Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3736-3741
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312386

关于 Herman 环与临界点

周弘毅

北京邮电大学理学院，北京

收稿日期：2023 年 11 月 20 日；录用日期：2023 年 12 月 21 日；发布日期：2023 年 12 月 29 日

摘 要

本文研究了有理函数复动力系统中 Herman 环存在的必要条件，次数大于等于 2 的有理函数 f，若存在 Herman 环 H 则 H 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 的两个余集分支中至少有两个临界点 (计重数)，并给出存在每个余集分支中恰有两个临界点且临界点落在余集分支的边界的例子。

关键词

有理函数，Herman 环，临界点

A Note on Herman Ring

Hongyi Zhou

School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing

Received: Nov. 20^{th}, 2023; accepted: Dec. 21^{st}, 2023; published: Dec. 29^{th}, 2023

Abstract

In this paper, we study a necessary condition for the existence of Herman rings in the complex dynamical system of rational functions. If the rational function f of degree greater than or equal to 2 has a Herman ring H, then H has at least two critical points in the two complement components of $\bar{\mathbb{C}}$. An example is given to show that there are

文章引用: 周弘毅. 关于 Herman 环与临界点 [J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3736-3741.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312386

exactly two critical points in each complement component and the critical points are on the boundary.

Keywords

Rational Functions, Herman Rings, Critical Points

1. 引言

设 f 是扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 上次数大于等于 2 的有理函数. 设 n 为非负整数, f^n 是 f 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的 n 次迭代, f^0 为恒等映射. 设 $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$, 若存在 z_0 的邻域 U 使得函数序列 $\{f^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 U 是正规的, 则称 z_0 为 f 的正规点. 有理函数 f 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 中的所有正规点的集合称为 f 的 Fatou 集, 记为 $\mathcal{F}_f$. Fatou 集 $\mathcal{F}_f$ 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 的补集称为 f 的 Juila 集, 记为 $\mathcal{J}_f$. 由定义可知, Fatou 集为开集, Julia 集为闭集. 若 $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ 使得 $f'(z_0) = 0$, 则称 z_0 为 f 的临界点 (当 $z_0 = \infty$, $f(z_0) \neq \infty$ 时, 考虑 $f(1/z)$ 在 0 的导数. 当 $z_0 = \infty$, $f(z_0) = \infty$ 时, 考虑 $1/f(1/z)$ 在 0 的导数. 当 $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) = \infty$ 时, 考虑 $1/f(z)$ 在 0 的导数). 设 H 是 f 的一个不变 Fatou 分支, 即 H 是 $\mathcal{F}_f$ 的一个连通分支且 $f(H) = H$. 若 f 在 H 上的限制, $f|_H : H \to H$ 全纯共轭于平环到自身的无理旋转 $\zeta \to e^{2\pi i\theta}\zeta$, 其中 θ 为无理数, 则称 H 为 f 的 Herman 环, θ 为 Herman 环 H 的旋转数.

Herman 环的存在性最先是由 Herman 基于 Blaschke 乘积和 Arnold 关于实解析圆周自同胚的线性化定理得到的. 其后, Shishikura 引入了拟共形手术构造 Herman 环的方法. 2009 年, 在 [1] 中, 张高飞发展了 Herman 的思想, 给出了一个通过扭转平环上有理函数构造 Herman 环的方法, 得到了如下定理.

定理 A [1] 设 $0 < \theta < 1$ 是一个 Diophantine 数, f 为 $\bar{\mathbb{C}}$ 上次数大于等于 2 的有理函数. 假设 $H \subset \bar{\mathbb{C}}$ 满足 H 分离 f 的两个临界点且 f 限制在 H 上有 $f|_H : H \to f(H)$ 为同胚. 则存在 $\bar{\mathbb{C}}$ 到自身的同胚 ϕ 和 ψ 使得 $g = \phi \circ f \circ \psi$ 为有理函数, 且 g 存在一个旋转数为 θ 的 Herman 环.

