Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 428-436
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133047

双曲线上的Riemann边值问题

魏雨秋[1]，刘　华[2]

[1]天津职业技术师范大学理学院，天津
[2]上海电子信息职业技术学院数学系，上海

收稿日期：2023年2月6日；录用日期：2023年3月6日；发布日期：2023年3月14日

摘　要

本文给出了双曲线上的Riemann边值问题的解法。首先我们通过共形映射的方法将沿封闭曲线剖开的分区全纯函数在无穷远点处Cauchy型积分的性质，Plemelj公式以及Cauchy主值积分在无穷远处的性质推广到双曲线上，利用共形映射将无限长的双曲线上的Riemann边值问题转化为封闭曲线上的Riemann边值问题，利用已有的封闭曲线上的Riemann边值问题的解法对不同情况下的双曲线上的Riemann边值问题进行求解，验证。

关键词

双曲线，Plemelj公式，Riemann边值问题

Riemann Boundary Value Problems on the Hyperbola

Yuqiu Wei[1], Hua Liu[2]

[1]College of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin
[2]Department of Mathematics, Shanghai Technical Institute of Electronics Information, Shanghai

Received: Feb. 6th, 2023; accepted: Mar. 6th, 2023; published: Mar. 14th, 2023

Abstract

This article gives the solution to the Riemann boundary value problem on hyperbolas. Firstly, we generalize the properties of Cauchy-type integrals at infinity of the partition holomorphic function cut along the closed curve by the method of conformal mapping, the Plemelj formula and the properties of Cauchy principal integrals at infinity, and use conformal mapping to transform the Riemann boundary value problem on the infinite hyperbola into the Riemann boundary value

文章引用: 魏雨秋, 刘华. 双曲线上的 Riemann 边值问题[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 428-436.
DOI: 10.12677/pm.2023.133047

problem on the closed curve. The solution method of the Riemann boundary value problem on the existing closed curve is used to solve the Riemann boundary value problem on the hyperbola and verify.

Keywords

Hyperbola, Plemelj Formula, Riemann Boundary Value Problem

1. 引言

Riemann 边值问题是解析函数边值问题中极为重要的研究问题之一，是力学、工程技术中有力的工具。上世纪五十年代，以 N I Muskhelishvili [1]为首的前苏联科学院士把复边值问题的研究推向了顶峰和纯熟，成功将解析函数边值问题和奇异积分方程进行联系和转化，并以专著《Singular Integral Equations》闻名于世，F D Gakhov 的专著[2]也总结了这方面的工作。近年来，路见可教授[3]在 Riemann 边值问题上给出了很多经典结果，其专著《解析函数边值问题》详细论述了封闭曲线以及开口曲线的 Riemann 边值问题以及解的形式。对于探讨无穷曲线上的 Riemann 边值问题相关的文章少之又少，这主要是由于以无穷曲线(包括实轴在内)为跳跃曲线的分区全纯函数在无穷远点处的主部及阶没有给出适当的定义。本文将阐述在开口无限长双曲线 L 和 Hölder 连续系数下的最基本的 Riemann 边值问题，通过共形映射将双曲线转化为封闭曲线，从一般的求解 Riemann 边值问题的方法出发，讨论双曲线上的 Riemann 边值问题，并利用 Plemelj 公式进一步讨论对于不同条件下 Riemann 边值问题的可解条件以及解的形式。虽然结论与经典意义下的有限曲线的相关结论类似，但是数学本质上却有着极大的差异，并非是经典理论结果的简单推理。

2. 基础知识

设双曲线 $L\left(x^2-y^2=1\right)$ (右支即 $x\ge 1$)为跳跃曲线分区全纯函数的 Riemann 边值问题所选取的无限长开口曲线，它也被认为是函数 $x=\varphi(y)=\sqrt{y^2+1}$，取双曲线 L 至上而下的方向为正方向。本文定义 l_a 为 $\varphi(a)+ia$，$\infty^{\pm}$ 分别表示为 L 上上下无穷远处的点。定义复平面 $\mathbb{C}$ 由以下两个相连部分组成，并且默认右侧部分为 S^+ 以及左侧部分为 S^-。用 ρ 表示映射 $r(z)=\dfrac{1}{z}$。

