Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 818-823
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134085

曲率与曲率圆的应用探讨

韩艺兵，文生兰，贾瑞玲

信息工程大学基础部，河南 郑州

收稿日期：2023年3月13日；录用日期：2023年4月14日；发布日期：2023年4月23日

摘 要

曲率是高等数学中一个重要的概念，它定量地刻画了曲线的弯曲程度。本文从战斗机飞行转弯的安全性中提出问题，分析引入曲率和曲率圆的概念的必要性，最后探讨了曲率和曲率圆在飞机俯冲转弯的安全性问题和铁路弯道设计安全性问题中的重要应用。

关键词

曲率，曲率圆，飞机转弯安全问题

Application of Curvature and Curvature Circle

Yibing Han, Shenglan Wen, Ruiling Jia

Department of Basic Course, Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Mar. 13th, 2023; accepted: Apr. 14th, 2023; published: Apr. 23rd, 2023

Abstract

Curvature is an important concept in advanced mathematics, which describes the curvature degree of curve quantitatively. In this paper, a question is raised from the safety of flight turning of fighter aircraft, and the necessity of introducing the concept of curvature and curvature circle is analyzed. Finally, the important applications of curvature and curvature circle in the safety problems of aircraft dive turns and railway curve design are discussed.

Keywords

Curvature, Curvature Circle, Safety of Aircraft Turning

文章引用: 韩艺兵, 文生兰, 贾瑞玲. 曲率与曲率圆的应用探讨[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 818-823.
DOI: 10.12677/pm.2023.134085

1. 引言

曲率是高等数学中一个重要的概念，它定量的刻画了曲线的弯曲程度[1]。在工程设计和战斗机飞行转弯安全等很多方面都有重要应用。本文以应用引领，从战斗机飞行转弯的安全性中提出问题，由特殊到一般分析引入曲率的概念和曲率的计算公式，并进一步分析了曲率概念在刻画曲线弯曲程度时的缺点，为弥补此缺点，引入曲率圆的概念，最后介绍了曲率和曲率圆在飞机俯冲转弯的安全性问题和铁路弯道设计安全性问题中的重要应用。

2. 应用引领，引出曲率与曲率圆的概念

战斗机飞行员在特技飞行时(见图 1)，飞行员承受的加速度和飞行轨迹的弯曲程度有很大关系。当飞行轨迹弯曲程度过大时，导致飞行员承受的加速度过大，很容易产生黑视或者昏厥，影响生命安全[2][3]，因此飞行员在俯冲飞行时为确保飞行安全，一定要预判他的转弯是否在一个合适的弯曲程度。要想解决这个问题，首先要研究在数学上，如何定量的刻画曲线的弯曲程度？为解决这个应用问题，我们从生活常识出发，层层深入做如下分析：

Figure 1. Flight trajectory diagram
图1. 飞行轨迹图

2.1. 由直观到抽象，创造曲率的概念并推导计算公式

对于直线和圆这种特殊的曲线，从直觉上可以感知它们的弯曲程度：直线是处处不弯曲的。圆的半径越大，弯曲程度反而越小(见图 2)。

Figure 2. Schematic diagram of the degree of curvature of straight lines and circles
图2. 直线和圆的弯曲程度示意图

对一条一般的曲线，观察发现它各点处的弯曲程度是不一样的，有的地方弯曲程度大，有的地方弯曲程度小。实际上曲线的弯曲程度与切线转角成正比，与弧长成反比(见图 3)。

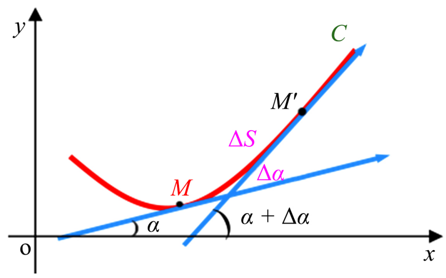

Figure 3. The relationship between the curvature of the curve and the tangent angle
图3. 曲线弯曲程度与切线转角的关系

因此可以用切线转角 $\Delta\alpha$ 与弧长 Δs 的绝对值来刻画一段弧的平均弯曲程度，即平均曲率 $\bar{K}$ 。

平均曲率 $\bar{K}$ 仅能刻画一段弧的平均弯曲程度。但在应用时我们更关注的还是曲线在某一点处的弯曲程度，即曲线在一点处的曲率。因此需要进一步研究如何刻画曲线在一点处的弯曲程度，即曲线 C 上一点 M 处的曲率。

联想到从平均速率引进瞬时速率的方法，要求 t_0 时刻的瞬时速率，可以先求出一段时间 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 的平均速率，再让时间间隔 Δt 趋于 0 取极限，就得到了 t_0 时刻的瞬时速率： $v_{t_0}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar{v}$ 。

类比过来，要求曲线 C 上一点 M 处的曲率可以先求出一段弧 MM' 上的平均曲率，再让 M' 沿曲线 C 无限趋近于 M，即 $\Delta s\to 0$ 取极限，就得到了这一点 M 处的曲率，记为 K，即 $K=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar{K}$