本文将证明定理 A 中的分离性条件是必要的, 即下述定理.

定理 1.1 设 f 是 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的有理函数且 f 的次数大于等于 2. 设 $H \subset \bar{\mathbb{C}}$ 是 f 的一个 Hermann 环, $D_k(k = 1, 2)$ 分别为 H 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 的两个余集分支. 则 $D_k(k = 1, 2)$ 至少有两个临界点 (计重数).

注 1 由上述定理可知, 不存在 Herman 环分离一个简单临界点和另一组临界点的情况.

注 2 由上述定理可知, 在 Herman 环的余集分支中至少有 4 个临界点 (计重数). 因此不存在

次数低于 2 且有 Herman 环的有理函数.

注 3 我们将在文章的第三部分给存在每个余集分支中恰有两个临界点的例子且临界点落在余集分支的边界上, 因此定理中的结论 2 是最优的, 且结论不能加强为临界点在余集分支的内部.

2. 定理 1.1 的证明

首先, 因为 H 是 f 的 Herman 环, 所以 f 在 H 上的限制全纯共轭与平环上的旋转, 即存在一个无理数 θ 和 H 到平环 A 的共形映射 ϕ 使得如下的交换图

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & H \arrow[d, "\phi"] \\ A \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd}$$

成立, 其中 $A = \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |\zeta| < r_2\}(0 < r_1 < r_2 < +\infty$ 且 $g(\zeta) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta}\zeta(0 < \theta < 1$ 为无理数). 取定 $r \in (r_1, r_2)$. 显然圆周 $C: \ |\zeta| = r$ 在 g 的作用下是不变的. 设 $\Gamma = \phi^{-1}(C)$, 则 Γ 在 f 的作用下是不变的. 由 Jordan 曲线定理 [1] 知 $\bar{\mathbb{C}} - \{\Gamma\}$ 由两个连通分支构成, 在 Γ 上取定一个定向, 记 Γ 左侧的连通分支为 Ω_1, 右侧的为 Ω_2. 因为 Γ 是 Ω_1 的边界, f 是有理映射, 所以 Γ 是 $f^{-1}(\Omega_1)$ 的边界的一个分支, 记 $f^{-1}(\Omega_1)$ 边界分支包含 Γ 的连通分支为 U, 则 $f|_U$ 是 U 到 Ω_1 的分歧覆盖. 由于 f 是有理函数, 所以 $f|_U$ 是有限次分歧覆盖. 记 f_U 的覆盖次数为 d. 下证 $d \geq 2$.

若 $d = 1$, 则 $f|_U$ 是 U 到 Ω_1 的同胚映射. 所以 U 是单连通区域. 由于 U 的边界分支包含 Γ, 所以 U 的边界即为 Γ, 由 f 在 Γ 的局部性质可知 $U = \Omega_1$. 所以 $f(\Omega_1) = \Omega_1$, 即 Ω_1 关于 f 是不变集. 注意到 Ω_1 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 的补集多于两点, 所以 Ω_1 包含于 Fatou 集 $\mathcal{F}_f$ 中. 但是 Herman 环 H 的边界是 Julia 集 $\mathcal{J}_f$ 中的点集且于 Ω_1 的交不为空. 矛盾! 故 $d \geq 2$.

由 Rieman-Hurwitz 公式 [2] 有

$$\chi(U) = d\chi(\Omega_1) - r$$

其中 $\chi(U)$ 和 $\chi(\Omega_1)$ 分别为 U 和 Ω_1 的 Euler 示性数, r 为 f 在 U 中的临界点的个数 (记重数). 注意到 $d \geq 2$, $\chi(\Omega_1) = 1$, U 是多连通区域 $\chi(U) \leq 0$, 所以 $r \geq 2$, 即所以 U 中至少有 2 个临界点 z_1, z_2. 由于 U 的一个边界分支为 f 的不变曲线 Γ 及 Γ 的定向, 可知 $U \subset \Omega_1$. 所以 $z_1, z_2 \in \Omega_1$.