定义 1 [4] 设 f 是定义在双曲线 L 上的一子弧段(开口弧段或者包含端点，有限或无限)上，若对 L 上任意两点 t'，t'' 成立

$$\left|f(t')-f(t'')\right|\le M\left|t'-t''\right|^{\mu},\quad 0<\mu\le 1, \tag{1}$$

其中 M 和 μ 是确定的常数，则称 f 在 L 上满足 μ 阶的 Hölder 条件或 H^{μ} 条件，记为 $f\in H^{\mu}(L)$，其中 μ 称为 Hölder 指数。若不强调指数 μ，也可简记为 $f\in H(L)$。

定义 2 [4]设 f 定义在双曲线 L 上的一段无限长弧段 $\widehat{l_{\infty^+}l_a}\cup\widehat{l_a l_{\infty^-}}$，且 $f\in H^{\mu}(L)$。若对 L 上任意两点 t'，t'' 成立

$$\left|f(t')-f(t'')\right|\le M\left|\frac{1}{t'}-\frac{1}{t''}\right|^{\mu},\quad 0<\mu\le 1, \tag{2}$$

其中 M 和 μ 是确定的常数。则称 f 在 ∞ 附近满足 μ 阶的 $\hat{H}$ 条件。记为 $f\in\hat{H}^{\mu}(\infty)$，或者记为 $f\in\hat{H}(\infty)$。

定义 3 [4] 设 $f\in\hat{H}^{\mu}(L')$，对任一闭子弧段 $L'=\widehat{l'_a l'_b}\in L$ 成立，则记为 $f\in H_c^{\mu}(L)$ 或简记为 $f\in H_c(L)$。

注 1 若 $f\in\hat{H}^{\mu}(\infty)$ 且 $f(\infty)=0$，我们记为 $f\in\hat{H}_0^{\mu}(\infty)$ 或简记为 $f\in\hat{H}_0(\infty)$。

假设 f 是定义在双曲线 L 上的函数，当 $t\to\infty$ 时，若存在实数 ν 和有界函数 f^*，使得 $f(t)=\dfrac{f^*(t)}{t^{\nu}}$，或等价地 $f(t)=O(t^{-\nu})$，我们将其记为 $f\in O^{\nu}(\infty)$。

定义 4 [4] 设 f 定义在双曲线 L 上，且在任一有限闭子弧段 $L'=\widehat{l'_a l'_b}\in L$ 上可积，我们称

$$(C[f])(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau\quad z\in\mathbb{C}\setminus L, \tag{3}$$

为双曲线 L 上带核密度为 f 的 Cauchy 型积分或简称为 Cauchy 型积分。

引理 1 [5] (Cauchy 型积分在无穷远处的广义主部)若 $f\in H(L)O^{\nu}(\infty)(\nu>0)$，且在任意闭子弧段 $L'=\widehat{l'_a l'_b}\in L$ 上可积，则

$$G.P\left[C[f],\infty\right]=0, \tag{4}$$

其中 $C[f]$ 是(3)中所给的 Cauchy 型积分。

推论 1 [5] (Cauchy 型积分在无穷远处(广义)主部的有限展式)若 $f\in H_{\lambda,\nu}^{\mu}(L)(\nu>0)$ 其中 λ 是一个正整数，且假定在任意闭子弧段 $L'=\widehat{l'_a l'_b}\in L$ 上可积，则

$$G.P\left[z^{\lambda}C[f],\infty\right](z)=-\sum_{k=0}^{\lambda-1}\frac{z^{\lambda-1-k}}{2\pi i}\int_L f(\tau)\tau^k\mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

