Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 423-427
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133046

一类趋化模型解的局部存在性

陈淑婷

广州大学数学与信息科学学院，广东 广州

收稿日期：2023年2月6日；录用日期：2023年3月6日；发布日期：2023年3月14日

摘 要

在本文中，我们考虑以下抛物-抛物-抛物趋化模型：

$$\begin{cases} \partial_t u = \nabla\cdot(D(u)\nabla u) - \nabla\cdot(S(u)\nabla v) + \nabla\cdot(R(u)\nabla w), & x\in\Omega,\ t>0, \\ \partial_t v = \Delta v + f(u,v), & x\in\Omega,\ t>0, \\ \partial_t w = \Delta w + g(u,w), & x\in\Omega,\ t>0, \\ \frac{\partial u}{\partial\nu} = \frac{\partial v}{\partial\nu} = \frac{\partial w}{\partial\nu} = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), w(x,0)=w_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

这里Ω为$\mathbb{R}^n(n\geq 1)$中的有界光滑凸区域。本文通过分析该模型并结合已有文献，在一定条件下给出了这类趋化模型解的局部存在性。

关键词

趋化性，**Keller-Segel**模型，局部存在性

Local Existence of Solutions for a Class of Chemotaxis Model

Shuting Chen

School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong

文章引用: 陈淑婷. 一类趋化模型解的局部存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 423-427.
DOI: 10.12677/pm.2023.133046

Received: Feb. 6^{th}, 2023; accepted: Mar. 6^{th}, 2023; published: Mar. 14^{th}, 2023

Abstract

In this paper, we consider the following parabolic-parabolic-parabolic Chemotaxis Model:

$$\begin{cases} \partial_t u = \nabla\cdot(D(u)\nabla u) - \nabla\cdot(S(u)\nabla v) + \nabla\cdot(R(u)\nabla w), & x\in\Omega,\ t>0, \\ \partial_t v = \Delta v + f(u,v), & x\in\Omega,\ t>0, \\ \partial_t w = \Delta w + g(u,w), & x\in\Omega,\ t>0, \\ \frac{\partial u}{\partial\nu} = \frac{\partial v}{\partial\nu} = \frac{\partial w}{\partial\nu} = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), w(x,0)=w_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

in a bounded convex domain $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, with smooth boundary. Based on the known results in the references, by analyzing the model, we obtain the local existence of solutions for this kind of chemotaxis model under certain conditions.

Keywords

Chemotaxis, Keller-Segel Model, Local Existence

1. 介绍

Keller和Segel在1970年介绍了趋化的经典数学模型(参见 [1])，描述了细胞黏菌向更高浓度的化学信号聚集，其经典的趋化模型如下

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla v), & x\in\Omega, t>0 \\ v_t = \Delta v - v + u, & x\in\Omega, t>0. \end{cases} \tag{1.1}$$

对于模型(1.1)及其变体的分析主要集中在解的有界性和爆破问题上，并且已得到了广泛的研究。

为了更好地了解系统 (1.4) 的发展，我们对已有工作进行简要介绍。对于拟线性 Keller-Segel 趋化模型

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (D(u,v)\nabla u) - \nabla \cdot (S(u,v)\nabla v), & x \in \Omega, t > 0 \\ v_t = \Delta v + G(u,v), & x \in \Omega, t > 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

在过去二十年里已引起了国内外学者的广泛关注。

在系统 (1.2)中，如果 $G(u,v) = -v + u$，那么我们有如下系统

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (D(u,v)\nabla u) - \nabla \cdot (S(u,v)\nabla v), & x \in \Omega, t > 0 \\ v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, t > 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

该系统已经得到了广泛的关注(参见 [2–5])。

本文研究了一类拟线性抛物-抛物-抛物趋化系统

$$\begin{cases} \partial_t u = \nabla \cdot (D(u)\nabla u) - \nabla \cdot (S(u)\nabla v) + \nabla \cdot (R(u)\nabla w), & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_t v = \Delta v + f(u,v), & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_t w = \Delta w + g(u,w), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), w(x,0) = w_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

这里 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ 中的有界光滑凸区域, 其中 D, S 和 R 是在 $[0,\infty)$ 上规定的函数, 其值分别在 $(0,\infty)$, $[0,\infty)$ 和 $(0,\infty)$ 上, $u(x,t)$ 表示细胞密度, $v(x,t)$ 和 $w(x,t)$ 分别表示化学吸引和化学排斥的浓度.

2. 条件设定

假定函数 $D(s), S(s), R(s)$ 满足如下条件：

(A1)假设D, S 和R 满足

$$\begin{cases} D \in C^2([0,\infty)) \\ S \in C^2([0,\infty)) \\ R \in C^2([0,\infty)). \end{cases} \tag{2.1}$$

其中D是正的,S和R是非负的且$S(0) = 0, R(0) = 0$.

(A2)初始条件u_0, v_0, w_0满足以下假设

$$\begin{cases} u_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) & u_0 \geq 0 \\ v_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) & v_0 \geq 0 \\ w_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) & w_0 \geq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

其中u_0, v_0, w_0都在Ω内.

DOI: 10.12677/pm.2023.133046

3. 解的局部存在性

通过分析该模型并结合参考文献 [6–10]. 在D, S, R满足(A1)，且u_0, v_0, w_0满足(2.2)的条件下，我们得到该模型解的局部存在性, 并给出可扩展性的基本陈述.

这里我们使用文献 [11]为系统(1.2) 提出的方法来处理系统(1.4) ，其中$f(u, v) = -v + u$, $g(u, w) = -uw$ 或$g(u, w) = -u + w$.

