Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 935-941
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134098

边加权的边自由商图的Zeta函数

顾雪君，朱 林

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年3月18日；录用日期：2023年4月19日；发布日期：2023年4月26日

摘 要

为推广边自由商图的Zeta函数，本文定义了边加权的边自由商图上的Zeta函数。为方便推广后的Zeta函数的表达式的计算，利用边自由商图的性质，给出新的二项和三项行列式公式。

关键词

边自由商图，Zeta函数，Artin-Ihara L-函数

Edge-Weighted Zeta Functions of Edge-Free Quotients of Graphs

Xuejun Gu, Lin Zhu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 18th, 2023; accepted: Apr. 19th, 2023; published: Apr. 26th, 2023

Abstract

Edge-weighted Zeta functions of edge-free quotients of graphs are defined to generalize the Zeta functions of edge-free quotients of graphs. Two-term and three-term determinant formulas of the edge-weighted Zeta functions are obtained with the properties of edge-free quotients of graphs, which offers a better way to calculate it.

Keywords

Edge-Free Quotients of Graphs, Zeta Functions, Artin-Ihara L-Functions

文章引用：顾雪君，朱林. 边加权的边自由商图的 Zeta 函数[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 935-941.
DOI: 10.12677/pm.2023.134098

1. 引言

Ihara [1]定义了 Ihara Zeta 函数，并证明该函数为多项式的倒数。

建立在 Hashimoto [2]工作的基础上，Bass [3]考虑一个群 G 在有限树 X 上(不翻边)的作用，其中商图 X/G 和稳定化子均为有限的。他将一个 Zeta 函数和商 X/G 用非交换行列式联系起来，并表为一个显式多项式的倒数。

Stark 和 Terras [4]用初等方法刻画了图的 Zeta 函数，将图 X 的 Ihara Zeta 函数表为图 X 中素元的 Euler 积，并重新证明了 Bass 的结果。因此 Ihara Zeta 函数 $\zeta(u,X)$ 可被看成数域 K 上戴德金 Zeta 函数 $\zeta(u,X)$ 的图论类比，且满足一些相似的性质。

Stark 和 Terras [5] [6]考虑图的自由 Galois 覆盖的 Zeta 函数，进一步发展了图论与数论之间的类比。利用图的性质，给出二项、三项行列式来计算相应 Zeta 函数。Zakharov [7]考虑了边自由作用下商图的 Ihara Zeta 函数。

本文定义了边加权情形下，边自由作用的商图的 Ihara Zeta 函数，推广了边自由商图的 Zeta 函数。为计算推广后的 Zeta 函数，给出了新的二项和三项行列式公式。

本文为研究边自由作用下，边加权的图和商图的 Zeta 函数的整除关系提供了工具。后续的定义和证明会在接下来的论文中给出。本文的定义和公式对于边平凡的群图这样的一般情形同样适用。

2. 基础知识

2.1. 边平凡的群图

定义 1 带腿(leg)的图 X 由下列组成：顶点集 $V(X)$，半边集 $H(X)$，根映射 $r:H(X)\to V(X)$，

对合映射 $\sigma:H(X)\to H(X)$，使得 $\sigma(h)=\bar{h}$。

对合生成的群，其作用下的轨道有一个或两个元素。含两个元素的轨道 $\{h,\bar{h}\}$ 称为 X 的一个边，记所有边组成的集合为 $E(X)$。对边 $\{h,\bar{h}\}$ 定向，得有向边 $e=(h,\bar{h})$，称 $i(e)=r(h)$ 为 e 的起点，$t(e)=r(\bar{h})$ 为 e 的终点。$\bar{e}=(\bar{h},h)$ 为与 e 反向的边。若 $r(h)=r(\bar{h})$，称边 $e=(h,\bar{h})$ 为环。若 $\sigma(h)=h$，则轨道中只有一个元素，称 h 为 X 的腿(leg)，记腿集为 $L(X)$。

这里只考虑连通图。下面定义边平凡的群图。

定义 2 图 X 和群 X_v (对任意 $v\in V(X)$)组成了边平凡的群图 $\mathbb{X}=(X,X_v)$。称 $\mathbb{X}$ 是有限的，若 X 是有限图且 X_v 为有限群。

