Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 1033-1039
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134108

Hans汉斯

Goillnitz Gordon函数相关函数的新模关系及证明

刘玉娇[1]**，吴　辉**[2]

[1]重庆师范大学数学科学学院，重庆
[2]重庆市礼嘉中学校，重庆

收稿日期：2023年3月19日；录用日期：2023年4月20日；发布日期：2023年4月27日

摘　要

本文出于对数论中Gollnitz-Gordon函数模关系的研究学习，发现了关于该函数的相关函数$S(-q)$还存在许多类似的模关系。为了找出某些新的模关系，本文利用了Schroter的数学公式和Ramanujan提出的一些简单的θ函数恒等式来进行推导转化，通过该方法建立了两个与$S(-q)$相关的新模关系并给出了证明，这两个新模关系是对已知模关系的扩展，该发现有助于之后读者在数论学习中对模关系进行研究及学习。

关键词

罗杰斯拉马努金函数，Gollnitz-Gordon函数，拉马努金θ函数恒等式

Some New Modular Relations of Gollnitz-Gordon Function Correlation Function and Its Proof

Yujiao Liu[1]**, Hui Wu**[2]

[1]School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing
[2]Chongqing Lijia Middle School, Chongqing

Received: Mar. 19th, 2023; accepted: Apr. 20th, 2023; published: Apr. 27th, 2023

Abstract

Based on the study of the modular relation of Gollnitz-Gordon function in number theory, we find that there are many similar modular relations about the correlation function $S(-q)$ of Gollnitz-Gordon function. In order to find out some new modular relations, Schroter's mathematical

文章引用: 刘玉娇, 吴辉. Goillnitz Gordon 函数相关函数的新模关系及证明[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 1033-1039.
DOI: 10.12677/pm.2023.134108

formula and some simple θ function identities proposed by Ramanujan were used for derivation and transformation. Through this method, two new modular relations related to $S(-q)$ were established and proved. The two new modular relations are extensions of the known modular relations. This finding is helpful for readers to study and learn modular relations in the study of number theory.

Keywords

Rogers-Namanujan Functions, Gollnitz-Gordon Functions, Ramanujan's General Theta Functions

1. 引言

著名的 Rogers-Ramanujan 恒等式由英国数学家 Rogers 和印度数学家 Ramanujan 各自独立发现，Rogers-Ramanujan 恒等式的证明是 q 级数理论发展中的焦点之一，人们曾用各种方法给出了这类恒等式的证明。两个与 Rogers-Ramanujan 恒等式类似的著名恒等式叫做 Gollnitz-Gordon 函数恒等式，关于 Gollnitz-Gordon 函数，有许多值得研究的模关系还未被发现。1998 年和 2022 年，黄森山和陈淑玲在[1]、[2]中建立了 21 个只涉及 Gollnitz-Gordon 函数的模关系、9 个同时涉及 Rogers-Ramanujan 函数和 Gollnitz-Gordon 函数的模关系以及一个新的 Rogers-Ramanujan 函数关系式。此外，2008 年，在黄和陈的理论基础上，Nayandeep Deka Baruah 等人在[3]中用拉马努金的笔记中的 schroter 公式和一些 θ 函数恒等式的新方法，重新证明了这 21 个只涉及 Gollnitz-Gordon 函数的模关系。

本文同样利用 schroter 公式和 θ 函数恒等式新方法建立并证明了两个与 Gollnitz-Gordon 函数相关的函数 $S(-q)$ 的新模关系，这两个新模关系是对已知模关系的扩展，本文的建立有助于读者对模方程进行进一步的理论研究，有比较好的研究意义。为了方便起见，本文统一用符号 f_n 表示 $f(-q^n)$。

设 $|q|<1$，对于任意正整数 n，有无穷乘积定义如下：

$$(a;q)_n := \prod_{j=0}^{n-1}\left(1-aq^j\right) \text{且} (a;q)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty}\left(1-aq^n\right).$$

著名的 Rogers-Ramanujan 恒等式定义[4] [5]：

$$G(q) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty},$$

$$H(q) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q^2;q^5)_\infty (q^3;q^5)_\infty}.$$

