Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(2), 354-363
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.132039

三个数字集生成的 Moran 测度无穷正交集的存在性

熊 婷

福建师范大学数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2023年1月22日；录用日期：2023年2月21日；发布日期：2023年2月28日

摘 要

假设对任意的 $n \geq 1$ 整数 $p_n > 1$ 且 $D_n = \{0, a_n, b_n\} \subset \mathbb{Z}$ 其中 $a_n < b_n < p_n$。该文主要研究由整数序列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和数字集序列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 生成的 $Moran$ 测度

$$\mu := \delta_{p_1^{-1}\{0,a_1,b_1\}} * \delta_{p_1^{-1}p_2^{-1}\{0,a_2,b_2\}} * \cdots * \delta_{p_1^{-1}p_2^{-1}\cdots p_n^{-1}\{0,a_n,b_n\}} * \cdots$$

的无穷指数正交集的存在性，得到无穷卷积 μ 具有无穷指数正交集的充要条件，这为构造此函数空间的谱提供了很好的思路。

关键词

指数正交基，$Moran$ 测度，谱测度

The Existence of Infinite Orthogonal Sets of Moran Measures with Three-Element Digit Sets

Ting Xiong

College of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Jan. 22nd, 2023; accepted: Feb. 21st, 2023; published: Feb. 28th, 2023

文章引用: 熊婷. 三个数字集生成的 Moran 测度无穷正交集的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 354-363.
DOI: 10.12677/pm.2023.132039

Abstract

For $n \geq 1$, let $p_n > 1$ and $D_n = \{0, a_n, b_n\} \subset \mathbb{Z}$, where $a_n < b_n < p_n$. In this paper we study the existence of infinite orthogonal exponential sets of moran measures

$$\mu := \delta_{p_1^{-1}\{0,a_1,b_1\}} * \delta_{p_1^{-1}p_2^{-1}\{0,a_2,b_2\}} * \cdots * \delta_{p_1^{-1}p_2^{-1}\cdots p_n^{-1}\{0,a_n,b_n\}} * \cdots$$

which is generated by the sequence of integers $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ and the sequence of number sets $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$. We obtain the necessary and sufficient conditions for infinite convolution μ to have infinite orthogonal exponential sets, this provides a good idea for constructing the spectrum of this function space.

Keywords

Exponential Orthogonal Basis, Moran Measure, Spectral Measure

1. 引言

设 μ 为 $\mathbb{R}^d$ 上具有紧支撑的 *Borel* 概率测度, 如果存在可数集 $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ 使得指数函数族 $E_\Lambda := \{e^{-2\pi i<\lambda,x>} : \lambda \in \Lambda\}$ 构成 $L^2(\mu)$ 的标准正交基, 则称 μ 为谱测度, 并称 Λ 为 μ 的谱. 若谱测度 μ 为限制在紧集 Ω 上的 *Lebesgue* 测度, 则称 Ω 为谱集. 调和分析的一个基本问题是研究 μ 何时为谱测度以及它的谱具有何种形式? 关于谱研究问题, *Fuglede* [1]于 1974 年提出了著名的谱集猜想:

谱集猜想 Ω 为谱集当且仅当 Ω 是平移 *Tile*, 即存在可数实数集 Γ 使得 $\Omega \oplus \Gamma = \mathbb{R}^d$, 其中 $\oplus$ 表示直和, 等号在相差一个 *Lebesgue* 零测集意义下成立.