序列 $P=g_0h_1g_1h_2\cdots g_{n-1}h_n$ 称为 $\mathbb{X}$ 中长度 $n=l(P)$ 的路 P，其中 $h_1\cdots h_n$ 为顶点 $v_0=r(h_1)$，$v_j=r(h_{j+1})=r(\bar{h}_j)$ $j=1,\cdots,n-1$，$v_n=r(\bar{h}_n)$ 的 X 中路，$g_j\in X_{v_j}$ $j=0,\cdots,n-1$。若 $v_0=v_n$，称 P 是闭路。若 P 的终点等于 Q 的起点，可定义路的合成 PQ。

对 $\mathbb{X}$ 中的路 $P=g_0h_1g_1h_2\cdots g_{n-1}h_n$，若 $\forall j\in\{1,\cdots,n\}$，要么 $h_{j+1}\neq\bar{h}_j$，要么 $g_j\neq e$，称 P 为约化的。

路 P 称为本原路，若 P 是约化的闭路，且 $\nexists Q$，使得 $P=Q^k,k\geq 2$。任一约化路都能唯一表成本原路的次幂。

称闭路 $P=g_0h_1g_1h_2\cdots g_{n-1}h_n$ 和 $P'=g'_0h'_1\cdots g'_{n-1}h'_n$ 等价，若 $\exists m(0\leq m\leq n-1)$，有 $g'_{j-1}=g_{j-1+m}$，$h'_j=h_{j+m}$，$\forall j\in\{1,\cdots,n\}$。等价是一个等价关系。本原路的等价类称为 $\mathbb{X}$ 中素元 $\boldsymbol{p}$，长度 $l(\boldsymbol{p})$ 是定义良好的。给定

长度的素元有有限个。

2.2. 群在图上的作用

下面考虑群在图上的作用。

定义 3 $X = H(X) \cup V(X)$。图 X 的自同构 f 指 $f|_{H(X)} : H(X) \to H(X), f|_{V(X)} : V(X) \to V(X)$ 的双射，保持根映射和对合映射。

f 将边映到边，将腿映到腿。X 的所有自同构作成一个群 $Aut(X)$。

将同态 $\Phi : G \to Aut(X)$ 称为群在图上的作用。主要对 2 种群在图上的作用感兴趣。

定义 4 称 G 在 X 上的作用是边自由的，若 G 在 $H(X)$ 上自由作用。

定义 5 称 G 在 X 上的作用是自由的，若 G 在 $V(X)$ 和 $H(X)$ 上都是自由作用。因为腿的使用，放宽了原有的 G 不翻边($\forall e = \{h, \bar{h}\} \in E(X)$，$\forall g \in G$，有 $g(h) \neq \bar{h}$)的条件。

有了群在图上的作用，下面定义商图。

定义 6 群 G 在图 X 上作用。$X = H(X) \cup V(X)$。由自同构群的性质，$H(X)$ 中轨道构成 $H(X)$ 的划分，$V(X)$ 中轨道构成 $V(X)$ 的划分。顶点集为 $V(X/G) = V(X)/G$ 为 G 作用下 $V(X)$ 的轨道，半边集 $H(X/G) = H(X)/G$ 为 G 作用下 $H(X)$ 的轨道。G 的作用保持根映射和对合映射，因此由根映射 $r : H(X) \to V(X)$，对合映射 $\sigma : H(X) \to H(X)$，相应有 $r : H(X/G) \to V(X/G)$，$\sigma : H(X/G) \to H(H/G)$。记自然商映射为 $\pi : X \to X/G$。

3. 边加权的边自由商图的 Zeta 函数

3.1. 定义

下面定义边加权的群的边自由商图的 Ihara Zeta 函数。

设有群的图 $\mathbb{X}$，半边集 $H(\mathbb{X}) = \{h_1, \cdots, h_m, \bar{h}_1, \cdots, \bar{h}_m\} \cup \{l_1, \cdots, l_l\}$。