其中 $C[f]$ 是(3)中所给的 Cauchy 型积分。

引理 2 [5] (Cauchy 型积分的边值)若 $f\in H_c^{u}(L)\cap O^{\nu}(\infty)(\nu>0)$，则它的 Cauchy 型积分 $C[f]$ 有正负边值，并且满足下面 Plemelj 公式

$$\begin{cases} C[f]^{+}(z)=\dfrac{1}{2}f(z)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau \\ C[f]^{-}(z)=-\dfrac{1}{2}f(z)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau \end{cases}\quad z\in L, \tag{6}$$

其中上式出现的积分是双曲线 L 上的 Cauchy 主值积分。

引理 3 [5]若 $f\in H_c^{u}(L)\cap O^{\nu}(\infty)(\nu>0)$ 则(3)中所给的 Cauchy 型积分 $C[f]$ 是以双曲线 L 为跳跃曲线的分区全纯函数。

定义 5 令 $z=\sqrt{1+x^2}+ix$，如果 $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\dfrac{1}{2\pi i}\left[\displaystyle\int_{L_{-\infty}}^{L_{z-\delta}}\frac{f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+\int_{L_{z+\delta}}^{L_{+\infty}}\frac{f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau\right]$ 存在，记为

$$(C[f])(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\quad z\in L, \tag{7}$$

则称它为双曲线 L 上带密度 f 的 Cauchy 主值积分。

引理 4 [6] (Cauchy 主值积分的 Hölder 连续性)若 $f \in \hat{H}^{\mu}(L)$，则对于(7)所给的 Cauchy 主值积分 $C[f]$ 以及(6)所给的 Cauchy 型积分的边值 $C[f]^{\pm}(z)$，有

$$C[f], C[f]^{\pm} \in \begin{cases} \hat{H}^{\mu}(L), & \text{当} 0<u<1 \text{时} \\ \hat{H}^{\varepsilon}(L)(0<\varepsilon<1), & \text{当} u=1 \text{时} \end{cases} \tag{8}$$

3. Riemann 边值问题

考虑双曲线 L 上的 Riemann 边值问题：寻求以双曲线 L 为跳跃曲线的分区全纯函数 $\Phi(z)$，使之满足

$$\begin{cases} \Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), & t \in L(\text{边值条件}) \\ G.P\left[z^{-(m+1)}\Phi, \infty\right] = 0 & (\text{无穷远处增长条件}) \end{cases}, \tag{9}$$

其中 m 为整数，G 和 g 为 L 上给定的函数，Riemann 边值问题(9)记为 R_m 问题。为解决此问题，G 和 g 需要满足一些条件，下文逐一探讨。

下面讨论最简单的 R_m 问题即 Liouville 问题。

问题 1 (Liouville 问题)寻求一个分区全纯函数 Φ，以双曲线 L 为跳跃曲线，满足

$$\begin{cases} \Phi^{+}(t) = \Phi^{-}(t), & t \in L \\ G.P\left[z^{-(m+1)}\Phi, \infty\right] = 0. \end{cases} \tag{10}$$

定理 1 当 $m \ge 0$ 时，Liouville 问题(10)的解为任意次数不超过 m 的多项式 $P_m(z)$，当 $m<0$ 时，$\Phi = 0$。换句话讲，$\Phi(z) = P_m(z)$，其中约定当 $m<0$，$P_m(z) = 0$。

证利用 Painlevé 问题的解以及推广的 Liouville 定理，结论显然成立。

注此引理与文献[3]中经典的 Liouville 问题在形式上是一致的，但本质上却有所不同，本处在无穷远点处的增长性条件更为宽泛，推广了经典的 Liouville 定理。

问题 2 (跳跃问题 R_m) 寻求一个分区全纯函数 Φ，以双曲线 L 为跳跃曲线，满足

$$\begin{cases} \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = g(t), & t \in L, \\ G.P\left[z^{-(m+1)}\Phi, \infty\right] = 0, \end{cases} \tag{11}$$

