Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 625-635
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133067

带有小扰动的对数型 Kirchhoff 方程解的存在性

汤 婧

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年2月22日；录用日期：2023年3月23日；发布日期：2023年3月30日

摘 要

讨论一类带有小扰动的对数型 **Kirchhoff** 方程解的存在性和多重性问题。对扰动项函数提出合适的条件，运用变分方法和山路定理，在参数较小的情况下，分别得到方程解的存在性和多解性结果。

关键词

Kirchhoff 方程，对数非线性项，小扰动

Existence of Solutions to Logarithmic Kirchhoff Equation with a Small Perturbation

Jing Tang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 22nd, 2023; accepted: Mar. 23rd, 2023; published: Mar. 30th, 2023

文章引用: 汤婧. 带有小扰动的对数型Kirchhoff方程解的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 625-635.
DOI: 10.12677/pm.2023.133067

Abstract

This paper considers the existence and multiplicity of solutions for logarithmic Kirchhoff equations with a small perturbation. Under some appropriate conditions for perturbation, using constrained variational method and Mountain Pass Theorem, the existence and multiplicity of solutions are obtained respectively when parameter small enough.

Keywords

Kirchhoff Equations, Logarithmic Nonlinearity, Small Perturbation

1. 引言

考虑下列带有小扰动的对数型Kirchhoff方程

$$\begin{cases} -(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x)\Delta u = |u|^{p-2}u\ln u^2+\lambda f(x,u), & \text{in } \Omega,\\ u=0, & \text{on } \partial\Omega,\end{cases}$$

其中 $\Omega\subset R^3$ 是一个具有光滑边界的有界区域，$a,b>0$ 是固定的常数，$4<p<6$, 函数 $f(x,u)$ 满足以下条件：

(A) $f(x,u)\in C(\Omega)$;

(B) $f(x,u)\geq 0$, 且 $f(x,0)\neq 0$.

Kirchhoff 方程最早作为一个定态模型由Kirchhoff [1] 提出, 在弹性理论、电磁学、非牛顿力学等物理学领域有很广泛的应用. 近几年, 许多学者研究过以下方程

$$\begin{cases} -(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x)\Delta u = f(x,u), & \text{in } \Omega,\\ u=0, & \text{on } \partial\Omega,\end{cases} \tag{1}$$

如Ma [2]通过使用变分方法研究了方程 (1) 正解的存在性, Alves [3]利用临界点理论得到类似结果.

最近, 有许多学者利用大范围变分方法, 如：对称山路定理、喷泉定理等研究了方程 (1) 解的存在性及解的各种形态, 我们可以参见文献 [4–11]. 特别地, 当非线性项 $f(x,u)$ 为组合情形时, 蓝永艺 [12]得到了方程 (1)多解的存在性, 而Wen 在 [13] 中利用拓扑度理论以及关于对数项的新的估计, 得到了方程变号解的存在性.

受上述文献及相关成果的启发, 本文研究带有对数非线性项以及小扰动的Kirchhoff 方程解的存在性. 由于非线性项是由对数非线性项和仅具有连续性质的函数 $f(x,u)$ 组合而成, 使得验证山路几何结构和(PS)序列有界性变得十分困难, 这也是本文的创新点和需要克服的难点.

下面给出本文的主要结果.

定理 1.1 假设 $\Omega \subset R^3$ 是一个边界光滑的有界区域, $a,b>0$ 是固定的常数, $4<p<6$, 函数 $f(x,u)$ 满足条件 (A) , 则存在常数 $\lambda^*>0$, 使得当 $\lambda \in (0,\lambda^*)$ 时方程 (1) 存在一个解.

定理 1.2 假设 $\Omega \subset R^3$ 是一个边界光滑的有界区域, $a,b>0$ 是固定的常数, $4<p<6$, 函数 $f(x,u)$ 满足条件 (A) 和 (B), 则当 $|\lambda|$ 足够小时, 方程 (1) 存在另一个解 v_λ, 并且在 $H_0^1(\Omega)$空间上, 当 $\lambda \to 0$ 时, $v_\lambda \to 0$.

