点，$\boldsymbol{AG}\cdot\boldsymbol{GB}=8$，$P$ 为直线 $x=6$ 上的动点，PA 与 E 的另一交点为 C，PB 与 E 的另一交点为 D.

1) 求 E 的方程；

2) 证明：直线 CD 过定点。

解：(1) 依据题意作出如下图象(图 1)：

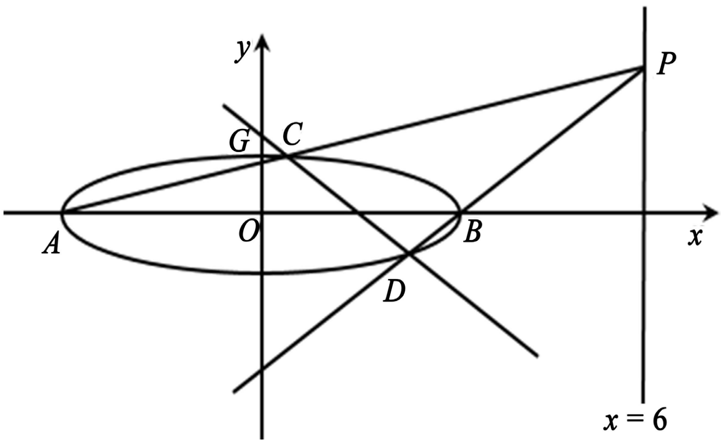

Figure 1. Image 1

图 1. 图像 1

由椭圆方程 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 可得： $A(-a,0)$， $B(a,0)$， $G(0,1)$

$\therefore$ $\boldsymbol{AG}=(a,1)$， $\boldsymbol{GB}=(a,-1)$

$\therefore$ $\boldsymbol{AG}\cdot\boldsymbol{GB}=a^2-1=8$， $\therefore$ $a^2=9$

$\therefore$椭圆方程为： $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$

评注：此题也可以 $\boldsymbol{AG}\cdot\boldsymbol{GB}=\dfrac{AB^2-AG^2-BG^2}{2}=\dfrac{4a^2-2\left(1+a^2\right)}{2}=a^2-1$ 得 $a^2=9$ 。

数量积公式 $\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{CD}=\dfrac{AD^2+BC^2-AC^2-BD^2}{2}$ 有很重要的用处，读者自己证明。

路一、设线解点法

证明：设 $P(6,y_0)$，

则直线 AP 的方程为： $y=\dfrac{y_0-0}{6-(-3)}(x+3)$，即： $y=\dfrac{y_0}{9}(x+3)$

联立直线 AP 的方程与椭圆方程可得： $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+y^2=1\\ y=\dfrac{y_0}{9}(x+3)\end{cases}$，整理得：

$\left(y_0^2+9\right)x^2+6y_0^2x+9y_0^2-81=0$，解得： $x=-3$ 或 $x=\dfrac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}$

将 $x=\dfrac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}$ 代入直线 $y=\dfrac{y_0}{9}(x+3)$ 可得： $y=\dfrac{6y_0}{y_0^2+9}$

所以点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9},\dfrac{6y_0}{y_0^2+9}\right)$。

同理可得：点 D 的坐标为 $\left(\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1},\frac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)$

当 $y_0^2\neq 3$ 时，

$$\therefore \text{直线 } CD \text{ 的方程为：}\quad y-\frac{-2y_0}{y_0^2+1}=\frac{\frac{6y_0}{y_0^2+9}-\frac{-2y_0}{y_0{}^2+1}}{\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}-\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}}\left(x-\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right),$$

整理可得：$y+\frac{2y_0}{y_0^2+1}=\frac{8y_0\left(y_0^2+3\right)}{6\left(9-y_0^4\right)}\left(x-\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right)=\frac{8y_0}{6\left(3-y_0^2\right)}\left(x-\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right)$

整理得：$y=\frac{4y_0}{3\left(3-y_0^2\right)}x+\frac{2y_0}{y_0^2-3}=\frac{4y_0}{3\left(3-y_0^2\right)}\left(x-\frac{3}{2}\right)$

所以直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

当 $y_0^2=3$ 时，直线 CD：$x=\frac{3}{2}$，直线过点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

故直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

评注：此解法思路自然，但运算量较大，能否解析几何中多想少算，巧算，作代数变形、利用对称美也很重要。

路二、设线解点法 + 对称性

前面步骤同路一，点 C 的坐标为 $\left(\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9},\frac{6y_0}{y_0^2+9}\right)$。点 D 的坐标为 $\left(\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1},\frac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)$。由于 $P(6,y_0)$ 变为关于 x 轴对称的点 $p'(6,-y_0)$ 得点 C 和点 D 也关于 x 轴对称，那么直线 CD 过定点在 x 轴上，当 $y_0^2\neq 3$ 且 $y_0\neq 0$ 时，

由于两点式方程 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ 得横截距为 $x=\frac{x_1y_2-y_1x_2}{y_2-y_1}$ 代入点 C 和点 D 得

$$x=\frac{x_1y_2-y_1x_2}{y_2-y_1}=\frac{\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}\cdot\frac{-2y_0}{y_0^2+1}-\frac{2y_0^2-3}{y_0^2+1}\cdot\frac{6y_0}{y_0^2+9}}{\frac{-2y_0}{y_0^2+1}-\frac{6y_0}{y_0^2+9}}=\frac{3\left(y_0^2+3\right)}{2\left(y_0^2+3\right)}=\frac{3}{2}$$