也就是曲率 K 等于平均曲率当 $\Delta s\to 0$ 时的极限。用这个极限值来表示曲线上这一点处的弯曲程度。即一点处的曲率。

有了曲率的定义，我们再回过头来用这个定义，去精确计算一下直线，和圆的曲率，发现与我们的直觉相吻合，这就验证了我们刚才引入的平均曲率和曲率的定义是科学合理的。

对于更一般的、复杂的曲线，用定义求它的曲率操作起来不是很方便。因此我们再一次分析推导得到了计算曲率的公式： $K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$ 。有了计算公式以后，我们要求曲线上一点处的曲率，只需求出一阶导，二阶导，代入公式计算就可以了。在应用时比起定义要方便好多。比如可以用这个计算公式来求一下抛物线和摆线上任一点的曲率。

2.2. 由抽象再到直观，引入曲率圆和曲率半径的概念

思考新的问题：曲线在一点处曲率是 0.25，那 0.25 到底有多弯曲呢？体会 0.25 这个数值太抽象，根本无法想象曲线在这一点处的弯曲程度，但如果是半径为 4 的圆，曲率也是 0.25。它的弯曲程度就直观很多，自然想到可以借助于圆来理解曲线的弯曲程度：曲线在一点的曲率是 0.25，它的弯曲程度就相当于半径为 4 的圆的弯曲程度。

这个圆把抽象的曲率数值与直观的图形联系起来了，可以让我们更直观的、更形象的了解曲线的弯曲程度，把它定义为曲率圆(见图 4)。它的半径定义为曲率半径。显然曲率半径和曲率互为倒数。曲率圆和曲线有共同的切线，共同的凹向和共同的曲率，关系非常密切，也把它叫做密切圆。曲线上一点处的曲率圆是曲线在这点处到底有多弯曲的直观体现。

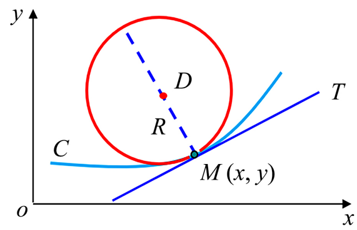

Figure 4. Curvature circle
图4. 曲率圆

2.3. 为应用铺垫，介绍“以曲代曲”的数学逼近思想

结合曲率的计算公式可以求出：曲率圆与曲线在一点处有相同的一阶导数值和二阶导数值，因此当讨论曲线在一点处与导数有关的局部性质时，可以通过讨论它在该点的曲率圆的局部性质来实现。也就是在应用时可以用一点附近的曲率圆弧近似代替曲线弧，这就是数学上“以曲代曲”的逼近思想。它比“以直代曲”有更好的逼近效果，在工程技术和生产生活中，常常要用到这种近似代替。下面介绍曲率的应用。

3. 曲率的实际应用

3.1. 飞机俯冲过弯的安全问题

例1：假设飞机沿抛物线路径 $y=\frac{x^2}{800}$ (y 轴沿铅直向上，单位为m)做俯冲飞行。在坐标原点 O 处的速率为 $v=200\ \mathrm{m/s}$，求此过程中飞机俯冲至最低点即原点 O 处时承受的载荷，并判断这样俯冲飞行是否安全？(当飞行员承受大于9个 G 的载荷时，极易产生黑视或者昏厥，影响生命安全)

分析：飞行员在特技飞行时要不断的俯冲转弯，此时飞行员身上将承受很大的压力，这个压力主要是飞行员承受的加速度和飞行曲线的弯曲程度是关系密切，当弯曲程度增大时，加速度也增大，当飞行曲线弯曲程度过大，飞行员承受大于9个 G 的加速度时，极易导致飞行员黑视或者昏厥，影响生命安全。因此飞行员在转弯时，要预判他转弯的弯曲程度是否合适，在不影响生命安全的前提下，达到俯冲飞行效果。

回顾高中物理知识：做匀速圆周运动的物体，会受到向心力 $\vec{F}=ma_{\vec{n}}=\frac{mv^2}{R}$，从而有向心加速度 $a_{\vec{n}}=\frac{v^2}{R}$，实际上对一条一般的曲线，在转弯时也会有法向加速度 $a_{\vec{n}}=\frac{v^2}{R}$，公式中的 R 就是此时曲线在这点的曲率圆的半径[4]，也就是在这里用曲率圆弧近似代替了曲线弧，即“以曲代曲”的近似逼近(见图5)。

Figure 5. Arc of curvature
图5. 曲率圆弧

解：求此过程中飞机原点 O 处时承受的加速度，由 $a_{\vec{n}}=\dfrac{v^2}{R}$，关键是求 R，由于 $R=\dfrac{1}{K}$，转化为求曲率 K，由曲率的计算公式，转化为先求飞行曲线函数的一阶导和二阶导：

$y'(0)=\left.\dfrac{2x}{800}\right|_{x=0}=0$，$y''=\dfrac{1}{400}$，则 $k=\dfrac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}=\dfrac{1}{400}$，于是 $R=\dfrac{1}{k}=400\ \text{m}$，又 $v=200\ \text{m/s}$，得 $a_n=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{200^2}{400}=100\ \text{m/s}^2$。