其中

$$g \in \hat{H}_{m_0,0}(L), \quad m_0 = \max\{0, -m-1\}. \tag{12}$$

下面先解决我们常见的 R_{-1} 问题，即 $m=-1$。

问题 3 (跳跃问题 R_{-1}) 寻求一个分区全纯函数 Φ，以双曲线 L 为跳跃曲线，满足

$$\begin{cases} \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = g(t), & t \in L \\ G.P[\Phi, \infty] = 0, \end{cases} \tag{13}$$

其中 $g \in \hat{H}_0(L)$。

定理 2 R_{-1} 问题(13)有唯一解

$$(C[g])(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau, \quad z \in \mathbb{C}\setminus L. \tag{14}$$

证根据 $g \in \hat{H}_0(L)$，利用 Plemelj 公式(6)以及引理 5，可知 $C[g]$ 是 R_{-1} 问题(13)的解。

引理 6 当$m\ge 0$时，R_m 问题(11)的解是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+P_m(z),\quad z\in\mathbb{C}\setminus L, \tag{15}$$

其中$P_m(z)$是次数不超过 m 的任意多项式。当$m=-1$时，R_m 问题(11)有唯一解$C[g]$，由(14)给出。当$m<-1$，当且仅当如下可解条件

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L g(\tau)\tau^k \mathrm{d}\tau=0,\quad k=0,1,\cdots,-m-2, \tag{16}$$

成立，R_m 问题(11)由(14)给出的唯一解$C[g]$。

证 显然，当$m\ge 0$时，由定理 2 可知，$C[g]$是跳跃问题(11)的解。因此，Φ 是跳跃问题(11)的解，当且仅当$\Delta=\Phi-C[g]$是如下 Liouville 问题的解

$$\begin{cases}\Delta^+(t)=\Delta^-(t),\ t\in L\\ G.P\left[z^{-(m+1)}\Delta,\infty\right]=0,\end{cases} \tag{17}$$

从而，由定理 1，结论显然成立。

当$m<0$时，显然(11)的解正好是R_{-1}跳跃问题(13)的解。因此通过定理 2，当且仅当满足无穷远处的增长条件

$$G.P\left[z^{-(m+1)}C[g],\infty\right]=0, \tag{18}$$

时，(11)有唯一解$C[g]$。

为验证此条件，由 g 的假设(12)可知，$\lim\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus L,z\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau=0$。

进一步地，根据推论 1 可知：

$$z^{-(m+1)}C[g](z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)z^{-(m+1)}}{\tau-z}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)\left(z^{-(m+1)}-\tau^{-(m+1)}\right)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)\tau^{-(m+1)}}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,$$

可得(18)等价于(16)。

问题 4 (跳跃问题 O_m) 寻求一个分区全纯函数Φ，以双曲线 L 为跳跃曲线，满足

$$\begin{cases}\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=g(t),\ t\in L\\ G.P\left[z^{-m}\Phi,\infty\right]=1,\end{cases} \tag{19}$$

其中$g\in\hat{H}_{-m,0}(L)$。当$m\ge 0$时，$g\in\hat{H}_0(L)$。当$m<0$时，$g\in\hat{H}_{-m}(L)$。

定理 4 当$m\ge 0$时，跳跃问题(19)的解是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+p_m,\quad z\in\mathbb{C}\setminus L, \tag{20}$$

其中P_m为任意 m 次的首一多项式。

当 $m<0$ 时，跳跃问题(19)的解为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus L, \tag{21}$$

当且仅当可解条件

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\int_L g(\tau)\tau^k \mathrm{d}\tau = 0,\ k = 0,1,\cdots,-m-2\left(m=-1\text{此条件不出现}\right) \\ \dfrac{1}{2\pi i}\int_L g(\tau)\tau^{-m-1}\mathrm{d}\tau = -1, \end{cases} \tag{22}$$

成立。

证 由引理 5 以及 Plemelj 公式(6)，结论显而成立。

问题 5 (齐次问题) 寻求一个分区全纯函数 Φ，以双曲线 L 为跳跃曲线，满足

$$\begin{cases} \Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t),\ t\in L \\ G.P\left[z^{-m-1}\Phi,\infty\right] = 0, \end{cases} \tag{23}$$

