

一类分数阶微分方程初值问题解的存在唯一性

杨钰翎, 梁俊玮, 李 健

中国矿业大学(北京)理学院, 北京

收稿日期: 2023年2月15日; 录用日期: 2023年3月14日; 发布日期: 2023年3月22日

摘 要

分数阶微积分在数学和工程方面已经成为人们特别熟知的概念, 其是整数阶微积分的推广。分数阶微积分有好多种形式, 譬如, Riemann-Liouville、Caputo分数阶微积分, 带有一个函数的分数阶微积分是Riemann-Liouville分数阶微积分的推广形式。在本文中, 基于带有一个函数的分数阶微积分的基本性质和Picard迭代方法, 我们将讨论一类以带有一个函数的分数阶导数表示的微分方程初值问题解的存在唯一性。同时通过本文的研究, 我们不仅将Picard迭代法应用于一类以带有一个函数的分数阶导数表示的微分方程初值问题解的存在唯一性的论证中, 还提供了求解此类分数阶微分方程初值问题近似解的一种思路。

关键词

分数阶微分方程, 初值问题, Picard迭代法, 存在性, 唯一性

The Existence of Uniqueness in the Solution of a Class of Initial Value Problem for Fractional Differential Equations

Yuling Yang, Junwei Liang, Jian Li

School of Science, China University of Mining & Technology, Beijing

Received: Feb. 15th, 2023; accepted: Mar. 14th, 2023; published: Mar. 22nd, 2023

Abstract

Fractional calculus has become a particularly well-known concept in mathematics and engineering, and is a generalization of integer-order calculus. There are many forms of fractional calculus, for example, Riemann-Liouville, Caputo fractional calculus, and fractional calculus with a function is a generalized form of Riemann-Liouville fractional calculus. In this article, based on the funda-

mental properties of fractional calculus with a function and the Picard iterative method, we will discuss the uniqueness of a class of solutions to the initial value problem of differential equations represented by fractional derivatives with a function. At the same time, through the research of this paper, we not only apply the Picard iterative method to the demonstration of the uniqueness of the solution of the initial value problem of differential equations represented by a fractional derivative with a function, but also provide an idea for solving the approximate solution of the initial value problem of such fractional order differential equations.

Keywords

Fractional Differential Equations, Initial Value Problems, Picard Iterative Method, Existence, Uniqueness

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

自二十世纪九十年代以来, 很多领域都涉及到分数阶微分方程, 例如电子工程[1], 控制理论[2]、制药工程[3]等。近年来, 分数阶微分方程解的存在性研究近年来受到了诸多学者的关注, 有着比较丰富的研究成果。譬如利用 Green 函数的性质和 Guo-Krasnosel'skii 不动点定理, 研究一类分数阶非线性微分方程边值问题正解的存在性[4]; 研究分数阶微分方程多点分数阶边值问题解的存在性与唯一性[5]; 利用格林函数的性质构造了锥, 从而应用一些不动点定理得到分数阶微分方程边值问题正解的存在性[6]。带有函数的分数阶微分方程, 在诸多领域中得以被应用[7], 其相应的分数阶微分方程初值问题解的存在性问题在连续函数空间、可积函数空间上得以研究, 见参考文献[8]-[14]。研究分数阶微分方程主要用到 Banach 压缩映像原理[8], Schauder 不动点原理[11], Picard 迭代法[9]等理论方法, 在不同分数阶微分方程的理论基础上建模并研究包括流体流动, 流变学, 概率和电网络等方面的问题, 分数阶微分方程已经成为经典物理以及相关学科理论的解析数学工具, 很多问题的数学模型最终都可以归结为分数阶微分方程的定解问题, 其非常适合于刻画具有记忆性和遗传性质的材料和过程, 对复杂系统的描述具有建模简单、参数物理意义清楚、描述准确等优势。在数值求解方面, 分数阶微分方程的相关算法主要集中在有限差分方法和有限单元法, 成熟的数值算法比较少[15]。