$G(q)$ 和 $H(q)$ 是著名的 Rogers-Ramanujan 函数，Ramanuja 在很早的时候就建立了 $G(q)$ 和 $H(q)$ 的四十个模关系但没有给出证明，这四十个恒等式称为 Ramanuja 的四十个恒等式，在这四十个恒等式中，最简单且最漂亮的一个恒等式是

$$G\left(q^{11}\right)H(q) - q^2 G(q) H\left(q^{11}\right) = 1, \tag{1.1}$$

1921 年，英国数学家 Darling 在[4]中第一次证明了这个恒等式。在同期的伦敦数学学会学报上，Rogers

在[5]中证明了四十个恒等式中的十个，十个恒等式中其中一个就是(1.1)式。1933 年，Watson 在[6]中证明了四十个恒等式中的 8 个，其中有 2 个已被 Rogers 之前证明过；1977 年，Bressoud 在他的博士论文[7]中证明了 40 个恒等式中的 15 个；1989 年，Biagioli 在[8]中证明了剩余 9 个恒等式中的 7 个。最近，Berndt 发现了所有 40 个恒等式的证明。

Gollnitz-Gordon 函数恒等式定义[6] [7]：

$$S(q):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}q^{n^2}=\frac{1}{(q;q^8)_\infty(q^4;q^8)_\infty(q^7;q^8)_\infty},$$

$$T(q):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}q^{n^2+2n}=\frac{1}{(q^3;q^8)_\infty(q^4;q^8)_\infty(q^5;q^8)_\infty}.$$

$S(q)$ 和 $T(q)$ 是著名的 Gollnitz-Gordon 函数，应用纯理论证明方法，陈淑玲和黄森山还得到了一些推广的恒等式。$S(q)$ 的研究还有很多很多，前人应用各种方法证明了不少著名的恒等式，还得到了很多新的恒等式，本文则利用 schroter 公式和 θ 函数恒等式方法建立并证明了两个与 $S(-q)$ 相关的新模关系。

本文一共分为引言、预备知识、主要结果以及参考文献四个部分。

在第一部分引言中，简单地介绍了关于 Rogers-Ramanujan 函数、Gollnitz-Gordon 函数模关系的研究背景、目的及意义。在第二部分预备知识中，给出了证明本文主要结果所需要用到的相关 schroter 公式以及 Ramanujan θ 函数恒等式，这些理论结果及其证明都可以在参考文献[8]中找到。第三部分给出了本文的主要研究结果：Goillnitz Gordon 函数相关函数的新模关系及证明。在此部分中针对定理一的证明，首先给出了一个 schroter 公式，通过给变量赋予新值令 $\mu=6$，$\nu=3$ 得到表达式，对其中 q 进行替换后相互运算建立了一个 $\psi(q)$ 与 $f(q)$ 之间的 θ 函数恒等式，然后通过层层转换计算最后将其转换为了 Gollnitz-Gordon 函数相关函数的新模关系，定理二的建立及证明过程同理。这两个新模关系是对已知模关系的扩展，该发现有助于之后读者在数论学习中对模关系进行研究及学习。最后本文第四部分即给出了本文在写作过程中所用到的参考文献。

2. 预备知识

2.1. 一些 Schroter 公式和 Ramanujan Theta 函数恒等式

下面给出的公式是 schroter 公式，给出的引理是早期被天才数学家 Ramanujan 在他的笔记本中记录下的一些 θ 函数恒等式，这些恒等式在后来被各个数学家进行了证明。1991 年，数学家 Bruce C. Berndt 将 Ramanujan 的笔记以及各部分内容的证明过程归纳整理成册。其中一册即是本文参考文献[8]，里面包含了下面给出的定义和引理及其各自的证明过程。

定义 2.1：$\phi(q):=f(q,q)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}q^{k^2}$

定义 2.2：$\psi(q):=f(q,q^3)=\frac{1}{2}f(1,q)=\sum_{k=0}^{\infty}q^{k(k+1)/2}$

引理 2.1 [8]：

当 μ 为偶数时，则

$$\psi(q^{\mu+\nu})\psi(q^{\mu-\nu})=\phi\left(q^{\mu(\mu^2-\nu^2)}\right)\psi(q^{2\mu})+\sum_{m=1}^{\mu/2-1}q^{\mu m^2-\nu m}f\left(q^{(\mu+2m)(\mu^2-\nu^2)},q^{(\mu-2m)(\mu^2-\nu^2)}\right)f\left(q^{2\nu m},q^{2\mu-2\nu m}\right)$$
$$+q^{\mu^3/4-\mu\nu/2}\psi\left(q^{2\mu(\mu^2-\nu^2)}\right)f\left(q^{\mu\nu},q^{2\mu-\mu\nu}\right)$$