2. 预备知识

首先说明文中的一些符号. 设空间 $H_0^1(\Omega)$ 表示普通的Sobolev空间, 它的范数是

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

空间 $L^s(\Omega)(2 \le s \le 6)$ 的范数定义为

$$|u|_s = \left(\int_\Omega |u|^r \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}.$$

易知方程(1)对应的能量泛函为

$$I(u) = \frac{a}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{b}{4}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^2 + \frac{2}{p^2}\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln u^2 \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x.$$

通过简单的计算, 对于 $p \in (4,6)$ 和 $q \in (p,6)$, 可以得到

$$\lim_{t\to 0}\frac{|t|^{p-1}\ln|t|}{t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\frac{|t|^{p-1}\ln|t|}{|t|^{q-1}} = 0,$$

即对于 $\epsilon > 0$, 存在 $C_\epsilon > 0$, 使得对任意的 $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, 有

$$|t|^{p-1}\ln|t| \le \epsilon|t| + C_\epsilon |t|^{q-1}. \tag{2}$$

由此可得非线性项 $\int_\Omega |u|^p \ln u^2 \mathrm{d}x$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 上是有定义的, 但 $I(u)$ 的最后一项在空间 $H_0^1(\Omega)$ 上可能是无定义的. 因此, 对 $I(u)$ 进行以下修正从而克服此困难.

设连续函数$\beta_k(t)$ 满足如下条件：

$$\beta_k(t)=\begin{cases}1, & |t|\le k,\\ 0, & |t|\ge k+1;\end{cases}$$

当 $k<|t|<k+1$ 时，$0<\beta_k(t)<1$. 定义

$$f_k(x,t)=\beta_k(t)f(x,t),\quad F_k(x,t)=\int_0^t f_k(x,s)\mathrm{d}s, \tag{3}$$

则存在正常数 $C(k)$, 有

$$|f_k(x,t)|\le C(k),\quad |F_k(x,t)|\le C(k). \tag{4}$$

选取$\bar\lambda(k)>0$, 使得对于任意的$x\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$, 有

$$\bar\lambda(k)\left|f_k(x,t)\right|\le 1,\ \bar\lambda(k)\left|F_k(x,t)\right|\le 1,\ \bar\lambda(k)tf_k(x,t)\le 1. \tag{5}$$

由此, 对于 $k\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\big(0,\bar\lambda(k)\big)$, 定义修正后的泛函为

$$\begin{aligned}I_k(u)=&\frac{a}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^2+\frac{2}{p^2}\int_\Omega|u|^p\,dx\\ &-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\ln u^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega F_k(x,u)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6}$$

利用 [11] 的类似证明, 由 (2) 式和 (6) 式, 我们可以得到 $I_k(u)\in\mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$, 以及对于任意的 $u,v\in H_0^1(\Omega)$, 成立

$$\begin{aligned}(I_k'(u),v)=&a\int_\Omega|\nabla u\nabla v|\,\mathrm{d}x+b\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\int_\Omega|\nabla u\nabla v|\,\mathrm{d}x\\ &-\int_\Omega|u|^{p-2}\,uv\ln u^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega f_k\left(x,u\right)v\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{7}$$

3. 定理 1.1的证明

引理 3.1 假设 $a,b>0$ 是固定的常数，$4<p<6$，$p<q<6$, 则存在 $\lambda^*(k)>0$, 使得对任意的 $\lambda\in(0,\lambda^*)$, 有

(1) 存在 $u_0\in H_0^1(\Omega)$ 和常数 $r>0$, 当 $\|u_0\|>r$ 时，$I_k\left(u_0\right)<0$;

(2) 存在常数 $\rho>0$, 当 $|u|=r$ 时，$I_k(u)\ge\rho$.

证明 (1) 利用Sobolev 嵌入定理，(2)和 (5), 从 (6) 可得

$$I_k(u)\geqslant\left(\frac{a}{2}-\frac{\epsilon}{p}\right)\|u\|^2-\frac{C_\epsilon}{p}\|u\|^q-\lambda C(k)|\Omega|.$$

选取$\lambda^*(k)>0$ 及 $r,\ \rho>0$, 则对任意 $\lambda\in(0,\lambda^*(k))$ 都有

$$I_k(u)\geq\rho,\text{其中}\|u\|=r.$$

(2) 由于对于任意的$s\in(0,+\infty)$, 成立

$$2\left(1-s^p\right)+ps^p\ln s^2\geqslant 0, \tag{8}$$

因此对任意的 $t>0,\ u\in E$ 都有

$$\begin{aligned}I_k(tu)\leq&\frac{at^2}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{bt^4}{4}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{2t^p}{p^2}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x-\frac{t^p}{p}\int_\Omega|u|^p\ln u^2\mathrm{d}x\\&-\frac{t^p\ln t^2}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x+|\Omega|\\\leqslant&\frac{at^2}{2}\|u\|^2+\frac{bt^4}{4}\|u\|^4+C\|u\|^p-\frac{t^p}{p}\int_\Omega|u|^p\ln u^2\mathrm{d}x+|\Omega|.\end{aligned} \tag{9}$$