在文献[9]中, 刘和杨用 Picard 迭代法讨论了如下奇异分数阶微分方程初值问题解的存在唯一性:

$$\begin{cases} D_{t_0^+}^\alpha x(t) = f(t, x(t)), t > t_0 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0)^{1-\alpha} x(t) = x_0 \end{cases}$$

其中 $D_{t_0^+}^\alpha x(t)$ 是 Rimann-Liouville 分数阶导数, $\alpha \in (0, 1)$, $x_0 \in R$ 是一个初值, 函数 f 在 $t = t_0$ 处可能是奇异的, 将著名的 Picard 迭代技术推广到分数阶微分方程, 得到了上述问题解的存在唯一性。

受到文献[9]的启发, 在本文中, 我们运用 Picard 迭代法考虑下面的分数阶微分方程初值问题解的存在唯一性:

$$\begin{cases} D_{a^+, h}^\alpha u(x) = f(x, u(x)) \\ I_{a^+, h}^{1-\alpha} u(x) \Big|_{x=a} = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $D_{a+,h}^\alpha u(x)$ 被称为带有一个函数的 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数, $I_{a+,h}^{1-\alpha} u(x)$ 被称为带有一个函数的 $1-\alpha$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分, $u_0 \in R, \alpha \in (0,1), h(x) > 0, x \in (a,b], h' \in C(a,b), h'(x) > 0, x \in (a,b)$ 。

本文结构安排如下: 在第二部分, 我们首先给出一些必要的定义和引理; 在第三部分, 我们将该微分方程的初值问题转换成与其等价的积分方程, 通过 Picard 迭代法, 提供了一致收敛到所讨论问题的解的可计算序列, 得到了分数阶微分方程初值问题(1)解的存在唯一性, 并且建立了一致逼近解的迭代格式。

微分方程解的存在唯一性是研究微分方程解的适定性的一个关键问题。由于缺乏求解分数阶和随机微积分控制的非线性动力系统的通用技术, 在采用离散化方法获得近似解之前, 研究解的存在唯一性是前提与基础。常用研究方法有 Picard 逐步逼近法和运用 Banach 不动点定理, 其中 Picard 逐步逼近法是较为重要的近似计算方法[14]。在本文中, 我们将 Picard 迭代法推广到了分数阶微分方程, 不仅将 Picard 迭代法应用于一类以带有一个函数的分数阶导数表示的微分方程初值问题解的存在唯一性的论证中, 还提供了求解此类分数阶微分方程初值问题近似解的一种思路。

但由于 Picard 迭代法是最早在数学上完善处理这样的逐次逼近的函数序列的方法, 它的缺点也非常明显: 证明过程繁琐且满足条件的函数序列不易得出, 也无法借助计算机验证。且在数值计算时, Picard 迭代法的收敛性和速度都得不到保证, 求解常微分方程的迭代方法仍有较大发展空间。

2. 预备知识

在这一部分里, 我们给出带有一个函数的分数阶微积分的定义和基本性质, 具体的请参见文献[16]、[17]。

定义 1 [16] 设 $\alpha > 0, h(x) > 0, x \in (a,b], h' \in C(a,b), h'(x) > 0, x \in (a,b)$, 对于定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 带有一个函数的分数阶积分定义为

$$I_{a+,h}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [h(x)-h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t) dt.$$

$I_{a+,h}^\alpha f(x)$ 被称为带有一个函数的 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分。

定义 2 [16] 设 $0 < \alpha < 1, h(x) > 0, x \in (a,b], h' \in C(a,b), h'(x) > 0, x \in (a,b)$, 对于定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$, 带有一个函数的分数阶导数的定义为

$$D_{a+,h}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{1}{h'(x)} \right) \frac{d}{dx} \int_a^x [h(x)-h(t)]^{-\alpha} h'(t) f(t) dt.$$

引理 1 [17] 设 $\alpha \in (0,1]$, 则如下结论成立:

1) 若函数 $u(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则对任意的 $x \in [a,b]$, 有

$$D_{a+,h}^\alpha I_{a+,h}^\alpha u(x) = u(x).$$

2) 若函数 $u(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且存在可积的 $D_{a+,h}^\alpha u(x)$, 则对任意的 $x \in (a,b]$, 有

$$I_{a+,h}^\alpha D_{a+,h}^\alpha u(x) = u(x) - c [h(x)-h(a)]^{\alpha-1}$$

$$c = I_{a+,h}^{1-\alpha} u(x) \Big|_{x=a}.$$

3. 主要结果

在本部分, 我们将基于带有一个函数的分数阶微积分的基本性质, 利用 Picard 迭代方法, 讨论分数

阶微分方程初值问题(1)解的存在唯一性。

令:

$$a_1 > 0, b > 0, J = (a, a + a_1], B = \left\{ u \mid u \in C[a, a + a_1], \left| u - \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq b \right\},$$

$$B_l = \left\{ u \mid \left| [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} u \in C[a, a + a_1], [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} u - \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq b, x \in [a, a + a_1] \right\},$$

$$h(x) > 0, x \in J, h' \in C[a, a + a_1], h'(x) > 0, x \in J.$$

下面是本论文的主要结果。

定理 假设如下条件成立:

1) 对于任意的 $x \in J$, $x \rightarrow f(x, [h(x) - h(a)]^{\alpha-1} u)$ 在 B_l 上是连续的, 对于任意的 $u \in B_l$, $u \rightarrow f(x, [h(x) - h(a)]^{\alpha-1} u)$ 在 J 上是可测的。

2) 存在 $K > -1, M \geq 0$ 使得对于任意的 $x \in J, u \in B$, 有

$$\left| f(x, [h(x) - h(a)]^{\alpha-1} u) \right| \leq M [h(x) - h(a)]^k,$$

3) 存在 $K > -1, L \geq 0$ 使得对于任意的 $x \in J, u_1, u_2 \in B$ 有

$$\left| f(x, [h(x) - h(a)]^{\alpha-1} u_1) - f(x, [h(x) - h(a)]^{\alpha-1} u_2) \right| \leq L [h(x) - h(a)]^k |u_1 - u_2|.$$

则分数阶微分方程初值问题(1)在 J 上存在唯一的连续解 $\phi(x)$, 其中

$$l = \min \left\{ a_1, \frac{1}{M_h} \left(\frac{b}{M} \frac{\Gamma(\alpha)}{B(\alpha, k+1)} \right)^{\frac{1}{k+1}} \right\}, \quad M_h = \max_{a \leq x \leq a+a_1} |h'(x)|.$$

证明 我们将用 Picard 迭代法来证明该结论, 为了完成该定理的证明, 我们需要下面的 5 个结论。

结论 1 在连续函数空间 $C(a, a+l)$ 上, 微分方程初值问题(1)可转换成如下等价的积分方程:

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, u(t)) dt + \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(a)]^{\alpha-1}, x \in (a, a+l]. \quad (2)$$

证明 若 $u \in C(a, a+h)$ 满足微分方程初值问题(1), 即

$$D_{a+,h}^\alpha u(x) = f(x, u(x)). \quad (3)$$

对(3)两边同时进行 α 阶积分得到

$$I_{a+,h}^\alpha D_{a+,h}^\alpha u(x) = I_{a+,h}^\alpha f(x, u(x)).$$

则由引理 1 可得

$$u(x) - c [h(x) - h(a)]^{\alpha-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, u(t)) dt, x \in (a, a+l].$$

再将 $I_{a+,h}^{1-\alpha} u(x) \Big|_{x=a} = u_0$ 代入得到

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, u(t)) dt + \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(a)]^{\alpha-1}, x \in (a, a+l].$$

反之, 若 $u \in C(a, a+l]$ 满足积分方程, 即

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, u(t)) dt + \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(a)]^{\alpha-1}, x \in (a, a+l].$$