参照文献[8]和文献[9]的加权方式，$\forall h \in H(X)$，对 h 加权 x_h，使得 $x_{\bar{h}} = x_h^{-1}$。可见对 $l \in L(\mathbb{X})$ (即 h 为腿，$h = \bar{h}$ 的情形)，有 $x_l^2 = 1$。此时令 $x_l = -1$。

对路 $P = g_0 h_1 g_1 h_2 \cdots g_{n-1} h_n$，定义路的权 $w(P) = x_{h_1} \cdots x_{h_n}$。

定义 7 边加权的群的边自由商图的 Ihara Zeta 函数如下：

$$\zeta(u, \mathbb{X}, w) = \prod_{\boldsymbol{p}} \left(1 - w(\boldsymbol{p}) u^{l(\boldsymbol{p})}\right)^{-1}.$$

3.2. 二项行列式公式

定义半边邻接权矩阵 W 如下：

$$W_{hh'} = \begin{cases} \left(c\left(r(h')\right) - 1\right) x_{h'}, & h' = \bar{h}, \\ c\left(r(h')\right) x_{h'}, & h' \neq \bar{h} \text{ 且 } r(h') = r(\bar{h}), \\ 0, & r(h') \neq r(\bar{h}). \end{cases}$$

其中 $c(v)$ 为顶点负荷，有 $c(v) = \#(X_v)$。

可见，对路 $P = g_0 h_1 g_1 h_2 \cdots g_{n-1} h_n$，$W_{h_1 h_2} \cdots W_{h_n h_1}$ 为 $h_1 \cdots h_n$ 上的闭约化路权重之和。

下面给出边加权的群的边自由商图的 Ihara Zeta 函数的二项行列式公式。

定理 1 设 $\mathbb{X} = (X, X_v, w)$ 为有限边加权的边平凡的群图，其中半边个数为 k。$\mathbb{X}$ 的 Ihara Zeta 函数等于

$$\zeta(u,\mathbb{X},w)^{-1}=\det(I_k-Wu),$$

其中 W 为 $\mathbb{X}$ 的半边邻接权矩阵。

证明：对 $\zeta(u,\mathbb{X},w)$ 取 log，得

$$\log\zeta(u,\mathbb{X},w)=-\sum_{\boldsymbol{p}}\log\left(1-w(\boldsymbol{p})u^{l(\boldsymbol{p})}\right)=\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(w(\boldsymbol{p})u^{l(\boldsymbol{p})}\right)^{j}.$$

对于素元 $\boldsymbol{p}$，有 $l(\boldsymbol{p})$ 个本原路相对应，且长度均为 $l(\boldsymbol{p})$，可见

$$\log\zeta(u,\mathbb{X},w)=\sum_{P\text{本原}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{l(P^j)}w(P^j)u^{l(P^j)}.$$

由于任一闭约化路 Q 都可唯一表为本原路的次幂得

$$\log\zeta(u,\mathbb{X},w)=\sum_{Q\text{闭约化}}\frac{1}{l(Q)}w(Q)u^{l(Q)}\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{n}u^n,$$

其中 C_n 为给定长度 n，闭约化路权之和。

考虑半边邻接权矩阵 W，可见

$$C_n=\sum_{h_j\in H(X)}W_{h_1h_2}\cdots W_{h_nh_1}=\sum_{h\in H(X)}\left(W^n\right)_{hh}=trW^n.$$

因此有

$$\log\zeta(u,\mathbb{X},w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{trW^n}{n}u^n=tr\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Wu)^n}{n}=tr\left(-\log(I_k-Wu)\right)=\log\det(I_k-Wu)^{-1}.$$

综上，

$$\zeta(u,\mathbb{X},w)^{-1}=\det(I_k-Wu).$$

3.3. 三项行列式公式

记有 m 条边，n 个顶点，l 个腿，且记半边数 $2m+l=k$。定义如下矩阵。

对角价矩阵 Q 为 $n\times n$ 矩阵，有

$$(Q)_{uv}=\delta_{uv}val(v).$$

其中 $val(v)$ 为顶点关于根映射的原象个数，即顶点上半边个数。

邻接权和矩阵 A 为 $n\times n$ 矩阵，表示 u 到 v 的边权重之和，有

$$(A)_{uv}=\sum_{\substack{h\\ \text{s.t. } u=r(h)\\ \text{且} v=r(\bar{h})}}x_h.$$