又因为$p\in(4,6)$, 所以当$t\to\infty$ 时, $I_k(tu)\to-\infty$. 这就意味着,必定存在 u_0 使得 $I_k(u_0)<0$. 引理 3.1 证毕.

引理 3.2 假设 $a,b>0$ 是固定的常数, $4<p<6$, $p<q<6$, 则对任意的 $\lambda\in(0,\lambda^*)$, I_k 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中满足 (PS) 条件, 其中 $\lambda^*(k)$ 由引理 3.1 给出.

证明 假设 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 为 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的 (PS) 序列, 则当 $n\to\infty$ 时, 存在 $C>0$, 使得当$n\to\infty$, 成立

$$|\ I_k\left(u_n\right)|<C,\ \|I_k'\left(u_n\right)\|\to 0. \tag{10}$$

由 (5) – (7) 式, 可以推得

$$\begin{aligned}C&\geqslant I_k\left(u_n\right)-\frac{1}{p}\left(I_k'\left(u_n\right),u_n\right)\\&\geqslant\frac{(p-2)a}{2p}\left\|u_n\right\|^2+\frac{(p-4)b}{4p}\left\|u_n\right\|^4+\frac{2}{p^2}\int_\Omega\left|u_n\right|^p\mathrm{d}x\\&\quad-\lambda\int_\Omega\left[F_k\left(x,u_n\right)-\frac{1}{p}f_k\left(x_n,u_n\right)u_n\right]\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{(p-2)a}{2p}\left\|u_n\right\|^2-\frac{p+1}{p}|\Omega|.\end{aligned} \tag{11}$$

这就意味着 $\{u_n\}$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 上有界, 故存在 $\{u_n\}$ 的某个子列（不妨仍记为 $\{u_n\}$ ）及 $u\in H_0^1(\Omega)$, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\begin{cases}u_n\rightharpoonup u & \text{在 } H_0^1(\Omega)\text{内},\\ u_n\to u & \text{在}L^r(\Omega)\text{内 } (1\leq r<6),\\ u_n\to u & \text{a.e. } x\in\Omega.\end{cases} \tag{12}$$

利用 (2), (5) 和Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \left(|u_n|^{p-2} u_n \ln u_n^2 - |u|^{p-2} u \ln u^2\right)(u_n-u)\,\mathrm{d}x\right| \\
\le& \int_\Omega \left(\epsilon|u_n| + C_\epsilon |u_n|^{q-1} + \epsilon|u| + C_\epsilon |u|^{q-1}\right)|u_n-u|\,\mathrm{d}x \\
\le& (|u_n|_2 + |u|_2)|u_n-u|_2 + C(|u_n|_q^{q-1} + |u|_q^{q-1})|u_n-u|_q \\
=& o_n(1)
\end{aligned} \tag{13}$$

和

$$\begin{aligned}
&\left|\lambda \int_\Omega \left(f_k(x,u_n) - f_k(x,u)\right)(u_n-u)\,\mathrm{d}x\right| \\
\le& \lambda \int_\Omega \left(|f_k(x,u_n)| + |f_k(x,u)|\right)|u_n-u|\,\mathrm{d}x \\
\le& 2\,|\Omega|^{\frac{1}{2}}\,|u_n-u|_2 \\
=& o_n(1).
\end{aligned} \tag{14}$$

进而结合 (6)-(7) 式有

$$\begin{aligned}
o_n(1) =& \left(I_k'(u_n) - I_k'(u), u_n-u\right) \\
=& a\|u_n-u\|^2 + \frac{b}{2}(\|u_n\|^2 \int_\Omega \nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)\mathrm{d}x - \|u\|^2 \int_\Omega \nabla u(\nabla u_n - \nabla u)\mathrm{d}x) \\
&- \int_\Omega \left(|u_n|^{p-2} u_n \ln u_n^2 - |u|^{p-2} u \ln u^2\right)(u_n-u)\,\mathrm{d}x \\
&- \lambda \int_\Omega \left(f_k(x,u_n) - f_k(x,u)\right)(u_n-u)\,\mathrm{d}x \\
\ge& C\|u_n-u\|^2,
\end{aligned}$$

则当 $n\to\infty$ 时, 有 $\|u_n-u\|\to 0$. 引理 3.2 证毕.