则对此方程两边同时求 α 阶导数得到

$$D_{a+,h}^\alpha u(x) = D_{a+,h}^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (h(x) - h(t))^{\alpha-1} h'(t) f(t, u(t)) dt + \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} (h(x) - h(a))^{\alpha-1} \right], x \in (a, a+l].$$

即

$$D_{a+,h}^\alpha u(x) = D_{a+,h}^\alpha I_{a+,h}^\alpha f(x, u(x)) + \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} D_{a+,h}^\alpha (h(x) - h(a))^{\alpha-1}, a < x \leq a+l.$$

由引理 1 和文献[10]得:

$$D_{a+,h}^\alpha u(x) = f(x, u(x)).$$

并且通过计算可得: $I_{a+,h}^{1-\alpha} u(x)|_{x=a} = u_0$. 命题 1 得证。

我们选取

$$\phi_0(x) = \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(a)]^{\alpha-1}, x \in (a, a+l],$$

$$\phi_n(x) = \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(a)]^{\alpha-1} + \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, \phi_{n-1}(t)) dt, x \in (a, a+l], n = 1, 2, \dots.$$

作为 Picard 迭代序列。

结论 2 对于所有的 n , 函数 $\phi_n(x)$ 在 $a < x \leq a+l$ 上有定义、连续且满足不等式:

$$\left| [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \phi_n(x) - u_0 \right| \leq b, x \in [a, a+l].$$

证明 由函数 h 的性质和条件(1)、(2)知 $\phi_0(x)$ 与 $\phi_1(x)$ 在 $a < x \leq a+l$ 上连续, 且

$$\begin{aligned} & \left| [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \phi_1(x) - \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} \right| \\ &= \left| \int_a^x \frac{[h(x) - h(a)]^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, \phi_0(t)) dt \right| \\ &\leq [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{[h(x) - h(t)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h'(t) |f(t, \phi_0(t))| dt \\ &= [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{[h(x) - h(t)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h'(t) \left| f(t, [h(t) - h(a)]^{\alpha-1} [h(t) - h(a)]^{1-\alpha} \phi_0(t)) \right| dt \\ &\leq M [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{[h(x) - h(t)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h'(t) [h(t) - h(a)]^k dt \\ &= M [h(x) - h(a)]^{k+1} \frac{B(\alpha, k+1)}{\Gamma(\alpha)} \leq M (M_h l)^{k+1} \frac{B(\alpha, k+1)}{\Gamma(\alpha)} \leq b. \end{aligned}$$

假设 $\phi_n \in C(a, a+l]$ 且对 $\forall x \in [x_0, x_0+h]$ 满足不等式:

$$\left| [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \phi_n(x) - \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq b.$$

由函数 h 的性质和条件(1)、(2)知 $\phi_{n+1} \in C(a, a+l]$ 且有:

$$\begin{aligned} & \left| [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \phi_{n+1}(x) - \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} \right| \\ & \leq \left| \int_a^x \frac{[h(x)-h(a)]^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} [h(x)-h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, \phi_n(t)) dt \right| \\ & \leq [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{[h(x)-h(t)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h'(t) |f(t, \phi_n(t))| dt \\ & \leq M [h(x)-h(a)]^{k+1} \frac{B(\alpha, k+1)}{\Gamma(\alpha)} \\ & \leq M (M_h l)^{k+1} \frac{B(\alpha, k+1)}{\Gamma(\alpha)} \leq b, \end{aligned}$$

所以 $\phi_{n+1}(x)$ 也满足上述不等式, 由数学归纳法知, 结论 2 对所有 n 均成立, 结论 2 证毕.

结论 3 函数序列 $\{[h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \phi_n(x)\}$ 在 $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ 上是一致收敛的.