引理 2.2 [8]

$$f\left(q,q^2\right)=\frac{\phi\left(-q^3\right)}{\chi\left(-q\right)}$$

引理 2.3 [2]

$$S\left(q\right)T\left(q\right)=\frac{f_2 f_8^2}{f_1 f_4^2},\phi\left(q\right)=\frac{f_2^5}{f_1^2 f_4^2},\psi\left(q\right)=\frac{f_2^2}{f_1}$$

引理 2.4 [3]

$$\phi\left(-q\right)=\frac{f_1^2}{f_2},\psi\left(-q\right)=\frac{f_1 f_4}{f_2},f\left(q\right)=\frac{f_2^3}{f_1 f_4},\chi\left(q\right)=\frac{f_2^2}{f_1 f_4}.$$

引理 2.5 [3]

$$f\left(-q^3,-q^5\right)=\frac{f_1 f_4}{f_2}S\left(q\right),f\left(-q,-q^7\right)=\frac{f_1 f_4}{f_2}T\left(q\right)$$

证明：由[1]中 Lemma 2.6 和定义 2.2 得：

$$S\left(q\right)=\frac{\psi\left(-q^2\right)f\left(-q^3,-q^5\right)}{f_1 f_8},T\left(q\right)=\frac{\psi\left(-q^2\right)f\left(-q,-q^7\right)}{f_1 f_8}.$$

再代入引理 2.4，结论即证。

引理 2.6 [8]

$$\psi\left(q\right)=f\left(q^3,q^6\right)+q\psi\left(q^9\right)=f\left(q^6,q^{10}\right)+qf\left(q^2,q^{14}\right)$$

$$\psi\left(-q\right)=f\left(q^6,q^{10}\right)-qf\left(q^2,q^{14}\right)$$

引理 2.7 [8]

$$f\left(a,b\right)=a^{n(n+1)/2}b^{n(n-1)/2}f\left(a\left(ab\right)^n,b\left(ab\right)^{-n}\right).$$

2.2. 关于 Theta 恒等式的一些推论及证明

推论 2.1

$$f\left(q^3,q^5\right)=\frac{f_2^2}{f_1}S\left(-q\right),f\left(q,q^7\right)=\frac{f_2^2}{f_1}T\left(-q\right).$$

证明：结合引理 2.4 与引理 2.5 知：

$$f\left(-q^3,-q^5\right)=\frac{f_1 f_4}{f_2}S\left(q\right)=\psi\left(-q\right)S\left(q\right),f\left(-q,-q^7\right)=\frac{f_1 f_4}{f_2}T\left(q\right)=\psi\left(-q\right)T\left(q\right).$$

用 $-q$ 替换式上式中的 q 得：

$$f\left(q^3,q^5\right)=\psi\left(q\right)S\left(-q\right)=\frac{f_2^2}{f_1}S\left(-q\right),$$

$$f\left(q,q^7\right)=\psi\left(q\right)T\left(-q\right)=\frac{f_2^2}{f_1}T\left(-q\right).$$

推论 2.1 即得证。

推论 2.2：

$$f\left(q^{18},q^{36}\right)=\frac{\phi\left(-q^{54}\right)}{\chi\left(-q^{18}\right)}$$

证明：用 q^{18} 替代引理 2.2 中的 q，即得证。

推论 2.3：

$$f\left(q,q\right)=qf\left(q^{3},q^{-1}\right),$$

证明：在引理 2.7 中代入 $a=q$， $b=q$， $n=1$，即证。

推论 2.4：

$$f\left(q^{2},q^{14}\right)=q^{35}f\left(q^{42},q^{-26}\right)$$

证明：在引理 2.7 中代入 $a=q^{2}$， $b=q^{14}$， $n=\frac{5}{2}$，即证。

3. Gollnitz Gordon 函数相关函数的新模方程及其证明过程

定理一：

$$qS\left(-q\right)T\left(-q^{3}\right)+T\left(-q\right)S\left(-q^{3}\right)=\frac{f_2^3 f_3}{f_1 f_4^2 f_6^2}\left(\frac{f_{54}^2}{f_{108}}\cdot\frac{f_{36}}{f_{18}}+\frac{f_{108}^2}{f_{54}}\right)$$