对于引理 3.1 给定的 u_0, 定义

$$\begin{aligned}
\Gamma &:= \left\{\gamma \in C\left([0,1], H_0^1(\Omega)\right) : \gamma(0)=0, \gamma(1)=u_0\right\}, \\
d_k &:= \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{0\le t\le 1} I_k(\gamma(t)).
\end{aligned}$$

引理 3.3 假设 $a,b>0$ 是固定的常数, $4<p<6$, $p<q<6$, 则对任意的 $\lambda\in(0,\lambda^*)$, I_k 具有临界值 d_k, 其中 $\lambda^*(k)$ 由引理 3.1 给出.

证明 此证明类似于 [14], 这里略去.

引理 3.4 假设 $a,b>0$ 是固定的常数, $4<p<6$, $p<q<6$, 则对任意的 $\lambda\in(0,\lambda^*)$, 存在与 k 无关的正常数 M, 使得 $\|u_k\|<M$, 其中u_k 是由引理 3.3 定义的 I_k 的临界点, $\lambda^*(k)$ 由引理 3.1 给出.

证明 定义新泛函如下

$$\hat{I}(u)=\frac{a}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\,\mathrm{d}x+\frac{b}{4}(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\,\mathrm{d}x)^{2}+\frac{2}{p^{2}}\int_{\Omega}|u|^{p}\,dx-\frac{1}{p}\int_{\Omega}|u|^{p}\ln u^{2}\mathrm{d}x+|\Omega|\,. \tag{15}$$

易得 $I_k(u)\le\hat{I}(u)$. 运用类似于证明引理 3.1 的方法可得, $\hat{I}(u)$也具有山路几何结构. 因此, 若定义

$$\hat{d}:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\le t\le 1}\hat{I}(\gamma(t)).$$

则有

$$d_k\le\hat{d}.$$

进而由 (11) 式可得

$$\hat{d}\ge d_k\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u_k\|^{2}-\frac{p-1}{p}|\Omega|,$$

于是, $\|u_k\|\le M$, 其中 $M>0$ 且与 k 无关. 引理 3.4证毕.

引理 3.5 假设 $a,b>0$ 是固定的常数, $4<p<6$, $p<q<6$, 则对任意的 $\lambda\in(0,\lambda^{*})$, 则存在与 k和 λ 无关的正常数 $\tilde{M}$, 使得 $|u_k|_{\infty}\le\tilde{M}$, 其中 u_k 是由引理 3.3 定义的 I_k 的临界点, $\lambda^{*}(k)$ 由引理 3.1 给出.

证明 为方便起见, 不妨假设 $u=u_k$. 对于任意的 $m\in\mathbb{N}$, 给定 $\beta>1$, 定义

$$B_m=\left\{x\in\Omega;\ |u|^{\beta-1}\le m\right\},\ D_m=\Omega\setminus B_m$$

和

$$u_m=\begin{cases}u\,|u|^{2(\beta-1)}, & x\in B_m,\\ m^{2}u, & x\in D_m.\end{cases}$$

易得 $u_m\in H_0^1(\Omega)$, $u_m\le|u|^{2\beta-1}$ 及

$$\nabla u_m=\begin{cases}(2\beta-1)\,|u|^{2(\beta-1)}\,\nabla u, & x\in B_m,\\ m^{2}\nabla u, & x\in D_m,\end{cases}$$

这就意味着 u_m 可以作为测试函数. 除此之外, 还可得

$$\int_{\Omega}\nabla u\nabla u_m\mathrm{d}x=(2\beta-1)\int_{B_m}|u|^{2(\beta-1)}\,|\nabla u|^{2}\,\mathrm{d}x+m^{2}\int_{D_m}|\nabla u|^{2}\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

令

$$v_m=\begin{cases}u\,|u|^{\beta-1}, & x\in B_m,\\ mu, & x\in D_m,\end{cases}$$

从而 $v_m^{2}=uu_m\le|u|^{2\beta}$ 以及

$$\nabla v_m=\begin{cases}\beta\,|u|^{\beta-1}\,\nabla u, & x\in B_m,\\ m\nabla u, & x\in D_m.\end{cases}$$