证明 考虑

$$\begin{aligned} & [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \phi_0(x) + [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} [\phi_1(x) - \phi_0(x)] + \dots \\ & + [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)] + \dots, x \in [a, a+l]. \end{aligned}$$

由条件(1)可得:

$$[h(x)-h(a)]^{1-\alpha} |\phi_1(x) - \phi_0(x)| \leq M [h(x)-h(a)]^{k+1} \frac{B(\alpha, k+1)}{\Gamma(\alpha)}, x \in [a, a+l].$$

由利普希茨条件可得:

$$\begin{aligned} & [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} |\phi_2(x) - \phi_1(x)| \\ & \leq L [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{[h(x)-h(t)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h'(t) [h(t)-h(a)]^{k+1-\alpha} |\phi_1(t) - \phi_0(t)| dt \\ & \leq LM \frac{B(\alpha, k+1)}{\Gamma(\alpha)} [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{[h(x)-h(t)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h'(t) [h(t)-h(a)]^{1+2k} dt \\ & = LM \frac{B(\alpha, k+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{B(\alpha, 2k+2)}{\Gamma(\alpha)} [h(x)-h(a)]^{2+2k}, x \in [a, a+l]. \end{aligned}$$

下面证明对任意正整数 n , 有

$$[h(x)-h(a)]^{1-\alpha} |\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| \leq L^n M [h(x)-h(a)]^{(n+1)(k+1)} \prod_{i=1}^n \frac{B(\alpha, (k+1)(i+1))}{\Gamma(\alpha)}, x \in [a, a+l] \quad (4)$$

已知该式子对于 $n=1$ 成立, 假设其对于 $n=m$ 也成立, 由利普希茨条件, 当 $a \leq x \leq a+l$ 时, 有:

$$\begin{aligned}
 & [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} |\phi_{m+2}(x)-\phi_{m+1}(x)| \\
 & \leq [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{[h(x)-h(t)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h'(t) |f(t, \phi_{m+1}(t)) - f(t, \phi_m(t))| dt \\
 & \leq L [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{[h(x)-h(t)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h'(t) [h(t)-h(a)]^{k+1-\alpha} |\phi_{m+1}(x)-\phi_m(x)| dt \\
 & \leq [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{[h(x)-h(t)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h'(t) L [h(t)-h(a)]^k L^m M [h(x)-h(a)]^{(m+2)(k+1)} \\
 & \quad \times \prod_{i=1}^m \frac{B(\alpha, (k+1)(i+1))}{\Gamma(\alpha)} dt \\
 & = L^{m+1} M [h(x)-h(a)]^{(m+2)(k+1)} \prod_{i=1}^{m+1} \frac{B(\alpha, (k+1)(i+1))}{\Gamma(\alpha)}, x \in [a, a+l].
 \end{aligned}$$

故其对 $m+1$ 也是成立的, 由数学归纳法可知对于任意正整数 n , 式(4)都成立。

考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{n=1}^{\infty} M L^{n+1} (M_h l)^{(n+2)(k+1)} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{\Gamma((k+1)(i+1))}{\Gamma(\alpha+(i+1)(k+1))}.$$

则有

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = L (M_h l)^{k+1} \frac{\Gamma((n+2)(k+1))}{\Gamma(\alpha+(n+2)(k+1))} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

由比式判别法可知, $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 在 $a \leq x \leq a+l$ 上一致收敛, 因此序列 $\{[h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \phi_n(x)\}$ 也在 $a \leq x \leq a+l$ 上一致收敛, 结论 3 证毕。

结论 4 $\phi(x)$ 是积分方程(2)的定义于 $a < x \leq a+l$ 上的连续解。

证明 由结论 2 知

$$|f(x, \phi_n(x)) - f(x, \phi(x))| \leq L [h(x)-h(a)]^k [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} |\phi(x) - \phi_n(x)|, x \in (a, a+l].$$

则

$$[h(x)-h(a)]^{-k} |f(x, \phi_n(x)) - f(x, \phi(x))| \leq L [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} |\phi_n(x) - \phi(x)|, x \in [a, a+l].$$