此猜想已经被证明在三维及以上维数都不成立, 但这一猜想在一维和二维上是否成立仍是开问题. 关于奇异测度的谱研究问题, *Jorgensen* 和 *Pedersen* [2]于 1998 年构造了第一个奇异的谱测度, 也是第一个分形谱测度. 同时指出当压缩比为偶数时, 标准 *Cantor* 测度 $\mu_{b\ \{0,1\}}$ 为谱测度, 但压缩比为 $\frac{1}{3}$ 的无穷 *Bernoulli* 卷积测度由于只有有限指数型正交集, 故不是谱测度. 这一发现激起了研究者

们极大兴趣, 自仿测度和 $Moran$ 测度的探索大门也至此打开, 大量的谱测度被构造出来, 如 [3–11]. 我们知道, 判断离散集合 Λ 是否为测度 μ 的谱, 主要从正交性和完备性两个方面验证. 因此, 我们在构造测度 μ 的谱时, 首先需要检验其正交性. Hu 和 Lau 在 [12] 中证明了数字集为 $\{0,1\}$ 的自相似测度 μ 具有无穷指数正交集当且仅当其压缩比为 $\frac{p}{q}$ 的 n 次方根, 其中 p 为奇数, q 为偶数. 随后 An, He 和 Li 在 [4] 中给出了一类无穷 $Bernoulli$ 卷积具有无穷指数正交集的充要条件.

受上述文献的启发, 我们希望推广到情况更一般的 $Moran$ 型测度. 本文主要研究一维情形下由整数集列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 生成的一类 $Moran$ 测度的无穷指数正交集的存在性. 设 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为整数序列且对任意的 $n \geq 1$,

$$p_n \geq 2,\ D_n = \{0, a_n, b_n\} \subset \mathbb{Z},\ a_n < b_n < p_n. \tag{1.1}$$

如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_1^{-1} p_2^{-1} \cdots p_n^{-1} b_n < \infty, \tag{1.2}$$

根据 [13] 可知, 测度序列

$$\mu_n = \delta_{p_1^{-1}\{0,a_1,b_1\}} * \delta_{p_1^{-1}p_2^{-1}\{0,a_2,b_2\}} * \cdots * \delta_{p_1^{-1}p_2^{-1}\cdots p_n^{-1}\{0,a_n,b_n\}}$$

弱收敛一个具有唯一紧支撑的 $Borel$ 概率测度

$$\mu := \mu_{\{p_n\},\{D_n\}} = \delta_{p_1^{-1}\{0,a_1,b_1\}} * \delta_{p_1^{-1}p_2^{-1}\{0,a_2,b_2\}} * \cdots \quad , \tag{1.3}$$

其中, $\delta_E = \frac{1}{\#E}\sum_{e\in E}\delta_e$, $\#E$ 为集合 E 的势, 且 δ_e 为单点 $e \in \mathbb{R}$ 上的 $Dirac$ 测度. 我们称该测度为 $Moran$ 测度, 且 μ 支撑在如下 $Cantor - Moran$ 集上:

$$T(\{p_n\},\{D_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} p_1^{-1} p_2^{-1} \cdots p_n^{-1} D_n. \tag{1.4}$$

在本文中, 我们推广并细化 [14] 中的结论, 主要研究由三元数字集生成的 $Moran$ 测度 μ 在什么情况下有无穷指数正交集. 对任意的 $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, 我们定义 $\nu_3(n) = max\{t : 3^t \mid n\}$, 并记

$$k_n = \nu_3(p_1 p_2 \cdots p_n) - \nu_3(3gcd(a_n, b_n)). \tag{1.5}$$

基于上面记号, 主要结论如下:

定理1.1 假设 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}, \{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如 (1.1) 所定义. 则 (1.3) 所定义的无穷卷积 μ 具有无穷指数正交集当且仅当存在无穷整数序列 $\{n_t\}_{t\geq1}$ 使得 $\{\frac{a_{n_t}}{gcd(a_{n_t},b_{n_t})}, \frac{b_{n_t}}{gcd(a_{n_t},b_{n_t})}\} \equiv \{1,-1\}\ (mod 3)$ 且 $\{k_{n_t}\}_{t\geq1}$ 严格递增.

一般来说, 给出一类 $Moran$ 测度有无穷指数正交集的充要条件是一个困难的事情, 至今所得结果非常少, 其关键在于必要性. 我们这篇文章从探究零点集的 3 因子个数出发, 找到了 $\mu_{\{p_n\},\{D_n\}}$ 存

在无穷指数正交集的充要条件.