DOI: 10.12677/pm.2023.133067

进而有

$$\int_\Omega |\nabla v_m|^2 \,\mathrm{d}x = \beta^2 \int_{B_m} |u|^{2(\beta-1)} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + m^2 \int_{D_m} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

再由 (16) 和 (17)式可得

$$\int_\Omega \left(|\nabla v_m|^2 - \nabla u \nabla u_m\right) \mathrm{d}x = (\beta-1)^2 \int_{B_m} |u|^{2(\beta-1)} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{18}$$

将 u_m 代入 (7) 式, 则有

$$a\int_\Omega \nabla u \nabla u_m \mathrm{d}x + b\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \int_\Omega \nabla u \nabla u_m \mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{p-1} u_m \ln u^2 \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega f_k(x,u) u_m \mathrm{d}x.$$

由 (4), (16) 和 (18) 式有

$$\begin{aligned}
& a\int_\Omega |\nabla v_m|^2 \,\mathrm{d}x + \beta^2 b \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \int_\Omega u u_m \mathrm{d}x \\
&= a(\beta-1)^2 \int_{B_m} |u|^{2(\beta-1)} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + a\int_\Omega \nabla u \nabla u_m \mathrm{d}x + \beta^2 b \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \int_\Omega u u_m \mathrm{d}x \\
&\le a\left[\frac{(\beta-1)^2}{2\beta-1} + 1\right] \int_{B_m} \nabla u \nabla u_m \mathrm{d}x + \beta^2 b \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \int_\Omega u u_m \mathrm{d}x \\
&\le \beta^2 (a\int_\Omega \nabla u \nabla u_m \mathrm{d}x + b\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \int_\Omega u u_m \mathrm{d}x) \\
&\le \beta^2 \left[\int_\Omega |u|^{p-1} |u_m| \ln u^2 \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega f_k(x,u) |u_m| \,\mathrm{d}x\right] \\
&\le \beta^2 \left(\epsilon \int_\Omega |u| |u_m| \,\mathrm{d}x + C_\epsilon \int_\Omega |u|^{q-1} |u_m| \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u_m| \,\mathrm{d}x\right) \\
&\le \beta^2 \left(\epsilon \int_\Omega |u|^{2\beta} \,\mathrm{d}x + C_\epsilon \int_\Omega |u|^{q-2+2\beta} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{2\beta-1} \,\mathrm{d}x\right) \\
&\le \beta^2 C_1 \left(\int_\Omega |u|^{q-2+2\beta} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2\beta}{q-2+2\beta}} + \beta^2 C_\epsilon \int_\Omega |u|^{q-2+2\beta} \,\mathrm{d}x \\
&\quad + \beta^2 C_2 \left(\int_\Omega |u|^{q-2+2\beta} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2\beta-1}{q-2+2\beta}}.
\end{aligned} \tag{19}$$

不妨假设$\int_\Omega |u|^{q-2+2\beta} \,\mathrm{d}x > 1$, 成立

$$\int_\Omega |\nabla v_m|^2 \,\mathrm{d}x \le \beta^2 C \int_\Omega |u|^{q-2+2\beta} \,\mathrm{d}x.$$

根据Sobolev不等式可得

$$\left(\int_{B_m} |v_m|^6 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} \le S \int_\Omega |\nabla v_m|^2 \,\mathrm{d}x \le S\beta^2 C \int_\Omega |u|^{q-2+2\beta} \,\mathrm{d}x.$$

进一步, 结合Hölder不等式和引理 3.4 有

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_m} |v_m|^6 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} &\leq S\beta^2 C\,|u|_6^{q-2}\,(\int_\Omega |u|^{2\beta r_1}\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{r_1}} \\ &\leq S\beta^2 CM^{q-2}(\int_\Omega |u|^{2\beta r_1}\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{r_1}},\end{aligned} \tag{20}$$

其中 r_1 满足 $\frac{1}{r_1}+\frac{q-2}{6}=1$. 因为在$B_m$中, 有 $|v_m|=|u|^\beta$, 所以

$$\left(\int_{B_m} |u|^{6\beta}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} \leq S\beta^2 CM^{q-2}(\int_\Omega |u|^{2\beta r_1}\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{r_1}}.$$