对角负荷矩阵 C 为 $n\times n$ 矩阵表示顶点上群元素个数，如下：

$$(C)_{uv}=\delta_{uv}c(v).$$

其中 $c(v)$ 为顶点负荷，有 $c(v)=\#(X_v)$。

下面给出边加权的群的边自由商图的 Ihara Zeta 函数的三项行列式公式。

定理 2 设 $\mathbb{X}=(X,X_v,w)$ 为有限边加权的边平凡的群图，其中有 m 条边，n 个顶点，l 条腿，且记半边数 $2m+l=k$。$\mathbb{X}$ 的 Ihara Zeta 函数满足

$$\zeta(u,\mathbb{X},w)^{-1}=\left(1-u^2\right)^{m-n}(1-u)^l\det\left(I_n-CAu+\left(CQ-I_n\right)u^2\right).$$

证明：对半边排序，记 $h_{m+i}=\overline{h}_i,\forall i\in\{1,\cdots,m\}$，记 $h_{2m+j}=l_j,\forall j\in\{1,\cdots,l\}$。

定义辅助矩阵如下：

定义 $n\times k$ 阶矩阵 S 为始矩阵，其中

$$(S)_{vh}=\begin{cases}1, & v=r(h),\\ 0, & v\neq r(h).\end{cases}$$

定义 $n\times k$ 阶矩阵 T 为终矩阵，其中

$$(T)_{vh}=\begin{cases}1, & v=r(\overline{h}),\\ 0, & v\neq r(\overline{h}).\end{cases}$$

定义 $k\times k$ 阶矩阵 J 为对合矩阵，其中

$$(J)_{hh'}=\begin{cases}1, & h'=\overline{h},\\ 0, & h'\neq \overline{h}.\end{cases}$$

定义 $k\times k$ 阶矩阵 D 为半边负荷矩阵，其中

$$(D)_{hh'}=\delta_{hh'}c(r(h'))x_{h'}.$$

定义 $k\times k$ 阶矩阵 L 为半边权矩阵，其中

$$(L)_{hh'}=\delta_{hh'}x_{h'}.$$

易证如下关系：

$$SJ=T,\quad TJ=S,\quad (JL)^{-1}=JL,\quad {}^tJ=J,\quad J^2=I,$$
$$W+JL={}^tTSD,\quad SD=CSL,\quad SL\,{}^tT=A,\quad S\,{}^tS=Q.$$

因此可知：

$$CA=SD\,{}^tT,\ CQ=SDL^{-1}\,{}^tS.$$

用以上关系式，证明三项行列式公式。由 $W+JL={}^tTSD$，知

$$\begin{aligned}\zeta(u,\mathbb{X},w)^{-1}&=\det(I_k-Wu)=\det\left(I_k-\left({}^tTSD-JL\right)u\right)\\&=\det\left((I_k+JLu)-{}^tT\left(\left(1-u^2\right)I_n\right)^{-1}SDu\left(1-u^2\right)\right).\end{aligned}$$

容易验证，$\det\left(D-CA^{-1}B\right)=\dfrac{\det(D)}{\det(A)}\det\left(A-BD^{-1}C\right)$。因此

$$\zeta(u,\mathbb{X},w)^{-1}=\frac{\det(I_k+JLu)}{\det\left(\left(1-u^2\right)I_n\right)}\det\left(\left(1-u^2\right)I_n-SDu\left(1-u^2\right)(I_k+JLu)^{-1}\,{}^tT\right).$$

由 $(JL)^{-1}=JL$，易见 $(I_k+JLu)^{-1}=\dfrac{1}{1-u^2}(I_k-JLu)$。带入得

$$\begin{aligned}\zeta(u,\mathbb{X},w)^{-1}&=\frac{\det(I_k+JLu)}{\left(1-u^2\right)^n}\det\left(\left(1-u^2\right)I_n-SDu\left(1-u^2\right)\frac{1}{1-u^2}(I_k-JLu)\,{}^tT\right)\\&=\frac{\det(I_k+JLu)}{\left(1-u^2\right)^n}\det\left(\left(1-u^2\right)I_n-SD\,{}^tTu+SDJL\,{}^tTu^2\right).\end{aligned}$$