对于相应的问题$f(u, v) = -v + u$和$g(u, w) = -uw$，我们有

$$\begin{cases} \partial_t u = \nabla \cdot (D(u)\nabla u) - \nabla \cdot (S(u)\nabla v) + \nabla \cdot (R(u)\nabla w), & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_t v = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_t w = \Delta w - uw, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), w(x,0) = w_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

定理 3.1 设D, S, R满足(A1)，且u_0, v_0, w_0满足(2.2)，令$\vartheta > n$,则存在$T_{\max} \in (0, \infty]$和三重非负函数

$$\begin{cases} u \in C^0\left(\Omega \times [0, T_{\max})\right) \cap C^{2,1}\left(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max})\right) \\ v \in C^0\left(\Omega \times [0, T_{\max})\right) \cap C^{2,1}\left(\Omega \times (0, T_{\max})\right) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}\left([0, T_{\max}); W^{1,\vartheta}(\Omega)\right) \\ w \in C^0\left(\Omega \times [0, T_{\max})\right) \cap C^{2,1}\left(\Omega \times (0, T_{\max})\right) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}\left([0, T_{\max}); W^{1,\vartheta}(\Omega)\right) \end{cases}$$

使得(u, v, w)在$\Omega \times (0, T_{\max})$中是(3.1) 的古典解，并且使得我们可以选择

$$T_{\max} = \infty, \text{ 或者 } \limsup_{t \to T_{\max}} \left(\|u(\cdot,t)\|_{L^x(\Omega)} + \|v(\cdot,t)\|_{W^{1,\vartheta}(\Omega)} + \|w(\cdot,t)\|_{W^{1,\vartheta}(\Omega)} \right) = \infty. \tag{3.2}$$

定理 3.2 设$\left(e^{t\Delta}\right)_{t\geq 0}$ 为Ω 中的Neumann 热半群，$\lambda_1 > 0$表示Neumann边界条件下Ω中$-\Delta$ 的第一非零特征值.则存在仅依赖于Ω 的常数$M_1, \cdots, M_4$，它们具有以下性质:

(1)如果$1 \leq q \leq p \leq \infty$,那么对所有$t > 0$有:

$$\left\|e^{t\Delta} w\right\|_{L^p(\Omega)} \leq M_1 \left(1 + t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)}\right) e^{-\lambda_1 t} \|w\|_{L^q(\Omega)},$$

成立，且对所有$w \in L^q(\Omega)$满足$\int_\Omega w = 0$.

(2)如果$1 \leq q \leq p \leq \infty$,那么对所有$t > 0$,对每个$w \in L^q(\Omega)$有:

$$\left\|\nabla e^{t\Delta} w\right\|_{L^p(\Omega)} \leq M_2 \left(1 + t^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)}\right) e^{-\lambda_1 t} \|w\|_{L^q(\Omega)},$$

(3)如果$2 \leq p < \infty$,那么对所有$t > 0, w \in W^{1,p}(\Omega)$ 有:

$$\left\|\nabla e^{t\Delta} w\right\|_{L^p(\Omega)} \leq M_3 e^{-\lambda_1 t} \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)},$$

(4)令$1 < p \le p < \infty$,那么对所有$w \in (C_0^\infty(\Omega))^n$,$t > 0$有:

$$\left\|e^{t\Delta}\nabla \cdot w\right\|_{L^p(\Omega)} \le M_4\left(1 + t^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\right)e^{-\lambda_1 t}\|w\|_{L^q(\Omega)}, \tag{3.3}$$

成立. 因此对于所有$t > 0$，算子$e^{t\Delta}\nabla$拥有一个唯一确定的从$L^q(\Omega)$到$L^p(\Omega)$的算子扩展，其中范数按(3.3)控制。

参考文献

[1] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1970) Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability. *Journal of Theoretical Biology*, **26**, 399-415. https://doi.org/10.1016/0022-5193(70)90092-5

[2] Winkler, M. (2013) Finite-Time Blow-Up in the Higher-Dimensional Parabolic-Parabolic Keller-Segel System. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **100**, 748-767. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2013.01.020

[3] Osaki, K. and Yagi, A. (2001) Finite Dimensional Attractor for One-Dimensional Keller-Segel Equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, **44**, 441-469.

[4] Nagai, T., Senba, T. and Yoshida, K. (1997) Application of the Trudinger-Moser Inequality to a Parabolic System of Chemotaxis. *Funkcialaj Ekvacioj*, **40**, 411-433.

[5] Cao, X. (2015) Global Bounded Solutions of the Higher-Dimensional Keller-Segel System under Smallness Conditions in Optimal Spaces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **35**, 1891-1904. https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.1891

[6] Cieślak, T. (2007) Quasilinear Nonuniformly Parabolic System Modelling Chemotaxis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **326**, 1410-1426. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.03.080

[7] Horstmann, D. and Winkler, M. (2005) Boundedness vs. Blow-Up in a Chemotaxis System. *Journal of Differential Equations*, **215**, 52-107. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.10.022

[8] Tao, Y. and Winkler, M. (2011) A Chemotaxis-Haptotaxis Model: The Roles of Nonlinear Diffusion and Logistic Source. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **43**, 685-704. https://doi.org/10.1137/100802943

[9] Wrzosek, D. (2004) Global Attractor for a Chemotaxis Model with Prevention of Overcrowding. *Nonlinear Analysis*, **59**, 1293-1310. https://doi.org/10.1016/j.na.2004.08.015

[10] Winkler, M. (2010) Aggregation vs. Global Diffusive Behavior in the Higher-Dimensional Keller-Segel Model. *Journal of Differential Equations*, **248**, 2889-2905. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.02.008

[11] Zhang, Q. and Li, Y. (2015) Stabilization and Convergence Rate in a Chemotaxis System with Consumption of Chemoattractant. *Journal of Mathematical Physics*, **56**, Article ID: 081506. https://doi.org/10.1063/1.4929658