证明：在引理 2.1 中，设 $\mu=6$， $\nu=3$，得：

$$\begin{aligned}\psi\left(q^{9}\right)\psi\left(q^{3}\right)=\phi\left(q^{162}\right)\psi\left(q^{12}\right)+q^{3}f\left(q^{216},q^{108}\right)f\left(q^{6},q^{6}\right)\\+q^{18}f\left(q^{270},q^{54}\right)f\left(q^{12},1\right)+q^{45}\psi\left(q^{324}\right)f\left(q^{18},q^{-6}\right)\end{aligned}\tag{3.1}$$

在上式中，用 $-q$ 替换 q，得：

$$\begin{aligned}\psi\left(-q^{9}\right)\psi\left(-q^{3}\right)=\phi\left(q^{162}\right)\psi\left(q^{12}\right)-q^{3}f\left(q^{216},q^{108}\right)f\left(q^{6},q^{6}\right)\\+q^{18}f\left(q^{270},q^{54}\right)f\left(q^{12},1\right)-q^{45}\psi\left(q^{324}\right)f\left(q^{18},q^{-6}\right)\end{aligned}\tag{3.2}$$

用(3.1)~(3.2)式得：

$$\psi\left(q^{9}\right)\psi\left(q^{3}\right)-\psi\left(-q^{9}\right)\psi\left(-q^{3}\right)=2q^{3}f\left(q^{216},q^{108}\right)f\left(q^{6},q^{6}\right)+2q^{45}\psi\left(q^{324}\right)f\left(q^{18},q^{-6}\right)$$

用 q 替换上式中的 q^{3}，得：

$$\psi\left(q^{3}\right)\psi\left(q\right)-\psi\left(-q^{3}\right)\psi\left(-q\right)=2qf\left(q^{72},q^{36}\right)f\left(q^{2},q^{2}\right)+2q^{15}\psi\left(q^{108}\right)f\left(q^{6},q^{-2}\right)\tag{3.3}$$

利用引理 2.6 对(3.3)式左边进行转化得：

$$\psi\left(q^{3}\right)\psi\left(q\right)-\psi\left(-q^{3}\right)\psi\left(-q\right)=2q^{3}f\left(q^{6},q^{10}\right)f\left(q^{6},q^{42}\right)+2qf\left(q^{2},q^{14}\right)f\left(q^{18},q^{30}\right)\tag{3.4}$$

通过对比(3.3)式和(3.4)式得：

$$2qf\left(q^{72},q^{36}\right)f\left(q^{2},q^{2}\right)+2q^{15}\psi\left(q^{108}\right)f\left(q^{6},q^{-2}\right)=2q^{3}f\left(q^{6},q^{10}\right)f\left(q^{6},q^{42}\right)+2qf\left(q^{2},q^{14}\right)f\left(q^{18},q^{30}\right)$$

上式两边同时除以 $2q$，并用 q 替换其中的 q^{2}，得到：

$$f\left(q^{36},q^{18}\right)f\left(q,q\right)+q^{7}\psi\left(q^{54}\right)f\left(q^{3},q^{-1}\right)=qf\left(q^{3},q^{5}\right)f\left(q^{3},q^{21}\right)+f\left(q^{1},q^{7}\right)f\left(q^{9},q^{15}\right)\tag{3.5}$$

在(3.5)式中利用定义 2.1、推论 2.3 以及推论 2.1，得到：

$$\frac{\phi(-q^{54})}{\chi(-q^{18})}\cdot\phi(q)+q^{6}\psi(q^{54})\phi(q)=\frac{f_2^2}{f_1}\cdot\frac{f_6^2}{f_3}\left(qS(-q)T(-q^3)+T(-q)S(-q^3)\right)$$

带入引理 2.3 和引理 2.4，得到：

$$qS(-q)T(-q^3)+T(-q)S(-q^3)=\frac{f_2^3 f_3}{f_1 f_4^2 f_6^2}\left(\frac{f_{54}^2}{f_{108}}\cdot\frac{f_{36}}{f_{18}}+\frac{f_{108}^2}{f_{54}}\right)$$