由结论 3 知函数序列 $\{L [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} |\phi_n(x) - \phi(x)|\}$ 在 $a \leq x \leq a+l$ 上一致收敛于 0, 因此, 对函数序列两边取极限, 得到

$$\begin{aligned}
 & [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \phi_n(x) \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} + [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x)-h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, \phi_{n-1}(t)) dt \right] \\
 & = \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} + [h(x)-h(a)]^{1-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x)-h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, \phi_{n-1}(t)) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} + [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) [h(x) - h(a)]^k \\
&\quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} [h(x) - h(a)]^{-k} f(t, \phi_{n-1}(t)) dt \\
&= \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} + [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, \varphi(t)) dt, x \in [a, a+l].
\end{aligned}$$

即

$$\varphi(x) = \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} + \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, \varphi(t)) dt, x \in (a, a+l].$$

这就是说, $\varphi(x)$ 是积分方程(2)的定义于 $(a, a+l]$ 上的连续解, 命题 4 证毕。

结论 5 设 $\psi(x)$ 是积分方程(2)的定义于 $a < x \leq a+l$ 上的另一个连续解, 则

$$\varphi(x) = \psi(x), x \in (a, a+l].$$

证明 我们证明 $\psi(x)$ 也是序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 的一致收敛极限函数。

因为 $\psi(x)$ 也是积分方程(2)的解, 则有

$$\psi(x) = \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} + \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, \psi(t)) dt, x \in (a, a+l].$$

由条件(2)知

$$|f(x, \psi(x))| = \left| f\left(x, [h(x) - h(a)]^{\alpha-1} [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \psi(x)\right) \right| \leq M [h(x) - h(a)]^k, x \in (a, a+l].$$

故

$$\begin{aligned}
&[h(x) - h(a)]^{1-\alpha} |\varphi_0(x) - \psi(x)| \\
&= [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \left| \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) f(t, \psi(t)) dt \right| \\
&\leq [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) |f(t, \psi(t))| dt \\
&\leq [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) M [h(t) - h(a)]^k dt \\
&= M [h(x) - h(a)]^{k+1} \frac{B(\alpha, k+1)}{\Gamma(\alpha)}, x \in [a, a+l].
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
&[h(x) - h(a)]^{1-\alpha} |\phi_1(x) - \psi(x)| \\
&= [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) |f(t, \phi_0(t)) - f(t, \psi(t))| dt \\
&\leq [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) L [h(t) - h(a)]^k [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} |\phi_0(t) - \psi(t)| dt \\
&\leq [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) L [h(t) - h(a)]^k M [h(t) - h(a)]^{k+1} \frac{B(\alpha, k+1)}{\Gamma(\alpha)} dt \\
&= ML [h(x) - h(a)]^{2k+2} \frac{B(\alpha, k+1) B(\alpha, 2k+2)}{\Gamma(\alpha)}, x \in (a, a+l].
\end{aligned}$$

现设

$$[h(x) - h(a)]^{1-\alpha} |\phi_n(x) - \psi(x)| \leq LM [h(x) - h(a)]^{(n+1)(k+1)} \prod_{i=1}^n \frac{B(\alpha, (k+1)(i+1))}{\Gamma(\alpha)}, x \in [a, a+l].$$

又

$$\begin{aligned} & [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} |\phi_{n+1}(x) - \psi(x)| \\ &= [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [h(x) - h(t)]^{\alpha-1} h'(t) L [h(t) - h(a)]^k [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} |\phi_n(t) - \psi(t)| dt \\ &\leq ML^{n+1} [h(x) - h(a)]^{(n+2)(k+1)} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{B(\alpha, (k+1)(i+1))}{\Gamma(\alpha)}, x \in [a, a+l]. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} |\phi_{n+1}(x) - \psi(x)| &\leq ML^{n+1} (M_h l)^{(n+2)(k+1)} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{B(\alpha, (k+1)(i+1))}{\Gamma(\alpha)} \\ &\leq ML^{n+1} (M_h l)^{(n+2)(k+1)} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{\Gamma((k+1)(i+1))}{\Gamma(\alpha + (k+1)(i+1))} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \phi_n(x) = [h(x) - h(a)]^{1-\alpha} \psi(x), x \in [a, a+l].$$