其中 $G(t)$ 满足 Hölder 连续条件

$$G\in \hat{H}_0(L), \tag{24}$$

以及正则性条件

$$G(t)\neq 0,\ \ t\in L. \tag{25}$$

另外，无穷远处增长性条件

$$G(\infty)=1,\ \ \log G\in \hat{H}_0(L), \tag{26}$$

成立。

记

$$\kappa = Ind_t G(t) = \frac{1}{2\pi}\left[arg\, G(t)\right]_t, \tag{27}$$

为齐次问题(23)的指标。

问题 6 (典则问题) 寻求一个分区全纯函数 Φ，以双曲线 L 为跳跃曲线，满足

$$\begin{cases} \Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t),\ t\in L \\ G.P\left[z^{\kappa}\Phi,\infty\right] = 1. \end{cases} \tag{28}$$

记

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log G(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau,\ \ z\in\mathbb{C}\setminus L. \tag{29}$$

由条件(24)~(26)可得

$$\log G\in \hat{H}_0(L), \tag{30}$$

从而，由定理 1 知

$$\Gamma(\infty)=0. \tag{31}$$

令

$$X(z) = z^{-\kappa}\mathrm{e}^{\Gamma(z)},\ \ z\in\mathbb{C}\setminus L, \tag{32}$$

则由(31)，可得

$$G.P\left[z^{\kappa}X,\infty\right]=1, \tag{33}$$

利用(30)和定理 2，可得

$$X^{+}(t)=G(t)X^{-}(t),\ t\in L, \tag{34}$$

从而由(33)，(34)可知，X 是典则问题(28)的解。

下面证明解的唯一性，若 X 是典则问题(28)的解，令

$$Q(z)=\frac{\Phi(z)}{X(z)},\ z\in\mathbb{C}\setminus L, \tag{35}$$

故由参考文献[2] [3]可知，(35)中所给出的 Q 是以 L 为跳跃曲线的分区全纯函数，又由(28)和(33)可知，它满足

$$\begin{cases} Q^{+}(t)=Q^{-}(t),\ t\in L \\ G.P[Q,\infty]=1, \end{cases} \tag{36}$$

因此，由定理 4 可知

$$Q=1 \text{ 即 } \Phi=X\text{ 。} \tag{37}$$

总结上述讨论可得下面引理。

定理 5 在条件(24)~(26)下，典则问题(28)有唯一解 X，X 由(32)给出。

因此，我们称(32)中 X 为齐次问题(23)的典则解。利用该典则解，我们容易得出齐次问题(23)的解。

显然，若 Φ 是齐次问题(23)的解，则(35)中 Q 是如下 Liouville 问题的解

$$\begin{cases} Q^{+}(t)=Q^{-}(t),\ t\in L \\ G.P\left[z^{-(m+1+\kappa)}Q,\infty\right]=0. \end{cases} \tag{38}$$

利用定理 1，可以直接得到

$$\Phi(z)=X(z)P_{\kappa+m}(z),\ z\in\mathbb{C}\setminus L, \tag{39}$$

其中 κ 是(27)中所给的指标，$P_{\kappa+m}$ 是次数不超过 $\kappa+m$ 的任意多项式，当 $\kappa+m<0$ 时，约定 $P_{\kappa+m}=0$ 此外容易验证，(39)中的 Φ 为齐次问题(23)的解。

引理 5 当 $\kappa\geq -m$ 时，齐次问题(23)的解是(39)。当 $\kappa<-m$ 时，齐次问题(23)有唯一解 $\Phi=0$ 。

现在求解 R_m 问题(9)，为此，利用(28)，令

$$F(z)=\frac{\Phi(z)}{X(z)},\ z\in\mathbb{C}\setminus L, \tag{40}$$

那么可知，F 是以双曲线 L 为跳跃曲线的分区全纯函数，非齐次 R_m 问题(9)可转化为下面跳跃问题

$$\begin{cases} F^{+}(t)=F^{-}(t)+\dfrac{g(t)}{X^{+}(t)},\ t\in L \\ G.P\left[z^{-(m+1+\kappa)}F,\infty\right]=0. \end{cases} \tag{41}$$