同理知 Ω_2 中存在临界点 z_3, z_4. 因为 f 在 H 上是共形映射, 所以 z_1, z_2 和 z_3, z_4 分别在 $\bar{\mathbb{C}} - H$ 的两个连通分支中.

3. 一个例子

我们将构造一个有理函数 f 使得 f 有一个 Herman 环 H 且 f 的临界点均落在 H 的边界上. 由此说明定理的结果不能加强为 Herman 环的余集分支的内部.

取

$$R(z)=\frac{3z^2-1}{z(3-z^2)}$$

令 $R'(z)=0$. 由

$$R'(z)=\frac{6z^2(3-z^2)-(3-3z^2)(3z^2-1)}{z^2(3-z^2)^2}=\frac{3(z^2+1)^2}{z^2(3-z^2)^2}$$

知 i 和 $-$i 是 R 的两个 2 阶临界点. 又 R 是 3 次有理函数, 所以 $\pm$i 是 R 的所有临界点.

下证明 $R(z)$ 限制在单位圆周 $\mathbb{S}(\mathbb{S}=\{z:|z|=1\})$ 为实解析自同胚. 由

$$R(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{z-1/\sqrt{3}}{1-z/\sqrt{3}}\cdot\frac{z+1/\sqrt{3}}{1+z/\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}\frac{R'(z)}{R(z)} &= -\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1/\sqrt{3}}+\frac{1/\sqrt{3}}{1-z/\sqrt{3}}+\frac{1}{z+1/\sqrt{3}}-\frac{1/\sqrt{3}}{1+z/\sqrt{3}}\\ &= -\frac{1}{z}+\frac{2/3}{(z-1/\sqrt{3})(1-z/\sqrt{3})}+\frac{2/3}{(z+1/\sqrt{3})(1+z/\sqrt{3})}\end{aligned}$$

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(t\in[0,2\pi))$ 则

$$\begin{aligned}\frac{R'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{R(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+\frac{2/3}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1/\sqrt{3})(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/\sqrt{3})}+\frac{2/3}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1/\sqrt{3})(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/\sqrt{3})}\\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+\frac{2/3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1/\sqrt{3})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-1/\sqrt{3})}+\frac{2/3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1/\sqrt{3})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+1/\sqrt{3})}\\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\left(\frac{1}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1/\sqrt{3}|^2}+\frac{1}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1/\sqrt{3}|^2}\right).\end{aligned}$$

设

$$R(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\exp[\mathrm{i}\phi(t)],\ \ t\in[0,2\pi)$$

由于 $R(z)$ 是三个保持单位圆周不动的 Möbius 变换的乘积, 故可以选取 $\phi(t)$ 为连续函数. 注意到

$$R'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\exp[\mathrm{i}\phi(t)]\mathrm{i}\phi'(t)=R(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{i}\phi'(t)$$

所以

$$\phi'(t)=\frac{R'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{R(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}=1+\frac{2/3}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1/\sqrt{3}|^2}+\frac{2/3}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1/\sqrt{3}|^2}>0.$$

故 ϕ 在 $[0,2\pi)$ 严格单调增加. 又

$$\int_0^{2\pi}\phi'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\frac{R'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{R(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{R'(z)}{R(z)}\mathrm{d}z$$

又

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\frac{R'(z)}{R(z)}\mathrm{d}z &= \int_{|z|=1}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1/\sqrt{3}}+\frac{1/\sqrt{3}}{1-z/\sqrt{3}}+\frac{1}{z+1/\sqrt{3}}-\frac{1/\sqrt{3}}{1+z/\sqrt{3}}\mathrm{d}z\\ &= -2\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{i}=2\pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{2\pi}\phi'(t)\mathrm{d}t=2\pi,$$