当且 $y_0=0,\pm 3$ 时，直线 CD：过点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。故直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

评注：此解法思路自然，运用了图形的对称美得定点在 x 轴上简化了运算，已知两点的横截距为 $x=\frac{x_1y_2-y_1x_2}{y_2-y_1}$，纵截距为 $y=\frac{x_1y_2-y_1x_2}{x_1-x_2}$ 在求定点在坐标轴上有用。

路三、设点 + 消元等式法

设 $C\left(x_1,y_1\right),D\left(x_2,y_2\right)$ 由 $3k_{PA}=k_{PB}$ 得 $\frac{3y_1}{x_1+3}=\frac{y_2}{x_2-3}$，不对称根的关系式化为对称式，由点 D 在椭圆上得 $\frac{x_2^2}{9}+y_2^2=1$ 得：$\frac{y_2}{x_2-3}=\frac{-\frac{1}{9}\left(x_2+3\right)}{y_2}$，则 $\frac{-27y_1}{x_1+3}=\frac{x_2+3}{y_2}$ 整理得：$27y_1y_2+x_1x_2+3\left(x_1+x_2\right)+9=0$

设直线 CD： $x=my+t$ 联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+y^2=1\\ x=my+t\end{cases}$ 整理得 $\left(m^2+9\right)y^2+2mty+t^2-9=0$

得 $y_1+y_2=\dfrac{-2mt}{m^2+9}$， $y_1y_2=\dfrac{t^2-9}{m^2+9}$，由 $x=my+t$ 得 $x_1+x_2=\dfrac{18t}{m^2+9}$， $x_1x_2=\dfrac{9\left(t^2-m^2\right)}{m^2+9}$

代入 $27y_1y_2+x_1x_2+3\left(x_1+x_2\right)+9=0$ 中得： $2t^2+3t-9=0$ 即 $t=-3$，(舍)或 $t=\dfrac{3}{2}$，

故直线 CD 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$。

评注：此解法 $\dfrac{3y_1}{x_1+3}=\dfrac{y_2}{x_2-3}$ 不对称，由点在二次曲线上化为 $27y_1y_2+x_1x_2+3\left(x_1+x_2\right)+9=0$ 对称式，利用这个消元等式，然后用韦达定理得 $t=\dfrac{3}{2}$。

路四、设点 + 椭圆的第三定义找消元等式法

由 $3k_{PA}=k_{PB}$，椭圆的第三定义得 $k_{CA}k_{CB}=-\dfrac{1}{9}$ 得 $k_{BC}k_{BD}=-\dfrac{1}{3}$，即， $\dfrac{y_1}{x_1-3}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-3}=-\dfrac{1}{3}$，设直线 CD： $x=my+t$ 联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+y^2=1\\ x=my+t\end{cases}$ 整理得 $\left(m^2+9\right)y^2+2mty+t^2-9=0$ 得 $y_1+y_2=\dfrac{-2mt}{m^2+9}$， $y_1y_2=\dfrac{t^2-9}{m^2+9}$ 由 $x=my+t$ 得 $x_1+x_2=\dfrac{18t}{m^2+9}$， $x_1x_2=\dfrac{9\left(t^2-m^2\right)}{m^2+9}$ 代入 $\dfrac{y_1}{x_1-3}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-3}=-\dfrac{1}{3}$ 得 $t=3$，(舍)或 $t=\dfrac{3}{2}$，故直线 CD 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$。

评注：此解法 $\dfrac{3y_1}{x_1+3}=\dfrac{y_2}{x_2-3}$ 不对称，由 $3k_{PA}=k_{PB}$，椭圆的第三定义得 $k_{CA}k_{CB}=-\dfrac{1}{9}$ 得 $k_{BC}k_{BD}=-\dfrac{1}{3}$，即， $\dfrac{y_1}{x_1-3}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-3}=-\dfrac{1}{3}$ 得到对称式，利用这个消元等式，然后用韦达定理得 $t=\dfrac{3}{2}$。

路五、设点 + 齐次方程法

由 $3k_{PA}=k_{PB}$，椭圆的第三定义得 $k_{CA}k_{CB}=-\dfrac{1}{9}$ 得 $k_{BC}k_{BD}=-\dfrac{1}{3}$，即， $\dfrac{y_1}{x_1-3}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-3}=-\dfrac{1}{3}$，

设直线 CD： $m\left(x-3\right)+ny=1$ 联立 $\begin{cases}\dfrac{\left[\left(x-3\right)+3\right]^2}{9}+y^2=1\\ m\left(x-3\right)+ny=1\end{cases}$ 得： $\begin{cases}\left[\left(x-3\right)+3\right]^2+9y^2=9\\ m\left(x-3\right)+ny=1\end{cases}$

$$\begin{cases}\left(x-3\right)^2+6\left(x-3\right)+9y^2=0\\ m\left(x-3\right)+ny=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(x-3\right)^2+6\left(x-3\right)\cdot 1+9y^2=0\\ m\left(x-3\right)+ny=1\end{cases}$$

$$\left(x-3\right)^2+6\left(x-3\right)\cdot\left[m\left(x-3\right)+ny\right]+9y^2=0$$

$$9y^2+6n\left(x-3\right)y+\left(1+6m\right)\left(x-3\right)^2=0$$

两边除以 $(x-3)^2$ 得 $9\left(\frac{y}{x-3}\right)^2+6n\frac{y}{x-3}+(1+6m)=0$

由于 $\frac{y_1}{x_1-3},\frac{y_2}{x_2-3}$ 是上式方程的两个根，得 $\frac{y_1}{x_1-3}\cdot\frac{y_2}{x_2-3}=\frac{1+6m}{9}$