令 $m\to\infty$, 根据单调收敛定理, 有

$$|u|_{6\beta} \leq \beta^{\frac{1}{\beta}}\left[SCM^{q-2}\right]^{\frac{1}{2\beta}}|u|_{2\beta r_1}. \tag{21}$$

设 $\sigma=\frac{3}{r_1}$, 则 $\sigma>1$. 令 (21) 式中 $\beta=\sigma$, 我们有

$$|u|_{6\sigma} \leq \sigma^{\frac{1}{\sigma}}\left[SCM^{q-2}\right]^{\frac{1}{2\sigma}}|u|_6. \tag{22}$$

再者, 令 (21) 式中 $\beta=\sigma^2$, 则有

$$|u|_{6\sigma^2} \leq \sigma^{\frac{2}{\sigma^2}}\left[SCM^{q-2}\right]^{\frac{1}{2\sigma^2}}|u|_{6\sigma}. \tag{23}$$

因此, 结合 (22) 和 (23) 式可得

$$|u|_{6\sigma^2} \leq \sigma^{\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}\right)}\left[SCM^{q-2}\right]^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right)}|u|_6.$$

令 (21) 式中 $\beta=\sigma^i$, $i=1,2,...$, 并重复以上步骤可得

$$|u|_{6\sigma^i} \leq \sigma^{\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{\sigma^j}\right)}\left[SCM^{q-2}\right]^{\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\sigma^j}\right)}|u|_6.$$

令上式中$i\to\infty$, 结合引理 3.4, 我们有

$$|u|_\infty \leq C\,|u|_6 \leq CM \leq \tilde{M},$$

其中 $\tilde{M}>0$ 且 $\tilde{M}$的取值与 λ 和 k无关. 引理 3.5 证毕.

定理 1.1的证明 选择常数 k, 使得 $k>\tilde{M}$, 其中 $\tilde{M}$ 由引理 2.5给出. 令 $\lambda^*=\lambda^*(k)$, 则对任意的 $\lambda\in(0,\lambda^*)$, 我们有 $|u_k|_\infty<k$. 因此, 根据 $f_k(x,t)$ 和 $F_k(x,t)$ 的定义, 有

$$f_k(x,u_k)=f(x,u_k) \quad \text{a.e. } x\in\Omega.$$

于是 u_k 是方程(1)的解.

4. 定理 1.2的证明

注意到, 在引理3.1中, 如果我们将 r 和 ρ 分别替换成更小的正常数, 则存在 $\lambda' \in (0,\lambda^*)$, 使得当 $\lambda \in (0,\lambda')$ 时, I_k 仍具有山路几何结构. 即有下面引理.

引理 4.1 存在常数 $0 < r_0 < r$, $0 < \rho_0 < \rho$, 以及 $0 < \lambda^{'}(k) < \lambda^*(k)$, 则存在 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, 对任意的 $\lambda \in (0,\lambda^{'})$有 $I_k(u_0) < 0$ $\|u_0\| > r_0$ 和

$$I_k(u) \geq \rho_0 \text{ 其中 } \|u\| = r_0, \tag{24}$$

其中 $r, \rho, \lambda^*(k)$ 由引理 3.1 给定.

现假设连续函数 $f(x,u)$ 在 Ω 上满足 $f(x,0) \geq 0, f(x,0) \neq 0$. 由引理 3.1可得

$$\inf_{\|u\|=r} I_k(u) \geq \rho > 0 \leq I_k(0). \tag{25}$$

令 $B_r = \{u \in H_0^1(\Omega) | \, \|u\| \leq r\}$, 则 I_k 在 B_r 上可以取到极小值, 设极小值点为 v_λ, 易知 $v_\lambda \in B_r$. 事实上, 根据Ekland 变分原理, 我们可以选择一个序列 $\{v_n\} \subset B_r$, 使得在 B_r上有 $I_k(v_n) \to I_k(v_\lambda)$, $\|I_k'(v_n)\| \to 0$. 显然, 存在 $\{v_n\}$ 的一个子序列(不妨仍记为 $\{v_n\}$), 在 B_r 上有 $v_n \rightharpoonup v_\lambda$. 根据 I_k 的弱下半连续性, 可以得到 $I_k(v_\lambda) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} I_k(v_n)$, 则 v_λ 是 I_k 在 B_r 上的极小值. 再由 $I_k(0) \leq 0$, 我们可以得到 $I_k(v_\lambda) < 0 < I_k(u_k)$, 其中 u_k 是定理 1.1中所给定的 I_k 的临界点. 因此 $v_\lambda \neq u_k$. 利用与引理 3.5 的类似证明可以得到, 当 $|\lambda| < \lambda^*$ 足够小时, 我们有 $|v_\lambda|_\infty \leq C$, 其中 $C > 0$ 与 k 无关. 由此, 选取$k > C$, 则 $f_k(x,v_\lambda) = f(x,v_\lambda)$, 从而$v_\lambda$ 是方程(1) 的一个解.