在条件(12)、(24)~(26)，可证下式成立

$$\frac{g}{X^{+}}\in\hat{H}_{0,m_\kappa}(L)\text{，其中 } m_k=\max\left\{0,-(m+1+\kappa)\right\}\text{ 。} \tag{42}$$

事实上，根据定理 4 以及(30)可得

$$\Gamma^{+}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\log G(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\log G(z),\tag{43}$$

从而，

$$\Gamma^{+}(z)\in\hat{H}_{0}(L),\tag{44}$$

又由(32)及(34)可得

$$X^{+}\in\hat{H}_{0}(L),\ \ \mathrm{e}^{\Gamma^{+}(z)}\in\hat{H}_{0}(L).\tag{45}$$

因此，根据(12)、(45)表明(42)是成立的。

利用引理 5，可得到跳跃问题(41)的解为

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)(\tau-z)}\mathrm{d}\tau+P_{m+\kappa}(z),\ \ z\in\mathbb{C}\setminus L,\tag{46}$$

其中 $P_{m+\kappa}$ 是任意次数不超过 $m+\kappa$ 的多项式。当 $m+\kappa<0$ 时，$R_{m+\kappa}$ 问题(41)有唯一解 $C\left[\frac{g}{X^{+}}\right]$，它由(14)所给出或者(46)中 $P_{m+\kappa}=0$，当且仅当可解条件

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\tau^{k}\mathrm{d}\tau=0,\ \ k=0,1,\cdots,-m-\kappa-2,\tag{47}$$

成立。这里当 $m+\kappa=-1$ 时，可解条件(47)不出现。

若 Φ 是问题(9)的解，则

$$\Phi(z)=F(z)X(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)(\tau-z)}\mathrm{d}\tau+X(z)p_{m+\tau}(z),\ \ z\in\mathbb{C}\setminus L,\tag{48}$$

即我们要验证(48)是问题(9)的解。显然，我们只需要验证条件

$$G.P\left[z^{-(m_{\kappa}+1)}\Phi,\infty\right]=0,\ \ m_{\kappa}=\max\left\{0,-(m+1+\kappa)\right\}.$$

而

$$\lim_{z\to\infty}z^{-(m_{\kappa}+1)}\left(\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)(\tau-z)}\mathrm{d}\tau+X(z)p_{m+\kappa}(z)\right)=0,\tag{49}$$

显然成立。

总结以上讨论，我们得到如下定理。

定理 6 在条件(12)、(24)~(26)下，R_m 问题(9)的解是(48)，其中 $P_{m+\kappa}$ 是任意次数不超过 $m+\kappa$ 的多项式。当 $\kappa+m=-1$ 时，问题(9)的解是(48)且 $P_{m+\kappa}=0$。当 $\kappa+m<-1$，当且仅当满足可解条件(47)时，问题(9)有唯一解(48)，此时 $P_{m+\kappa}=0$。

致　谢

感谢在论文撰写期间对我提供指导和帮助的老师，感谢各位审稿专家的辛勤工作和指导。

参考文献

[1] Muskhelishvili, N.I. (1953) Singular Integral Equation. P. Noordhoff N. V., Groningen.

[2] Gakhov, F.D. (2014) Boundary Value Problems. Elsevier, Moscow.

[3] Lu, J.K. (1993) Boundary Value Problems for Analytic Functions. World Scientific, Singapore.

https://doi.org/10.1142/1701
[4] 王莹，段萍，杜金元．正实轴上的 Riemann 边值问题[J]．中国科学：数学, 2017, 47(8): 887-918.
[5] 段萍．带变化大负参数广义 Bessel 多项式的整体渐近[D]: [博士学位论文]．武汉：武汉大学, 2013.
[6] Mikhlin, S.G. and Prösdorf, S. (1986) Singular Integral Operators. Springer-Verlag, Berlin.