即有 $\frac{1+6m}{9}=-\frac{1}{3}$ 得 $m=-\frac{2}{3}$ 代入直线 CD：$m(x-3)+ny=1$ 得 $-\frac{2}{3}(x-3)+ny=1$ 得直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

评注： $\frac{y_1}{x_1-3}\cdot\frac{y_2}{x_2-3}=-\frac{1}{3}$ **是斜率积(和)等式。通过“1”的替换，将方程齐次化，便可以通过韦达定理解决斜率积(和)问题。**

路六、设点 + 乘积双根法

由 $3k_{PA}=k_{PB}$，椭圆的第三定义得 $k_{CA}k_{CB}=-\frac{1}{9}$ 得 $k_{BC}k_{BD}=-\frac{1}{3}$，即，$\frac{y_1}{x_1-3}\cdot\frac{y_2}{x_2-3}=-\frac{1}{3}$，

设直线 CD：$x=my+t$ 联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+y^2=1\\ x=my+t\end{cases}$ 整理得 $\left(m^2+9\right)y^2+2mty+t^2-9=0$

得 $y_1y_2=\frac{t^2-9}{m^2+9}$，下面整体表示 $(x_1-3)\cdot(x_2-3)$，

$$\left(m^2+9\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)+2t(x-t)+t^2-9=0$$

得 $\left(m^2+9\right)x^2-18tx+9\left(t^2-m^2\right)=0$ 由于 x_1,x_2 是方程的两个根令

$\left(m^2+9\right)x^2-18tx+9\left(t^2-m^2\right)=\left(m^2+9\right)(x-x_1)(x-x_2)$ 取 $x=3$ 代入得

$9\left(m^2+9\right)-54t+9\left(t^2-m^2\right)=\left(m^2+9\right)(3-x_1)(3-x_2)$ 得 $(x_1-3)(x_2-3)=\frac{9t^2-54t+81}{m^2+9}$

由 $\frac{y_1}{x_1-3}\cdot\frac{y_2}{x_2-3}=-\frac{1}{3}$ 得 $2t^2-9t+9=0$ 即 $t=3$，(舍)；$t=\frac{3}{2}$，得直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

评注： $\frac{y_1}{x_1-3}\cdot\frac{y_2}{x_2-3}=-\frac{1}{3}$ **是斜率积(和)等式出现有** $y_1y_2,(x_1-3)(x_2-3)$；

采用点乘双根法是利用 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=my+t\end{cases}$ **得** $\frac{(my+t)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **令**

$\frac{(my+t)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(a^2+m^2b^2\right)(y-y_1)(y-y_2)$ **然后根据对称双根的点乘赋值解得。**

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+n\end{cases}$ **得** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+n)^2}{b^2}=1$ **令** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+n)^2}{b^2}=\left(a^2+k^2b^2\right)(x-x_1)(x-x_2)$ **然后根据对称双根的点乘赋值解得。**

路七、设点消元等式法 + 找恒等式

设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$ 由两点式方程 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ 得 $(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2y_1-x_1y_2)=0$，得横

DOI: 10.12677/pm.2023.1312375

截距为 $x=\dfrac{x_1y_2-y_1x_2}{y_2-y_1}$ 。

由 $3k_{PA}=k_{PB}$ 得 $\dfrac{3y_1}{x_1+3}=\dfrac{y_2}{x_2-3}$，整理得：$(x_1+3)y_2=3(x_2-3)y_1$。不对称根的关系式找恒等式，由点 D 在椭圆上得 $\dfrac{x_2^2}{9}+y_2^2=1$ 得：$\dfrac{y_2}{x_2-3}=\dfrac{-\frac{1}{9}(x_2+3)}{y_2}$，由点 C 在椭圆上得 $\dfrac{x_1^2}{9}+y_1^2=1$ 得：$\dfrac{x_1+3}{y_1}=\dfrac{y_1}{-\frac{1}{9}(x_1-3)}$，代入 $(x_1+3)y_2=3(x_2-3)y_1$ 得 $(x_2+3)y_1=3(x_1-3)y_2$，两式相减得：$x_1y_2-y_1x_2=\dfrac{3}{2}(y_2-y_1)$ 则直线 CD 的横截距为 $x=\dfrac{x_1y_2-y_1x_2}{y_2-y_1}=\dfrac{3}{2}$，得直线 CD 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$。

评析：$(x_1+3)y_2=3(x_2-3)y_1$ 不对称根的关系式找恒等式，由点 C 在椭圆上得 $\dfrac{x_1^2}{9}+y_1^2=1$ 得：$\dfrac{x_1+3}{y_1}=\dfrac{y_1}{-\frac{1}{9}(x_1-3)}$，代入 $(x_1+3)y_2=3(x_2-3)y_1$ 得 $(x_2+3)y_1=3(x_1-3)y_2$，两式相减得：

$x_1y_2-y_1x_2=\dfrac{3}{2}(y_2-y_1)$。

路八、设点 + 和积关系处理不对称性

设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$ 由 $3k_{PA}=k_{PB}$ 得 $\dfrac{3y_1}{x_1+3}=\dfrac{y_2}{x_2-3}$，平方得：$\dfrac{y_1^2}{(x_1+3)^2}\cdot\dfrac{(x_2-3)^2}{y_2^2}=\dfrac{1}{9}$