由此可知 $R(z)$ 是单位圆周到自身的临界实解析同胚. 由 Świa tek 文章 [3] 中的定理可知, 存在一个 $\tau\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 使得 $z\mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}R(z)$ 在 $\mathbb{S}$ 的限制拟对称共轭于刚性旋转 $w\mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}w$, 其中 $\theta\in[0,1)$. 记 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}R(z)$ 为 $R_\tau(z)$. 设 h_τ 为拟对称映射且 $h_\tau\circ R_\tau=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}h_\tau$, 由 Beurling-Ahlfors 定理 [4] 知, h_τ 可以拟共形延拓到单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$, 记为 H_τ. 令

$$F(z)=\begin{cases} R_\tau(z), & z\notin\mathbb{D};\\ H_\tau^{-1}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}H_\tau(z)), & z\in\bar{\mathbb{D}}\end{cases}.$$

注意到 $H_\tau^{-1}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}H_\tau(z))$ 在 $\mathbb{S}$ 上的限制有

$$H_\tau^{-1}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}H_\tau(z))=h_\tau^{-1}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}h_\tau(z))=R_\tau$$

由此知 F 是 $\bar{\mathbb{C}}$ 到 $\bar{\mathbb{C}}$ 的连续映射且拟正则, $\pm\mathrm{i}$ 是 F 的临界点.

注意到 $F(\mathbb{D})=\mathbb{D}$, 由 Shishikura 拟共形手术准则 [5] 可知, F 是拟有理的, 即存在拟共形映射 $\psi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, 使得 $\psi\circ F=f\circ\psi$ 其中 f 为有理函数, 见 [6]. 由

$$f\circ\psi(\mathbb{D})=\psi\circ F(\mathbb{D})=\psi(\mathbb{D}),$$

知 $\psi(\mathbb{D})$ 是 f 不变的. 注意到 $\psi(\pm\mathrm{i})$ 在 $\psi(\mathbb{D})$ 的边界为 f 的临界点, 由此可知 $\psi(\mathbb{D})$ 是 f 的 Siegel 盘 [7] 且其边界上有两个临界点.

对 $f(z)$ 和 $\overline{f(\bar{z})}$ 做经典的 Siegel 盘与 Hermann 环转化拟共形手术 [8] [9] 即得所求.

4. 小结

本文提供了张高飞在 [1] 中的定理的分离性条件的必要性证明，为研究相关内容做出了一定的补充，因此是具有一定创新性的。未来的研究者可以继续做关于探讨 Herman 环结构以及新的构造 Herman 环方法的尝试。

基金项目

国家自然科学基金青年基金 (11701039)。

参考文献

[1] Wang, X. and Zhang, G. (2009) Constructing Herman Rings by Twisting Annulus Homeomorphisms. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 139-143. https://doi.org/10.1017/S1446788708000621

[2] Beardon, A.F. (2000) Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems. Springer Science & Business Media, Berlin.

[3] Światek, G. (1998) On Critical Circle Homeomorphisms. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, **29**, 329-351. https://doi.org/10.1007/BF01237654

[4] Beurling, A. and Ahlfors, L.V. (1956) The Boundary Correspondence under Quasiconformal Mappings. *Acta Mathematica*, **96**, 125-142. https://doi.org/10.1007/BF02392360

[5] Shishikura, M. (1987) On the Quasiconformal Surgery of Rational Functions. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **20**, 1-29. https://doi.org/10.24033/asens.1522

[6] Branner, B., Fagella, N. and Buff, X. (2014) Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9781107337602

[7] Siegel, C.L. (1942) Iterations of Analytic Functions. *Annals of Mathematics*, **43**, 607-612. https://doi.org/10.2307/1968952

[8] Shishikura, M. (2023) Surgery in Complex Dynamics. [2023-09-18]

[9] 杨飞. 拟共形手术及其应用 [D]: [硕士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 2010.