本文的主要框架如下. 我们在第二节中主要介绍一些常用工具和已知结果. 在第三节中, 我们利用反证法证明定理 1.1 的必要性, 主要思想为当零点集的 3 因子个数不增时, 根据 $p_n > b_n$ $(n \geq 1)$ 会推出矛盾, 从而证得必要性. 通过构造 $\mu_{\{p_n\},\{D_n\}}$ 的一个无穷指数正交集来验证充分性.

2. 预备知识

在本节中, 我们将介绍一些基本概念及已知结果.

设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上具有紧支撑的 $Borel$ 概率测度, μ 的 $Fourier$ 变换定义为

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi x} d\mu(x). \tag{2.1}$$

设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的函数, 记 $f(x)$ 的零点集为

$$\mathcal{Z}(f) = \{x : f(x) = 0\}. \tag{2.2}$$

对于可数子集 $\Lambda \subset \mathbb{R}$, 根据正交性以及零点集定义, 我们有以下重要性质. 这是构造测度的正交集的常用方法.

引理2.1 集合 Λ 是测度 μ 的正交集当且仅当

$$(\Lambda - \Lambda)\backslash\{0\} \subset \mathcal{Z}(\widehat{\mu}). \tag{2.3}$$

不失一般性, 本文总假设 $0 \in \Lambda$.

设有限子集 $D \subset \mathbb{R}$, 我们称

$$M_D(x) = \frac{1}{\#D} \sum_{d \in D} e^{2\pi i d x}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

为 D 的 $Mask$ 函数. 从而 μ 的傅里叶变换可写成

$$\widehat{\mu}(x) = \prod_{n=1}^{\infty} M_{D_n}(p_1^{-1} p_2^{-1} \cdots p_n^{-1} x). \tag{2.5}$$

3. 主要定理的证明

对任意的 $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, 我们定义 $h(n) = \frac{n}{3^{v_3(n)}}$, 即 n 中的非 3 因子. 则

$$n = 3^{\nu_3(n)} h(n). \tag{3.1}$$

在下文中, 对任意的 $n \geq 1$, 我们记 $\mu_n = \delta_{p_1^{-1} D_1} * \cdots * \delta_{p_1^{-1} p_2^{-1} \cdots p_n^{-1} D_n}$, $v_{>n} = \delta_{p_{n+1}^{-1} D_{n+1}} *$

$\delta_{p_{n+1}^{-1}p_{n+2}^{-1}D_{n+2}} \cdots$. 则

$$\mu = \mu_n * v_{>n}\left(\frac{1}{p_1\cdots p_n}\right). \tag{3.2}$$

引理3.1 设 $D = \{0, a, b\}$ 是三元整数集, $\mathcal{Z}(M_D)$ 由 (2.2) 所定义, 则 :

(i) $\mathcal{Z}(M_D) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\{\frac{a}{gcd(a,b)}, \frac{b}{gcd(a,b)}\} \equiv \{1, -1\}(mod\, 3)$.

(ii) 若 $\mathcal{Z}(M_D) \neq \emptyset$, 则 $\mathcal{Z}(M_D) = \frac{3\mathbb{Z}\pm 1}{3gcd(a,b)}$.