由点 D 在椭圆上得 $\dfrac{x_2^2}{9}+y_2^2=1$ 得：$y_2^2=1-\dfrac{x_2^2}{9}$ 点 C 在椭圆上得 $\dfrac{x_1^2}{9}+y_1^2=1$ 得：$y_1^2=1-\dfrac{x_1^2}{9}$，代入 $\dfrac{y_1^2}{(x_1+3)^2}\cdot\dfrac{(x_2-3)^2}{y_2^2}=\dfrac{1}{9}$ 得 $\dfrac{x_1-3}{x_1+3}\cdot\dfrac{x_2-3}{x_2+3}=\dfrac{1}{9}$；整理得 $4x_1x_2-15(x_1+x_2)+36=0$

另一方面由于椭圆的对称性得直线 CD 恒过 x 轴上一定点 $T(m,0)$，则由 C、D、T 三点共线得 $\dfrac{y_1}{x_1-m}=\dfrac{y_2}{x_2-m}$，平方得：$y_1^2(x_2-m)^2=y_2^2(x_1-m)^2$，点 D 在椭圆上得 $\dfrac{x_2^2}{9}+y_2^2=1$ 得：$y_2^2=1-\dfrac{x_2^2}{9}$；点 C 在椭圆上得 $\dfrac{x_1^2}{9}+y_1^2=1$ 得：$y_1^2=1-\dfrac{x_1^2}{9}$，代入 $y_1^2(x_2-m)^2=y_2^2(x_1-m)^2$ 整理有：

$(9+m^2)(x_1+x_2)=2m(x_1x_2+9)$ 比较 $15(x_1+x_2)=-4(x_1x_2+9)$ 得 $\dfrac{9+m^2}{15}=\dfrac{2m}{-4}$ 得 $m=\dfrac{3}{2}$，$m=6$（舍）

得直线 CD 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$。

评析：① 直线 CD 恒过 x 轴上一定点 $T(m,0)$，则由 C、D、T 三点共线得 $\dfrac{y_1}{x_1-m}=\dfrac{y_2}{x_2-m}$ 又 C、D 在椭圆上 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 得和积关系：$(a^2+m^2)(x_1+x_2)=2m(x_1x_2+a^2)$。

② 直线 CD 恒过 y 轴上一定点 $T(0,n)$，则由 C、D、T 三点共线得 $\dfrac{y_1-n}{x_1}=\dfrac{y_2-n}{x_2}$ 又 C、D 在椭圆上 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 得和积关系：$(b^2+n^2)(y_1+y_2)=2n(y_1y_2+b^2)$。

可以通过消元恒等式与和积关系对比定点定值。

路九、设点 + 半韦达代换

设$C\left(x_1,y_1\right),D\left(x_2,y_2\right)$，由$3k_{PA}=k_{PB}$，

得$\dfrac{3y_1}{x_1+3}=\dfrac{y_2}{x_2-3}$，整理得：$\dfrac{\left(x_1+3\right)y_2}{\left(x_2-3\right)y_1}=3$

设直线 CD：$x=my+t$ 联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+y^2=1\\ x=my+t\end{cases}$整理得

$$\left(m^2+9\right)y^2+2mty+t^2-9=0$$

得$y_1+y_2=\dfrac{-2mt}{m^2+9}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-9}{m^2+9}$，

$$\frac{\left(x_1+3\right)y_2}{\left(x_2-3\right)y_1}=\frac{\left(my_1+t+3\right)y_2}{\left(my_2+t-3\right)y_1}=\frac{my_1y_2+\left(t+3\right)y_2}{my_1y_2+\left(t-3\right)y_1}$$

$$=\frac{my_1y_2+\left(t+3\right)y_2}{my_1y_2+\left(t-3\right)\left(y_1+y_2\right)+\left(3-t\right)y_2}=\frac{\dfrac{m\left(t^2-9\right)}{m^2+9}+\left(3+t\right)y_2}{\dfrac{m\left(t^2-9\right)}{m^2+9}+\dfrac{-2m\left(t^2-3t\right)}{m^2+9}+\left(3-t\right)y_2}$$

$$=\frac{\dfrac{m\left(t^2-9\right)}{m^2+9}+\left(3+t\right)y_2}{\dfrac{-m\left(3-t\right)^2}{m^2+9}+\left(3-t\right)y_2}=\frac{\left(3+t\right)\left[m\left(t-3\right)+\left(m^2+9\right)y_2\right]}{\left(3-t\right)\left[m\left(t-3\right)+\left(m^2+9\right)y_2\right]}=\frac{3+t}{3-t}$$

得$\dfrac{3+t}{3-t}=3$，$t=\dfrac{3}{2}$，得直线CD过定点$\left(\dfrac{3}{2},0\right)$。

评析：用$\left(t-3\right)y_1=\left(t-3\right)\left(y_1+y_2\right)+\left(3-t\right)y_2$统一到只有$y_2$，然后化简找与$y_2$无关的值。

也可作根的和积关系进行消元代换。$y_1+y_2=\dfrac{-2mt}{m^2+9}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-9}{m^2+9}$，**得**
$\left(t^2+m^2\right)\left(y_1+y_2\right)=-2mt\left(y_1y_2+1\right)$。

路十、定比分点法

设点$P\left(6,t\right)$，$\boldsymbol{PC}=\lambda\boldsymbol{CA}$，$\boldsymbol{PD}=\mu\boldsymbol{DB}$，则$C\left(\dfrac{6-3\lambda}{1+\lambda},\dfrac{t}{1+\lambda}\right),D\left(\dfrac{6+3\mu}{1+\mu},\dfrac{t}{1+\mu}\right)$，将 C、D 代入$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$