另一方面, 由引理 4.1 可知, 对每一个$\lambda \in (0,\lambda')$, v_λ 都是方程(1)的解. 则由 $v_\lambda \in B_r$, 有 $\|v_\lambda\| < r$. 否则当 $\lambda \to 0$ 时, $\|v_\lambda\| \to \alpha$, 其中$0 < \alpha < r$. 下面, 我们选择序列 $\{\lambda_n\} \subset (0,\lambda')$, 则当 $n \to \infty$时, $\lambda_n \to 0$. 由此可知, 存在 $\rho' > 0$, 使得当 n 充分大时, 有 $I_k(v_{\lambda_n}) \geq \rho' > 0$. 这与 $I_k(v_\lambda) < 0$ 是矛盾的. 因此, 当 $\lambda \to 0$ 时, $\|v_\lambda\| \to 0$.

参考文献

[1] Kirchhoff, G. (1883) Mechanik. Teubner, Leipzig.

[2] Ma, T.F. and Rivera, J.E.M. (2003) Positive Solitions for a Nonlinear Nonlocal Elliptic Transmission Problem. *Applied Mathematics Letters*, **16**, 243-248. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(03)80038-1

[3] Alves, C.O., Correa, F. and Ma, T.F. (2005) Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type. *Computers and Mathematics with Applications*, **49**, 85-93. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.01.008

[4] Azzollini, A. (2012) The Elliptic Kirchhoff Equation in $\mathbb{R}^N$ Perturbed by a Local Nontinearity. *Differential and Integral Equations*, **25**, 543-554. https://doi.org/10.57262/die/1356012678

[5] Chen, S.T., Zhang, B.L. and Tang, X.H. (2018) Existence and Non-Existence Results for Kirchhoff-Type Problems with Convolution Nonlinearity. *Advances in Nonlinear Analysis*, **9**, 148-167. https://doi.org/10.1515/anona-2018-0147

[6] Figueiredo, G.M. and Santos Junior, J.R. (2012) Multiplicity of Solutions for a Kirchhoff Equation with Subcritieal or Critical Growth. *Differential and Integral Equations*, **25**, 853-868. https://doi.org/10.57262/die/1356012371

[7] He, X. and Zou, W.M. (2010) Multiplicity of Solutions for a Class of Kirchhoff Type Problems. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **26**, 387-394. https://doi.org/10.1007/s10255-010-0005-2

[8] Mao, A.M. and Zhang, Z.T. (2009) Sign-Changing and Multiple Solutions of Kirchhoff Type Problems without the P.S. Condition. *Nonlinear Analysis*, **70**, 1275-1287. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.02.011

[9] Mao, A.M. and Zhu, X.C. (2017) Existence and Multiplicity Results for Kirchhoff Problems. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **14**, Article No. 58. https://doi.org/10.1007/s00009-017-0875-0

[10] Peng, L., Suo, H., Wu, D., Feng, H. and Lei, C. (2021) Multiple Positive Solutions for a Logarithmic Schrödinger-Poisson System with Singular Nonelinearity. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **90**, 1-15. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2021.1.90

[11] Zhang, Z.T. and Perera, K. (2006) Sign Changing Solutions of Kirchhoff Type Problems via Invariant Sets of Descent Flow. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **317**, 450-463. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.06.102

[12] Lan, Y.Y. (2016) Existence of Solutions for Kirchhoff Equations with a Small Perturbations. *Electronic Journal of Differential Equations*, **225**, 1-12.

[13] Wen, L., Tang, X. and Chen, S. (2019) Ground State Sign-Changing Solutions for Kirchhoff Equations with Logarithmic Nonlinearity. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 47, 1-13. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2019.1.47

[14] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1