证明 由 (2.4), 我们有

$$M_D(x) = \tfrac{1}{3}(1 + e^{-2\pi iax} + e^{-2\pi ibx}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

故 $M_D(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2\pi iax} + e^{-2\pi ibx}$ 的实部为 -1, 虚部为 0 , 即

$$\begin{cases} cos2\pi ax + cos2\pi bx = -1 \\ sin2\pi ax + sin2\pi bx = 0 \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow\ ax = l_1 \pm \frac{1}{3},\ bx = l_2 \mp \frac{1}{3},\ l_1, l_2 \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow\ a = \frac{1}{3x}(3l_1 \pm 1),\ b = \frac{1}{3x}(3l_2 \mp 1),\ l_1, l_2 \in \mathbb{Z},\ x \neq 0. \tag{3.3}$$

由 (3.3) 可知 a, b 的 3 因子个数相同. 我们记

$$a = gcd(a,b)a',\ b = gcd(a,b)b',\ a', b' \in 3\mathbb{Z} \pm 1. \tag{3.4}$$

断言 $\{\frac{a}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}}, \frac{b}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}}\} \equiv \{1, -1\}(mod\, 3)$ 当且仅当 $\{\frac{a}{gcd(a,b)}, \frac{b}{gcd(a,b)}\} \equiv \{1, -1\}(mod\, 3)$.

证明断言 由 (3.1) 可知 $gcd(a,b) = 3^{\nu_3(gcd(a,b))}h(gcd(a,b))$, 不妨设 $h(gcd(a,b)) \in 3\mathbb{Z} + 1$.

必要性: 当 $\{\frac{a}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}}, \frac{b}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}}\} \equiv \{1, -1\}(mod\, 3)$ 时, 不妨设 $\frac{a}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}} \in 3\mathbb{Z}+1$, $\frac{b}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}} \in 3\mathbb{Z} - 1$, 我们有

$$\frac{a}{gcd(a,b)} = \frac{a}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}h(gcd(a,b))} \in 3\mathbb{Z} + 1.$$

否则, 若 $\frac{a}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}h(gcd(a,b))} \in 3\mathbb{Z} - 1$. 此时存在 $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{a}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}} = (3z_1 + 1)(3z_2 - 1) \in 3\mathbb{Z} - 1.$$

这与已知矛盾, 故 $\frac{a}{gcd(a,b)} \in 3\mathbb{Z} + 1$. 同理可证 $\frac{b}{gcd(a,b)} \in 3\mathbb{Z} - 1$, 断言的必要性得证.

充分性：与必要性证明类似，当 $\{\frac{a}{gcd(a,b)}, \frac{b}{gcd(a,b)}\} \equiv \{1,-1\}(mod\ 3)$ 时，不妨设 $\frac{a}{gcd(a,b)} \in 3\mathbb{Z}+1$, $\frac{b}{gcd(a,b)} \in 3\mathbb{Z}-1$, 容易得到

$$\frac{a}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}} = \frac{a}{gcd(a,b)} h(gcd(a,b)) \in 3\mathbb{Z}+1.$$

并且, $\frac{b}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}} \in 3\mathbb{Z}-1$. 综上, 断言得证.

(i) 由断言可知, 即证 $\mathcal{Z}(M_D) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\{\frac{a}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}}, \frac{b}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}}\} \equiv \{1,-1\}(mod\ 3)$.

必要性：由 (3.3) 可知 $\frac{a}{b} = \frac{3l_1 \pm 1}{3l_2 \mp 1}$, 即

$$a + b = \pm 3\,(al_2 - bl_1), \tag{3.5}$$

故有 $3 \mid a+b$.
(a) 若 $a \in 3\mathbb{Z} \pm 1$, $b \in 3\mathbb{Z} \mp 1$, 结论显然成立.
(b) 若 $3 \mid a$, $3 \mid b$. 由 (3.5) 可知 $a' + b' = \pm 3\,(a'l_2 - b'l_1)$. 对 a', b' 进行类似地分析可得 $\{\frac{a}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}}, \frac{b}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}}\} \equiv \{1,-1\}(mod\ 3)$.

充分性：若 $\{\frac{a}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}}, \frac{b}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}}\} \equiv \{1,-1\}(mod\ 3)$, 则存在 $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{a}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}} = 3m_1 \pm 1,\ \frac{b}{3^{\nu_3(gcd(a,b))}} = 3m_2 \mp 1.$$

因此, 只要取 $l_1 = m_1, l_2 = m_2$ 就有

$$\frac{a}{b} = \frac{3m_1 \pm 1}{3m_2 \mp 1} = \frac{3l_1 \pm 1}{3l_2 \mp 1}.$$

于是, 总可以找到 $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ 满足 (3.3), 故 $\mathcal{Z}(M_D) \neq \emptyset$.