得$\begin{cases}6\lambda=t^2+3\\ -2\mu=t^2+3\end{cases}$那么$\lambda=-\dfrac{1}{3}\mu$

则$D\left(\dfrac{6-9\lambda}{1-3\lambda},\dfrac{t}{1-3\lambda}\right)$另一方面由于椭圆的对称性得直线$CD$恒过$x$轴上一定点$T\left(m,0\right)$，则由$C$、$D$、$T$三点共线得$\dfrac{y_1}{x_1-m}=\dfrac{y_2}{x_2-m}$得：$m=\dfrac{x_1y_2-y_1x_2}{y_2-y_1}=\dfrac{\dfrac{6-3\lambda}{1+\lambda}\cdot\dfrac{t}{1-3\lambda}-\dfrac{6-9\lambda}{1-3\lambda}\cdot\dfrac{t}{1+\lambda}}{\dfrac{t}{1-3\lambda}-\dfrac{t}{1+\lambda}}=\dfrac{\left(6-3\lambda\right)-6-9\lambda}{\left(1+\lambda\right)-\left(1-3\lambda\right)}=\dfrac{6\lambda}{4\lambda}=\dfrac{3}{2}$

得直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

评注：定比分点是解析几何中最基本的概念之一，如果用得好，会使解题过程别具一格，简捷明快，开阔思维的视野，充分发挥数学思维的独创性。

路十一、椭圆参数方程法

记 $\tan\frac{\theta}{2}=t_1$， $\tan\frac{\beta}{2}=t_2$，

则：直线 CD 的方程为： $3y(t_1+t_2)+x(1-t_1t_2)=3(1+t_1t_2)$

直线 AC 的方程为： $xt_1-3y+3t_1=0$

直线 DB 的方程为： $x+3t_2y-3=0$

联立 AC、DB 得 $\begin{cases}x+3t_2y-3=0\\ t_1x-3y+3t_1=0\end{cases}$ 得： $3(1-t_1t_2)=x(1+t_1t_2)$，由于交点的横坐标恒是 6 代入得 $1-t_1t_2=2(1+t_1t_2)$ 即有 $t_1t_2=-\frac{1}{3}$ 代入 $3y(t_1+t_2)+x(1-t_1t_2)=3(1+t_1t_2)$ 得 $9y(t_1+t_2)+4x-6=0$ 则直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

评析：设二次曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **(** $a>0,b>0$ **)上的两点** $C(a\cos\theta,b\sin\theta),D(a\cos\varphi,b\sin\varphi)$ $(\varphi,\theta\neq\pi)$**由两点式方程** $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ **得** $(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2y_1-x_1y_2)=0$ **代入** C **点、** D **点坐标得：**

$$b(\sin\theta-\sin\varphi)x-a(\cos\theta-\cos\varphi)y=-ab(\cos\theta\sin\varphi-\cos\varphi\sin\theta)$$

$$2bx\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}+2ay\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}=ab\sin(\theta-\varphi)$$

$$2bx\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}+2ay\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}=2ab\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$bx\cos\frac{\theta+\varphi}{2}+ay\sin\frac{\theta+\varphi}{2}=ab\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

展开后两边同除以 $\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$**，记** $\tan\frac{\theta}{2}=t_1$**，** $\tan\frac{\beta}{2}=t_2$**，得** $ay(t_1+t_2)+bx(1-t_1t_2)=ab(1+t_1t_2)$

本题中直线 CD**、**DB **的方程都适合上式。直线** AC **的方程要通过参数方程重新推导：** $C(3\cos\theta,\sin\theta),A(-3,0)$ **AC：** $x\sin\theta-3(1+\cos\theta)y+3\sin\theta=0$ **用二倍角公式后两边同除以** $\cos^2\frac{\theta}{2}$ **得** $xt_1-3y+3t_1=0$**。椭圆上不在两点的直线方程** $ay(t_1+t_2)+bx(1-t_1t_2)=ab(1+t_1t_2)$ **求定点定值问题是新的方向。**

路十二、蝴蝶定理

由 $3k_{PA}=k_{PB}$，设 CD 交 x 轴上一定点 $T(m,0)$，过 T 作 $MN\perp x$ 轴，交椭圆于 M、N，交 AP，DP 分别为点 G、点 H。如图 2。显然 T 弦 MN 的中点，由蝴蝶定理得：$TG=TH$，

由 $\frac{k_{PA}}{k_{PB}}=\frac{\tan\angle GAT}{\tan\angle HBT}=\frac{\frac{GT}{AT}}{\frac{HT}{BT}}=\frac{BT}{AT}=\frac{3-m}{3+m}$ 得 $\frac{3-m}{3+m}=\frac{1}{3}$ 得 $m=\frac{3}{2}$。得直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