定理一即得证。

定理二：

$$S(-q^2)=qT(-q^2)$$

证明：在引理 2.1 中，设 $\mu=8$， $\nu=7$，得：

$$\begin{aligned}\psi(q^{15})\psi(q)=\phi(q^{120})\psi(q^{16})+qf(q^{150},q^{90})f(q^{14},q^{2})+q^{18}f(q^{180},q^{60})f(q^{28},q^{-12})\\+q^{51}f(q^{210},q^{30})f(q^{42},q^{-26})+q^{100}\psi(q^{240})f(q^{56},q^{-40})\end{aligned}\tag{3.6}$$

在上式中，用 $-q$ 替换 q，得：

$$\begin{aligned}\psi(-q^{15})\psi(-q)=\phi(q^{162})\psi(q^{12})-qf(q^{150},q^{90})f(q^{14},q^{2})+q^{18}f(q^{180},q^{60})f(q^{28},q^{-12})\\-q^{51}f(q^{210},q^{30})f(q^{42},q^{-26})+q^{100}\psi(q^{240})f(q^{56},q^{-40})\end{aligned}\tag{3.7}$$

用(3.6)~(3.7)式得：

$$\psi(q^{15})\psi(q)-\psi(-q^{15})\psi(-q)=2qf(q^{150},q^{90})f(q^{14},q^{2})+2q^{51}f(q^{210},q^{30})f(q^{42},q^{-26})$$

又由推论 2.4 得

$$f(q^2,q^{14})=q^{35}f(q^{42},q^{-26})$$

所以

$$\psi(q^{15})\psi(q)-\psi(-q^{15})\psi(-q)=2qf(q^{150},q^{90})f(q^{14},q^{2})+2q^{16}f(q^{210},q^{30})f(q^{2},q^{14})\tag{3.8}$$

在(3.8)中左边使用引理 2.6 得：

$$\begin{aligned}&2qf(q^{150},q^{90})f(q^{2},q^{14})+2q^{15}f(q^{210},q^{30})f(q^{6},q^{10})\\&=2qf(q^{150},q^{90})f(q^{14},q^{2})+2q^{16}f(q^{210},q^{30})f(q^{2},q^{14})\end{aligned}$$

所以

$$f(q^{210},q^{30})f(q^{6},q^{10})=qf(q^{210},q^{30})f(q^{2},q^{14})$$

推出

$$f(q^6,q^{10})=qf(q^2,q^{14})$$

由推论 2.1 知：

$$f(q^3,q^5)=\frac{f_2^2}{f_1}S(-q),\ f(q,q^7)=\frac{f_2^2}{f_1}T(-q)$$

所以

$$S(-q^2)=qT(-q^2)$$

结论得证。

定理一和定理二的内容及其证明即为本文主要内容。

4. 结论

本文利用了 Schroter 的数学公式和 Ramanujan 提出的一些简单的函数恒等式来进行推导转化，建立了两个与 $S(-q)$相关的新模关系，这两个新模关系是对已知模关系的扩展，对数论中模方程的研究学习有很好的研究意义。可以进一步思考，还能不能用这个方法对变量赋予另外的值去建立更多的模方程。

参考文献

[1] Chen, S.-L. and Huang, S.S. (2002) New Modular Relations for the Gollnitz-Gordon Functions. *Journal of Number Theory*, **93**, 58-75. https://doi.org/10.1006/jnth.2001.2708

[2] Huang, S.S. (1998) On Modular Relations for Gollnitz-Gordon Functions with Application to Partitions. *Journal of Number Theory*, **68**, 178-216. https://doi.org/10.1006/jnth.1997.2205

[3] Baruah, N.D., Bora, J. and Saikia, N. (2008) Some New Proofs of Modular Relations for the Göllnitz-Gordon Functions. *The Ramanujan Journal*, **15**, 281-301. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9079-8

[4] Ramanujan, S. (1919) Proof of Certain Identities in Combinatory Analysis. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **19**, 214-216.

[5] Rogers, L.J. (1894) Second Memoir on the Expansion of Certain Infinite Products. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **25**, 318-343. https://doi.org/10.1112/plms/s1-25.1.318

[6] Gollnitz, H. (1967) Partitionen mit Differenzen bedingungen. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, **225**, 154-190. https://doi.org/10.1515/crll.1967.225.154

[7] Gordon, B. (1965) Some Continued Fractions of Rogers-Ramanujan Type. *Duke Mathematical Journal*, **32**, 741-748. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-65-03278-3

[8] Berndt, B.C. (1991) Ramanujan's Notebooks, Part III. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0965-2