(ii) 由 (3.3)、(3.4) 可知,

$$x \in \mathcal{Z}(M_D) \Leftrightarrow x \in \frac{1}{3a}(3\mathbb{Z} \pm 1) \cap \frac{1}{3b}(3\mathbb{Z} \mp 1) = \frac{1}{3gcd(a,b)}\left(\frac{1}{a'}(3\mathbb{Z} \pm 1) \cap \frac{1}{b'}(3\mathbb{Z} \mp 1)\right).$$

下证 $\frac{1}{a'}(3\mathbb{Z} \pm 1) \cap \frac{1}{b'}(3\mathbb{Z} \mp 1) = 3\mathbb{Z} \pm 1$, 其中 $gcd(a', b') = 1$. 由于 $a', b' \in 3\mathbb{Z} \pm 1$, 则

$$3\mathbb{Z} \pm 1 \subseteq \frac{1}{a'}(3\mathbb{Z} \pm 1),\ \ 3\mathbb{Z} \pm 1 \subseteq \frac{1}{b'}(3\mathbb{Z} \mp 1).$$

故 $3\mathbb{Z} \pm 1 \subseteq \frac{1}{a'}(3\mathbb{Z} \pm 1) \cap \frac{1}{b'}(3\mathbb{Z} \mp 1)$. 另一方面, 对任意的 $x \notin 3\mathbb{Z} \pm 1$, 我们有 $x \notin \frac{1}{a'}(3\mathbb{Z} \pm 1)$. 否则会存在 $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$a'(3z_1) = 3z_1 \pm 1.$$

这显然不可能. 故 $3\mathbb{Z} \pm 1 \supseteq \frac{1}{a'}(3\mathbb{Z} \pm 1) \cap \frac{1}{b'}(3\mathbb{Z} \mp 1)$. 综上, $\mathcal{Z}(M_D) = \frac{3\mathbb{Z} \pm 1}{3gcd(a,b)}$. □

由上述引理, 我们有

$$\mathcal{Z}(\widehat{\mu}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} p_1p_2\cdots p_n \frac{3\mathbb{Z}\pm 1}{3gcd(a_n,b_n)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} 3^{k_n}\frac{h(p_1p_2\cdots p_n)}{h(gcd(a_n,b_n))}(3\mathbb{Z}\pm 1). \tag{3.6}$$

证明定理1.1

必要性 : 我们首先证明存在无穷多个 $n \geq 2$ 使得 $\{\frac{a_n}{gcd(a_n,b_n)}, \frac{b_n}{gcd(a_n,b_n)}\} \equiv \{1,-1\}\ (mod 3)$. 否则, 假设存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N$ 时, $\{\frac{a_n}{gcd(a_n,b_n)}, \frac{b_n}{gcd(a_n,b_n)}\} \neq \{1,-1\}\ (mod 3)$. 由引理 3.1 (i) 可知

$$\mathcal{Z}\left(\widehat{v_{>N}}\left(\frac{1}{p_1\cdots p_N}\right)\right) = \emptyset.$$

假设 Λ 是 μ 的无穷正交集且 $0 \in \Lambda$. 根据引理 2.1 结合 (3.2), 有

$$(\Lambda - \Lambda)\backslash\{0\} \subseteq \mathcal{Z}(\widehat{\mu}) = \mathcal{Z}(\widehat{\mu}_N).$$

这与 Λ 为无穷正交集矛盾, 故假设不成立.