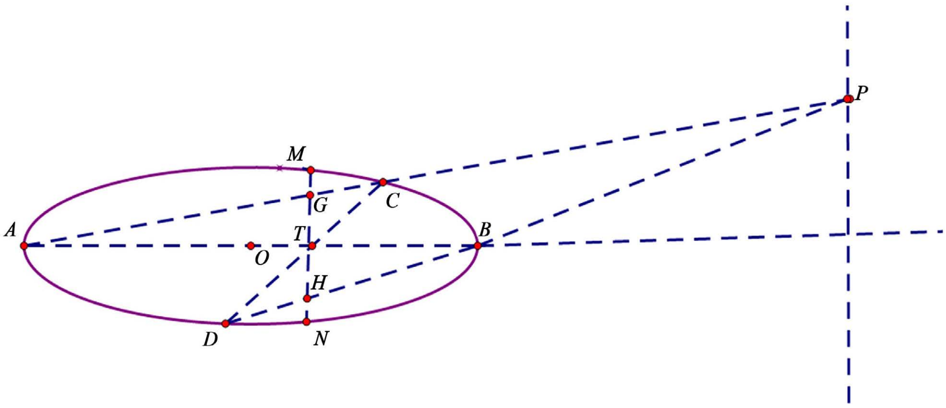

Figure 2. Image 2
图 2. 图像 2

评注：蝴蝶定理：一般地，如图 3。设 AB 是二次曲线的任意一条动弦，点 M 是线段 AB 的中点，过 M 作任意两条弦 CD，EF，连接 ED、CF 交直线 AB 于点 P 和点 Q，连接 FD、CE 交直线 AB 于点 R 和点 T，则有① $MP = MQ$ ② $MR = MT$ 成立。

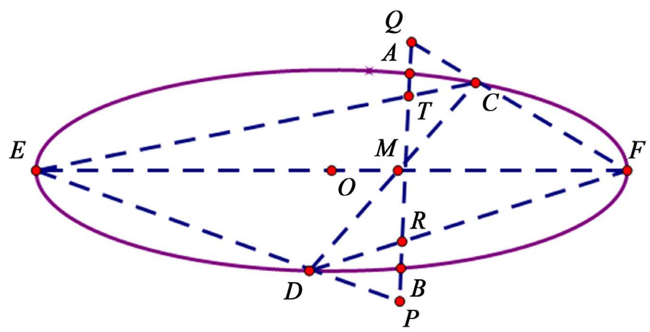

Figure 3. Image 3
图 3. 图像 3

结论：如图 4，点 A 和点 B 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右顶点，T 是 x 轴上一定点 $(m,0)$，过 T 的直线交椭圆于点 C、D，连接 AC、BD，那么 $\frac{k_{AC}}{k_{BD}}=\frac{a-m}{a+m}$。

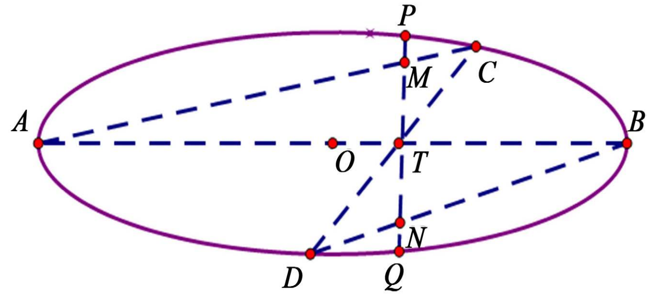

Figure 4. Image 4
图 4. 图像 4

路十三、曲线系法

设 $P(6,y_0)$，则直线 AP 的方程为：$y=\dfrac{y_0-0}{6-(-3)}(x+3)$，即：$y=\dfrac{y_0}{9}(x+3)$

直线 BP 的方程为：$y=\dfrac{y_0}{3}(x-3)$，直线 AB 的方程：$y=0$，直线 CD 的方程：$x=my+t$。

由于 A、B、C、D 都在椭圆上，存在 $\lambda\neq 0$ 使得 $\left[\dfrac{y_0}{3}(x-3)-y\right]\cdot\left[\dfrac{y_0}{9}(x+3)-y\right]+\lambda[my+t-x][y-0]=0$

整理得：

$$y_0^2x^2+27(1+\lambda m)y^2-y_0^2+(12y_0+27\lambda)xy+(18y_0+27\lambda t)y=0$$

比较 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ 得 $\begin{cases}4y_0+9\lambda=0\\2y_0+3\lambda t=0\\3(1+\lambda m)=y_0^2\end{cases}$ 则 $t=\dfrac{3}{2}$，得直线 CD 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$。

评注：曲线系的用途非常广泛，曲线系法是先根据题目条件，列出曲线系，再根据已知点坐标解出参数，进而求得方程或者多项式定理(即系数对应)，这两个方程对应项的系数成比例，可以得到方程。

路十四、化圆法

作变换 $\begin{cases}x'=\dfrac{x}{3}\\y'=y\end{cases}$ 把椭圆方程 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$，变为 $x'^2+y'^2=1$，

直线方程 $x=6$ 变为 $x'=2$；$A(-3,0)$ 变为 $A'(-1,0)$；$B(3,0)$ 变为 $B'(1,0)$

$P(6,y_0)$ 变为 $P'(2,y_0)$；由 $3k_{PA}=k_{PB}$ 保持不变得 $3k_{P'A'}=k_{P'B'}$ 过 $M'H'\perp A'C'$ 交 $A'C'$ 于 H'。如图 5：