由 $CA = SD{}^tT, J^2 = I$ 知

$$\zeta(u,\mathbb{X},w)^{-1} = \frac{\det(I_k + JLu)}{(1-u^2)^n}\det\left((1-u^2)I_n - CAu + SDJLJJ{}^tTu^2\right).$$

由 $TJ = S, {}^tJ = J$ 得

$$\zeta(u,\mathbb{X},w)^{-1} = \frac{\det(I_k + JLu)}{(1-u^2)^n}\det\left((1-u^2)I_n - CAu + SDJLJ{}^tSu^2\right).$$

由 $(JL)^{-1} = JL$ 得

$$\zeta(u,\mathbb{X},w)^{-1} = \frac{\det(I_k + JLu)}{(1-u^2)^n}\det\left((1-u^2)I_n - CAu + SDL^{-1}{}^tSu^2\right).$$

又 $CQ = SDL^{-1}{}^tS$，因此

$$\begin{aligned}\zeta(u,\mathbb{X},w)^{-1} &= \frac{\det(I_k + JLu)}{(1-u^2)^n}\det\left((1-u^2)I_n - CAu + CQu^2\right)\\ &= \frac{\det(I_k + JLu)}{(1-u^2)^n}\det\left(I_n - CAu + (CQ - I_n)u^2\right).\end{aligned}$$

考虑 $\det(I_k + JLu)$。

由半边的顺序，可记

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$L_1 = \begin{pmatrix} x_{h_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & x_{h_m} \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_l.$$

则

$$I_k + JLu = \begin{pmatrix} I_m & L_1^{-1}u & 0 \\ L_1u & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_l(1-u) \end{pmatrix},$$

取行列式得

$$\det(I_k + JLu) = \begin{vmatrix} I_m & L_1^{-1}u \\ L_1u & I_m \end{vmatrix}(1-u)^l = (1-u^2)^m(1-u)^l.$$

可见

$$\zeta(u,\mathbb{X},w)^{-1} = (1-u^2)^{m-n}(1-u)^l\det\left(I_n - CAu + (CQ - I_n)u^2\right).$$

基金项目

国家自然科学基金青年项目 11901390。

参考文献

[1] Ihara, Y. (1966) On Discrete Subgroups of the Two by Two Projective Linear Group over p-Adic Fields. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **18**, 219-235. https://doi.org/10.2969/jmsj/01830219

[2] Hashimoto, K. (1989) Zeta Functions of Finite Graphs and Representations of p-Adic Groups. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **15**, 211-280. https://doi.org/10.2969/aspm/01510211

[3] Bass, H. (1992) The Ihara-Selberg Zeta Function of a Tree Lattice. *International Journal of Mathematics*, **3**, 717-797. https://doi.org/10.1142/S0129167X92000357

[4] Stark, H.M. and Terras, A.A. (1996) Zeta Functions of Finite Graphs and Coverings. *Advances in Mathematics*, **121**, 124-165. https://doi.org/10.1006/aima.1996.0050

[5] Stark, H.M. and Terras, A.A. (2000) Zeta Functions of Finite Graphs and Coverings, Part II. *Advances in Mathematics*, **154**, 132-195. https://doi.org/10.1006/aima.2000.1917

[6] Terras, A. (2011) Zeta Functions of Graphs: A Stroll through the Garden. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511760426

[7] Zakharov, D. (2021) Zeta Functions of Edge-Free Quotients of Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **629**, 40-71. https://doi.org/10.1016/j.laa.2021.07.009

[8] Zhu, L. (2021) A Vertex Weighted Bartholdi Zeta Function for a Graph. *Linear Algebra and Its Applications*, **621**, 254-271. https://doi.org/10.1016/j.laa.2021.03.024

[9] 杨文玲，朱林. 有向图的顶点加权 Zeta 函数[J]. 上海理工大学学报, 2022, 44(5): 497-501.