这里我们不妨设对任意 $n \geq 1$, 有 $\{\frac{a_n}{gcd(a_n,b_n)}, \frac{b_n}{gcd(a_n,b_n)}\} \equiv \{1,-1\}\ (mod 3)$. 下证存在一无穷整数序列 $\{n_t\}_{t\geq 1}$ 使得 $\{k_{n_t}\}_{t\geq 1}$ 严格递增. 否则会有以下两种情形 :

情形 I : $\{k_n\}_{n\geq 1}$ 无下界. 不妨设 $\{k_n\}_{n\geq 1}$ 严格递减. 假设 Λ 是 μ 的无穷正交集且 $0 \in \Lambda$, 由引理 2.1 结合 (3.6) 可知任取 $\lambda_0 \in \Lambda$, 存在正整数 n_0 以及 $t_0 \in 3\mathbb{Z}\pm 1$ 使得

$$\lambda_0 = 3^{k_{n_0}}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_0})}{h(gcd(a_{n_0},b_{n_0}))}t_0.$$

由于 $\{k_n\}_{n\geq 1}$ 严格递减, 故存在无穷多整数 $n_j > n_0\ (j > 0)$, 使得 $\lambda_j \in \Lambda$ 且

$$\lambda_j \in 3^{k_{n_j}}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_j})}{h(gcd(a_{n_j},b_{n_j}))}(3\mathbb{Z}\pm 1), \quad k_{n_j} < k_{n_0}.$$

不妨设存在 $t_j \in 3\mathbb{Z}\pm 1$ 使得

$$\lambda_j = 3^{k_{n_j}}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_j})}{h(gcd(a_{n_j},b_{n_j}))}t_j.$$

则

$$\lambda_0 - \lambda_j = \begin{cases} 3^{k_{n_0}}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_0})}{h(gcd(a_{n_0},b_{n_0}))}\left(t_0 - 3^{k_{n_j}-k_{n_0}}\frac{h(gcd(a_{n_0},b_{n_0}))}{h(p_1p_2\cdots p_{n_0})}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_j})}{h(gcd(a_{n_j},b_{n_j}))}t_j\right) \\ \\ 3^{k_{n_j}}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_j})}{h(gcd(a_{n_j},b_{n_j}))}\left(-t_j + 3^{k_{n_0}-k_{n_j}}\frac{h(gcd(a_{n_j},b_{n_j}))}{h(p_1p_2\cdots p_{n_j})}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_0})}{h(gcd(a_{n_0},b_{n_0}))}t_0\right) \end{cases},$$

由 $k_{n_j} < k_{n_0}$ 易知 $\lambda_0 - \lambda_j \notin 3^{k_{n_0}}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_0})}{h(gcd(a_{n_0},b_{n_0}))}(3\mathbb{Z}\pm 1)$. 因此, 由 Λ 的正交性可知 $\lambda_0 - \lambda_j \in$

$3^{k_{n_j}}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_j})}{h(gcd(a_{n_j},b_{n_j}))}(3\mathbb{Z}\pm 1)$. 于是,

$$\frac{h(gcd(a_{n_j},b_{n_j}))}{h(p_1p_2\cdots p_{n_j})}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_0})}{h(gcd(a_{n_0},b_{n_0}))}t_0\in\mathbb{Z}.$$

也就是说,

$$t_0\in\frac{h(p_{n_0+1}p_{n_0+2}\cdots p_{n_j})h(gcd(a_{n_0},b_{n_0}))}{h(gcd(a_{n_j},b_{n_j}))}\mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

但 $p_n>b_n$ ($n\geq 1$), 所以

$$\frac{p_1p_2\cdots p_n}{3gcd(a_n,b_n)}=3^{k_n}\frac{h(p_1p_2\cdots p_n)}{h(gcd(a_n,b_n))}\to+\infty,\quad n\to+\infty.$$

又因为 $\{k_n\}_{n\geq 1}$ 严格递减. 故只有

$$\frac{h(p_1p_2\cdots p_n)}{h(gcd(a_n,b_n))}\to+\infty,\quad n\to+\infty. \tag{3.8}$$

这与存在 $t_0\in 3\mathbb{Z}\pm 1$ 且满足 (3.7) 矛盾.