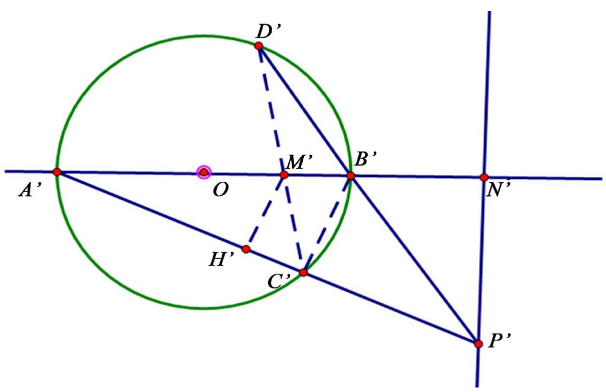

Figure 5. Image 5
图 5. 图像 5

由 $\angle P'B'N'=\angle D'B'M'$，又 $\overset{\frown}{A'D'}=\overset{\frown}{A'D'}$ 得 $\angle A'C'M'=\angle D'B'M'$，得 $\angle A'C'M'=\angle P'B'N'$ 又 $\tan\angle C'A'M'=\dfrac{M'H'}{A'H'}$，$\tan\angle D'B'M'=\tan\angle A'C'M'=\dfrac{M'H'}{C'H'}$，代入得 $3C'H'=A'H'$，由 $M'H'\perp A'C'$，$B'C'\perp A'C'$ 得 $M'H',A'C'$ 平行。则 $3B'M'=A'M'$，$|A'B'|=2$ 得：$M'\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 由 $x'=\dfrac{x}{3}$ 得：直线 CD 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$。

评注：作变换化圆，利用圆的几何性质顺利解决问题，此解法想法新颖。

路十五、极点极线

如图 6，交换点 C、D 位置，记原点 C 为点 D'，原点 D 为点 C'；由题意得 AC'，BD' 交点为 P' 在 $X=6$ 上，记 AC，BD 交于点 M，直线 $x=6$ 交 A 于点 N；由极点极线得点 M 与直线 $x=6$ 是组极点极线，由点 O 是 AB 的中点，得 $OM\cdot ON=OB^2$ 得：$OM=\frac{3}{2}$，得直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

评注：极点极线是这个题的背景，可以从交比与调和点列、二次对合研究斜率积(和)问题、调和共轭、切线应用；极点与自极三角形等问题得相关结论罗列如下读者自己尝试证明。

结论 1. 若直线 l 与抛物线 $y^2=2px$ 交于点 A，B，则 $OA\perp OB \Leftrightarrow$ 直线 l 过定点 $P(2p,0)$；

结论 2. 若直线 l 与抛物线 $y^2=2px$ 交于点 A,B，则 $k_{OA}\cdot k_{OB}=m \Leftrightarrow$ 直线 l 过定点 $P\left(p+\sqrt{m+p^2},0\right)$；

结论 3. 设点 $P\left(2pt_0^2,2pt_0\right)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 上一定点，M,N 是该抛物线上的动点，则 $PM\perp PN \Leftrightarrow$ 直线 MN 过定点 $Q\left(2p+2pt_0^2,-2pt_0\right)$。

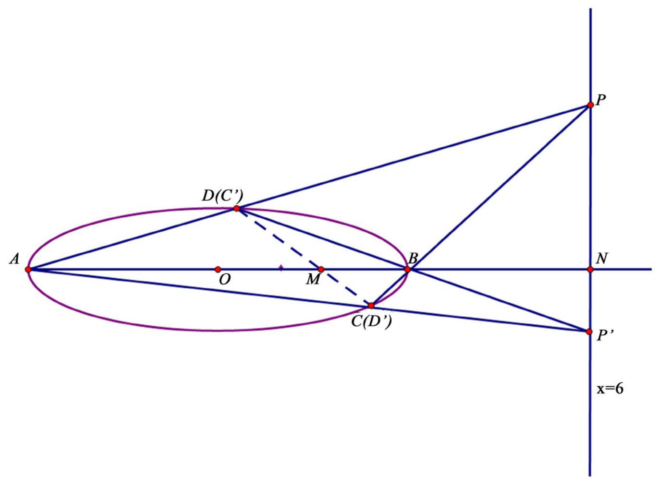

Figure 6. Image 6
图 6. 图像 6

结论 4. 设点 $A\left(x_0,y_0\right)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 上一定点，M，N 是该抛物线上的动点，则 $k_{AM}\cdot k_{AN}=m \Leftrightarrow$ 直线 MN 过定点 $P\left(x_0-\frac{2p}{m},-y_0\right)$；

结论 5. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点 P 作两条互相垂直的直线与该椭圆交于点 A，B，则 $PA\perp PB \Leftrightarrow$ 直线 AB 过点 $Q\left(-\frac{a\left(a^2-b^2\right)}{a^2+b^2},0\right)$；

结论 6. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左顶点 P 作两条互相垂直的直线与该椭圆交于点 A，B，则 $PA\perp PB \Leftrightarrow$ 直线 AB 过点 $Q\left(-\frac{a\left(a^2+b^2\right)}{a^2-b^2},0\right)$；

结论 7. 设点 $P(m,n)$ 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一定点，点 A，B 是椭圆 C 上不同于 P 的两

点，若 $k_{PA}+k_{PB}=\lambda(\lambda\neq 0)$，则直线 AB 过定点 $\left(m-\frac{2n}{\lambda},-n-\frac{2b^2m}{a^2\lambda}\right)$；

结论 8. 设点 $P(m,n)$ 是双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 一定点，点 A，B 是双曲线 C 上不同于 P 的两点，若 $k_{PA}+k_{PB}=\lambda(\lambda\neq 0)$，则直线 AB 过定点 $\left(m-\frac{2n}{\lambda},-n+\frac{2b^2m}{a^2\lambda}\right)$。

结论 9. 若点 A，B 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上关于原点对称的两点，点 P 是椭圆 C 上与 A，B 不重合的点，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{b^2}{a^2}$；