即

$$\psi(x) \equiv \phi(x), x \in (a, a+l].$$

这就证明了 $\varphi(x)$ 的唯一性，结论 5 证毕。

故微分方程初值问题(1)在 $(a, a+l]$ 上存在唯一的连续解 $\phi(x)$ ，其中

$$l = \min \left\{ a_1, \frac{1}{M_h} \left(\frac{b}{M} \frac{\Gamma(\alpha)}{B(\alpha, k+1)} \right)^{\frac{1}{k+1}} \right\}.$$

注：本文所得结论可适用于分数阶微分方程初值问题(1)一些具体实例，我们可以参照文献[9]中的例 3.2 给出类似实例，此处不再赘述。

致 谢

感谢同学们在论文编写过程中给予的大力支持和帮忙，给我带来极大的动力。也要感谢参考文献中的作者们，他们的研究文章使我们受益匪浅。

基金项目

本论文得到了中国矿业大学(北京)大学生创新训练项目(202207002)的资助。

参考文献

- [1] 王艳霞. 电子工程中智能化技术的运用分析[J]. 无线互联科技, 2016(3): 130-131, 146.
- [2] 丁洁, 周映江, 徐丰羽, 赵静. 基于飞控平台的现代控制理论综合实验设计[J]. 实验技术与管理, 2022, 39(10): 163-167.
- [3] 赵地顺, 刘猛帅, 徐智策, 等. 离子液体催化合成丁二酸二甲酯[J]. 化工学报, 2012(4): 1089-1094.

- [4] 赵中姿. 一类三阶非线性常微分方程边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2019, 56(2): 189-193.
- [5] 吴怡敏. 分数阶微分方程边值问题解的存在性和唯一性[J]. 闽南师范大学学报(自然科学版), 2021, 34(1): 44-47.
- [6] 许晓婕, 孙新国, 吕炜. 非线性分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J]. 数学物理学报, 2011, 31(2): 401-409.
- [7] 梁兴悦, 周宗福. 一类带有 Stieltjes 积分边界条件的分数阶微分方程边值问题正解[J]. 应用数学, 2020, 33(4): 826-835.
- [8] 赵环环, 刘有军, 康淑瑰. 分数阶微分方程非振动解的存在性[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2020, 35(3): 275-280.
- [9] Yang, X. and Liu, Y. (2014) Picard Iterative Processes for Initial Value Problems of Singular Fractional Differential Equations. *Advances in Difference Equations*, **2014**, 102. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-102>
- [10] 王丽颖, 许晓婕. Schauder 不动点定理在分数阶 m -点边值问题中的应用[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2017, 49(1): 20-24.
- [11] Lin, W. (2007) Global Existence Theory and Chaos Control of Fractional Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **332**, 709-726. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.10.040>
- [12] Zhou, Y. (2009) Existence and Uniqueness of Solutions for a System of Fractional Differential Equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **12**, 195-204.
- [13] Zhang, S. (2009) Monotone Iterative Method for Initial Value Problem Involving Riemann-Liouville Fractional Derivatives. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **71**, 2087-2093. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.01.043>
- [14] 王苗苗, 丁小丽, 李佳敏. 分数阶随机时滞微分方程解的存在唯一性[J]. 西安工程大学学报, 2021, 35(2): 104-110. <https://doi.org/10.13338/j.issn.1674-649x.2021.02.017>
- [15] 张嫚. 两类分数阶微分方程 block-by-block 算法的数值分析[D]: [硕士学位论文]. 北京: 华北电力大学, 2022.
- [16] Kilbas, A., Srivastava, H. and Trujillo, J. (2006) Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Vol. 204, Elsevier, Amsterdam.
- [17] 郭昊, 曹丹颖. 一类分数阶微积分的中值定理及应用[J]. 中国矿业, 2021, 30(S1): 463-466+485.