情形 II : $\{k_n\}_{n\geq 1}$ 有下界. 此时存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\{k_n\}_{n\geq N}$ 都相同且 $\{\frac{a_n}{gcd(a_n,b_n)},\frac{b_n}{gcd(a_n,b_n)}\}\equiv\{1,-1\}\ (mod 3)$.

如果 Λ' ($0\in\Lambda'$) 是 $v_{>N}\left(\frac{1}{p_1\cdots p_N}\right)$ 的无穷正交集, 由引理 2.1 及引理 3.1 (ii) 可知任取 $\lambda_0\in\Lambda$, 存在正整数 $n_0>N$ 以及 $q_0\in 3\mathbb{Z}\pm 1$ 使得

$$\lambda_0=3^{k_{n_0}}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_0})}{h(gcd(a_{n_0},b_{n_0}))}q_0.$$

由于 $\{k_n\}_{n\geq N}$ 都相同, 故存在无穷多整数 $n_j>n_0$ ($j>0$) 及 $q_j\in 3\mathbb{Z}\pm 1$, 使得 $\lambda_j\in\Lambda$ 且

$$\lambda_j=3^{k_{n_j}}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_j})}{h(gcd(a_{n_j},b_{n_j}))}q_j,\quad k_{n_j}=k_{n_0}.$$

于是

$$\lambda_0-\lambda_j=\begin{cases}3^{k_{n_0}}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_0})}{h(gcd(a_{n_0},b_{n_0}))}\left(q_0-\frac{h(gcd(a_{n_0},b_{n_0}))}{h(p_1p_2\cdots p_{n_0})}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_j})}{h(gcd(a_{n_j},b_{n_j}))}q_j\right)\\[2ex] 3^{k_{n_j}}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_j})}{h(gcd(a_{n_j},b_{n_j}))}\left(-q_j+\frac{h(gcd(a_{n_j},b_{n_j}))}{h(p_1p_2\cdots p_{n_j})}\frac{h(p_1p_2\cdots p_{n_0})}{h(gcd(a_{n_0},b_{n_0}))}q_0\right)\end{cases},$$

由于 $n>N$ 时, $\{k_n\}_{n\geq N}$ 都相同. 因此, (3.8) 仍然成立. 与情形 I 类似, 这与存在一 $t_0\in 3\mathbb{Z}\pm 1$ 及无穷多 $t_j\in 3\mathbb{Z}\pm 1$ ($j>0$) 矛盾. 故 $v_{>N}\left(\frac{1}{p_1\cdots p_N}\right)$ 只有有限指数正交集, 由 (3.2) 可知这与已知 μ 有无穷指数正交集矛盾. 必要性得证.

充分性 : 根据已知条件, 我们不妨设对任意 $n\geq 1$, 有 $\{\frac{a_n}{gcd(a_n,b_n)},\frac{b_n}{gcd(a_n,b_n)}\}\equiv\{1,-1\}\ (mod 3)$

且 $\{k_n\}_{n\geq 1}$ 为严格递增序列. 下构造 μ 的一个无穷指数正交集.

记

$$\Lambda_n^\sigma = \{3^{k_1}h(p_1)3\sigma_1 + 3^{k_2}h(p_1p_2)\sigma_2 + \cdots + 3^{k_n}h(p_1p_2\cdots p_n)\sigma_n : \sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \{0,1,-1\}\},$$
$$\Lambda^\sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n^\sigma.$$

任取 λ, $\lambda' \in \Lambda^\sigma$ 且 $\lambda \neq \lambda'$. 此时一定会存在整数 $z, z' \geq 1$ 及 $\sigma_j \in \{0,1,-1\}$ $(1 \leq j \leq z), \sigma'_j \in \{0,1,-1\}$ $(1 \leq j \leq z')$ 使得

$$\lambda = \sum_{j=1}^{z} 3^{k_j} h(p_1p_2\cdots p_j)\sigma_j, \quad \lambda' = \sum_{j=1}^{z'} 3^{k_j} h(p_1p_2\cdots p_j)\sigma_j.$$