结论 9′. 设点 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一定点，点 A，B 是椭圆 C 上不同于 P 的两点，若 $k_{PB}k_{PA}=m$，则直线 AB 过定点 $\left(x_0+\frac{2b^2x_0}{ma^2-b^2},y_0-\frac{2a^2y_0m}{ma^2-b^2}\right)$；

结论 10. 若点 A，B 是双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上关于原点对称的两点，点 P 是双曲线 C 上与 A，B 不重合的点，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$。

结论 10′. 设点 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线上 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一定点，点 A，B 是椭圆 C 上不同于 P 的两点，若 $k_{PB}k_{PA}=m$，则直线 AB 过定点 $\left(x_0-\frac{2b^2x_0}{ma^2+b^2},y_0-\frac{2a^2y_0m}{ma^2+b^2}\right)$。

结论 11. 设点 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一定点，点 A，B 是椭圆 C 上不同于 P 的两点，若 $k_{PA}+k_{PB}=0$，则直线 AB 斜率为定值 $\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$；

结论 12. 设点 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 一定点，点 A，B 是双曲线 C 上不同于 P 的两点，若 $k_{PA}+k_{PB}=0$，则直线 AB 斜率为定值 $-\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$；

结论 13. 设点 $P(m,n)$ 是抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 一定点，点 A,B 是抛物线 C 上不同于 P 的两点，若 $k_{PA}+k_{PB}=0$，直线 AB 斜率为定值 $-\frac{p}{n}(n\neq 0)$。

结论 14. 设 A,B,C 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上不同 3 点，B，C 关于 x 轴对称，直线 AC，BC 与 x 轴分别交于点 M,N，则 $|OM||ON|=a^2$。

结论 15. 经过椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ （$a>b>0$）的长轴的两端点 A_1 和 A_2 的切线，与椭圆上任一点的切线相交于 P_1 和 P_2，则 $|PA_1|\cdot|PA_2|=b^2$。

2. 总结

《普通高中数学课程标准(2020 版)》(以下简称“课标”)中规定的课程目标之一是“提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力”[2]。处于高中学段的学生，主要的数学活动就是解决

问题，而解题能力的培养是提高学生数学学习质量的前提和保障。因此，本文对 2020 解析几何题目解题研究进行系统论述，主要围绕两条主线来展开，第一、设线法，针对多条动直线，寻找主动直线，设直线方程处理问题。第二、设点找消元等式法，针对动点问题、寻找主要动点，用参数表示其他点。

此问题入口宽、方法灵活多样，本文探索出十五种解法，不同的路径、运算量是不一样的，本题还呈现出不对称的韦达特征，本文实现了点代入曲线方程将不对称转化为对称问题；用根的和积关系转化消元；利用第三定义实现对称转化；出现斜率的积和关系用齐次化、点乘双根法；以及极点极线、二次对合、蝴蝶定理；参数方程等解决问题。以求启发学生多角度，多层次思考问题，审时度势化简问题，举一反三提升学生数学核心素养。

读者注意通常用“设线法”计算量大，“设点法”计算小。对“设线法”，难点主要在于应用数形结合对题目几何条件的代数转化，关系错综复杂，但是仔细分析可以发现，直线两动点归根结底是随着动点的变化而变化的，从而动直线其实跟动点密切相关，所以可以采用“设点法”，将动点的坐标设出，找出点的坐标关系，进一步表示动直线的方程，最后利用方程来分析问题。

实际上，通过总结可以发现这样的规律：一般地，如果我们把一道解析几何解答题看成一个情节跌宕起伏的故事[3]，故事的起因是“曲线上的某个动点”，故事的发展经过是“该动点的运动引发了其他点、线、或者几何量的变化”，故事的结局就是题目的结论。如果题目符合这种“动点起因”的特征，另外，在经过和结局中较少涉及如弦长这类与韦达定理关系密切的几何量的计算时，通常可以采用“设点法”。

故事的起因是“曲线上的线”通常可以采用“设线法”。“设线法”解题过程中，需要直接用到两个点的坐标，与两个一元二次方程根与系数的关系没有明显的直接联系，若用求根公式将两个点的坐标分别用两直线斜率 k1，k2 表示出来，再进一步表示直线方程[4]。

在用设点法或设线法求解时，要注意“主”与“辅”的关系[5]，要始终围绕目标和解题计划展开求解，抓住问题的主要矛盾，抓住矛盾的主要方面。在设点或设线法中，若能用某个点的坐标或某直线方程中的某一个或几个变量去表示其余的点的坐标或直线的方程，这样抓住“主辅关系”就使得定值证明、最值求解和取值范围问题迎刃而解了。另外几何离不开几何特征，解题过程要挖掘几何中的数量关系和位置关系用代数的方法呈现从而简单地解决问题。

参考文献

[1] 李晖. 关于设点法解一类圆锥曲线问题的思考[J]. 福建教育学院学报, 2020(6): 24-25+30.

[2] 李文东. 2020 年全国高考 I 卷理科数学第 20 题的解法与变式拓展[J]. 数理化解题研究, 2022(19): 14-18.

[3] 卢丽卿, 蒋红珠. 刘成龙对 2020 年全国卷 I 理科第 20 题(II)的研究[J]. 中学数学(高中版). 2021(3): 26-28.

[4] 陈志年. 2020 年全国高考数学一卷(理)20 题解法赏析[J]. 数理化解题研究, 2020(31): 38-39.

[5] 李宁, 贺航飞. 对 2020 年高考新课标全国 I 卷理科第 20 题的探究[J]. 数理化解题研究, 2021(7): 60-61.