此时可以算出 $a_{\vec{n}}\approx 10\ \text{g}$，大于飞行员能承受的最大加速度 9g，说明在此点俯冲飞行的转弯是不安全的，因此飞行员在俯冲转弯时，应适当降低飞行速度或增大转弯时的曲率半径，使加速度小于 9g，避免飞行员在驾驶室内晕厥，发生意外。

我们以飞机为实例研究了飞行过弯的安全问题，在实际生活中，还有火车，赛车，冬奥会上的短道速滑等等，在转弯时，都会遇到类似的安全问题，都和曲率有关。下面看一看火车的转弯问题。

3.2. 铁路弯道设计时的缓冲曲线的重要性

铁路弯道设计时，如果从直道直接转向圆弧道，是存在安全隐患的，力学知识告诉我们，质点沿曲线运动时将产生离心力，其大小由公式 $F=\dfrac{mv^2}{R}$ 所决定，这里 m 是质点的质量，v 是它的速度，R 是曲线在该点的曲率半径。火车在直道部分的曲率为 0，曲率半径为无穷大，是没有离心力的，在由直道过渡到弯道的一瞬间，曲率从 0 突变到常数 $1/R$，突然产生了离心力，将会引起强烈的冲撞，容易发生事故。

因此，铁路设计专家认为必须在直道和圆弧道之间设计一个缓冲段，能使曲率从 0 逐渐的过渡到常数 $1/R$，相应火车的离心力从 0 渐变到常数 $F=\dfrac{mv^2}{R}$，从而火车可以平稳行驶[5] [6] (见图 6)。

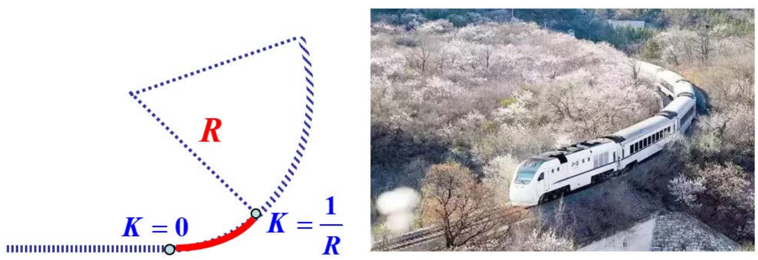

Figure 6. Buffer curve
图6. 缓冲曲线

那什么样的曲线满足曲率可以连续的从 0 变到常数呢？这样的曲线有很多，我们国家往往采取三次抛物线来作为缓冲曲线。

下面通过一个具体例子来来验证三次抛物线能不能让曲率从 0 连续的增加到常数($1/R$)，实现缓冲段的功能。

例 2：计算三次抛物线 $y=ax^3\ (a>0)$ 在原点 O 处和点 $A(1,a)$ 的曲率。

解析：根据曲率的计算公式：$K=\left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\dfrac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$，

要求曲线上一点处的曲率，需要先求出一阶导，二阶导，

$$y' = 3ax^2, y'' = 6ax,$$

所以在原点 O 处 $y'(0) = 0$， $y''(0) = 0$，

$$\therefore k = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{0}{[1+0]^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

在点 $A(1,a)$ 处 $y'(1) = 3a$， $y''(1) = 6a$，

$$\therefore k = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6a}{\left[1+(3a)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

由计算结果知在 $x = 0$ 处，曲率为 0，因此该曲线在原点处与 x 轴相切且曲率为 0，在 $A(1,a)$ 处，曲率为常数，在实际问题中，只需选择合适的参数 a，使缓冲曲线与圆弧段衔接部分曲率等于圆弧曲率即可。三次抛物线果然实现了曲率由 0 渐变到常数 $1/R$，完美实现了缓冲段的作用。

4. 结语

在本文中我们以应用为引领，从战斗机飞行转弯的安全性中提出问题，由特殊到一般分析引入曲率的概念和曲率的计算公式，并进一步分析了曲率概念在刻画曲线弯曲程度时的缺点，为弥补此缺点，引入曲率圆的概念，并介绍了“以曲代曲”的数学思想。最后介绍了曲率和曲率圆在飞机俯冲转弯的安全性问题和铁路弯道设计安全性问题中的重要应用。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学(上册) [M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[2] 苗述楷. 歼击机飞行员训练飞行过载与加速度耐力的关系[J]. 空军总医院学报, 1991, **7**(3): 145-146.

[3] 范军, 段雨峰. 飞行员黑视现象产生原因及适应性训练对策[J]. 军事体育学报, 2015, 34(4): 54-55.

[4] 王吉旭, 缎秀琴. 用物理方法求常见曲线的曲率半径[J]. 物理教师, 2012(8): 66-67.

[5] 解英艳, 宋力. 关于公路和铁路弯道设计问题的讨论[J]. 沈阳工业学院学报, 1995(9): 75-80.

[6] 吴雁平, 刘朝英. 铁路提速与弯道向心力[J]. 现代物理知识, 2006, 18(2): 24-25.