假设 s $(s \geq 1)$ 为第一个使得 $\sigma_s \neq \sigma'_s$ 的下标, 则

$$\lambda - \lambda' = 3^{k_s} h(p_1p_2\cdots p_s)[(\sigma_s - \sigma'_s) + 3\alpha] \in 3^{k_s} h(p_1p_2\cdots p_s)(3\mathbb{Z} \pm 1), \quad \alpha \in \mathbb{Z}.$$

根据 (3.6) 式可知 $\lambda - \lambda' \in \mathcal{Z}(\widehat{\mu})$, 故由引理 2.1 可知 Λ^σ 是 μ 的一个无穷指数正交集. 定理得证.

参考文献

[1] Fuglede, B. (1974) Commuting Self-Adjoint Partial Differential Operators and a Group Theoretic Problem. *Journal of Functional Analysis*, **16**, 101-121. https://doi.org/10.1016/0022-1236(74)90072-X

[2] Jorgensen, P.E.T. and Pedersen, S. (1998) Dense Analytic Subspaces in Fractall L^2-Spaces. *Journal d'Analyse Mathématique*, **75**, 185-228. https://doi.org/10.1007/BF02788699

[3] An, L.X. and He, X.G. (2014) A Class of Spectral Moran Measures. *Journal of Functional Analysis*, **266**, 343-354. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.08.031

[4] An, L.X., He, X.G. and Li, H.X. (2015) Spectrality of Infinite Bernoulli Convolutions. *Journal of Functional Analysis*, **269**, 1571-1590. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.05.008

[5] An, L.X., He, L. and He, X.G. (2019) Spectrality and Non-Spectrality of the Riesz Product Measures with Three Elements in Digit Sets. *Journal of Functional Analysis*, **277**, 255-278. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.10.017

[6] An, L.X., Fu, X.Y. and Lai, C.K. (2019) On Spectral Cantor-Moran Measures and a Variant of Bourgain's Sum of Sine Problem. *Advances in Mathematics*, **349**, 84-124. https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.04.014

[7] Dutkay, D.E. and Jorgensen, P.E.T. (2012) Fourier Duality for Fractal Measures with Affine Scales. *Mathematics of Computation*, **81**, 2253-2273. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2012-02580-4

[8] Dutkay, D.E., Haussermann, J. and Lai, C.K. (2019) Hadamard Triples Generate Self-Affine Spectral Measures. *Transactions of the American Mathematical Society*, **371**, 1439-1481. https://doi.org/10.1090/tran/7325

[9] Ding, D.X. (2017) Spectral Property of Certain Fractal Measures. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **451**, 623-628. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.02.040

[10] Deng, Q.R. (2014) Spectrality of One Dimensional Self-Similar Measures with Consecutive Digits. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **409**, 331-346. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.046

[11] Wang, Z.Y., Dong, X.H. and Liu, Z.S. (2018) Spectrality of Certain Moran Measures with Three-Element Digit Sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **459**, 743-752. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.11.006

[12] Hu, T.Y. and Lau, K.S. (2008) Spectral Property of the Bernoulli Convolutions. *Advances in Mathematics*, **219**, 554-567. https://doi.org/10.1016/j.aim.2008.05.004

[13] Strichartz, R.S. (2006) Convergence of Mock Fourier Series. *Journal d'Analyse Mathématique*, **99**, 333-353. https://doi.org/10.1007/BF02789451

[14] Wang, Z.Y., Wang, Z.M., Dong, X.H. and Zhang, P.F. (2018) Orthogonal Exponential Functions of Self-Similar Measures with Consecutive Digits in R. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **467**, 1148-1152. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.07.062